УДК 330.43 : 519.2

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы в экономике (физико-математические науки, экономические науки)

О ПОЛЬЗЕ ДЕФИЦИТА ПРИ УПРАВЛЕНИИ ЗАПАСАМИ

Орлов Александр Иванович
д.э.н., д.т.н., к.ф.-м.н.
профессор
РИНЦ SPIN-код: 4342-4994
prof-orlov@mail.ru

Орлов Антон Александрович
ассистент
РИНЦ SPIN-код: 6151-2018
antorlov@mail.ru
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

Статья посвящена математическим моделям управления запасами на однопродуктовом складе. Рассмотрены модель Харриса – Вильсона, модель с дефицитом, двухуровневая модель. Представлены основные факты о классической модели управления запасами Харриса - Вильсона. Выявлена роль интервала планирования в оптимизационной задаче, предназначенной для установления величины партии поставки. Обсуждаются распространенные догмы – использование «формулы квадратного корня» вместо решения оптимизационной задачи, требование отсутствия дефицита, необходимость страхового запаса. Впервые разработана модель с дефицитом. Для неё подробно разобраны три этапа решения задачи минимизации затрат. Рассмотрена асимптотическая оптимальность планов, соответствующих «формулам квадратного корня». Установлено, что при малых отклонениях объемов поставок от оптимальных объемов средние издержки возрастают весьма мало. На основе «принципа уравнивания погрешностей» разработан метод определения необходимой точности расчётов параметров модели. Проведено сравнение характеристик модели с дефицитом и модели Харриса-Вильсона. Установлено преимущество модели с дефицитом, в частности, уменьшение средних издержек. Констатируется, что модель Харриса - Вильсона является предельным случаем модели с дефицитом при безграничном росте платы за дефицит. Кратко рассмотрена двухуровневая модель управления запасами, в которой накопленный за определенное время спрос является суммой случайного числа случайных слагаемых. Приведены оптимальные значения параметров модели, установлено, что уровень запаса на складе в течение некоторых случайных

UDC 330.43 : 519.2

5.2.2. Mathematical, statistical and instrumental methods of economics (physical and mathematical sciences, economic sciences)

ON THE ADVANTAGES OF SHORTAGE IN INVENTORY MANAGEMENT

Orlov Alexander Ivanovich
Dr.Sci.Econ., Dr.Sci.Tech., Cand.Phys-Math.Sci.,
professor
RSCI SPIN-code: 4342-4994
prof-orlov@mail.ru

Orlov Anton Alexandrovich
assistant
RSCI SPIN-code: 6151-2018
antorlov@mail.ru
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

The article is devoted to mathematical models of inventory management in a single-product warehouse. The Harris-Wilson model, the shortage model, and the two-level model are considered. The main facts about the classical Harris-Wilson inventory management model are presented. The role of the planning interval in the optimization problem designed to determine the size of a delivery lot is revealed. Common dogmas are discussed, such as the use of the "square root formula" instead of solving the optimization problem, the requirement of no shortage, and the need for a safety stock. A model with shortage has been developed for the first time. Three stages of solving the cost minimization problem for it are analyzed in detail. The asymptotic optimality of plans corresponding to the "square root formula" is considered. It is established that with small deviations of delivery volumes from the optimal volumes, average costs increase very little. Based on the "error equalization principle", a method for determining the required accuracy of model parameter calculations has been developed. A comparison of the characteristics of the shortage model and the Harris-Wilson model is conducted. The advantages of the shortage model, in particular, a reduction in average costs, are established. It is stated that the Harris-Wilson model is a limiting case of the shortage model with unlimited growth of the cost of shortage. A two-level inventory management model is briefly considered, in which the accumulated demand over a certain period is the sum of a random number of random terms. Optimal values of the model parameters are presented, and it is established that the inventory level in the warehouse should be negative during certain random time intervals, i.e., a shortage should occur. It is shown that the use of safety stock in the Harris-Wilson model is inappropriate. The mathematical models considered are successfully used

интервалов времени должен быть отрицательным, т.е. должен иметь место дефицит. Показано, что использование страхового запаса в модели Харриса – Вильсона нецелесообразно. Рассмотренные математические модели успешно используются не только при управлении запасами. Так, модель оптимизации моментов выпуска новых моделей продукции на рынок с математической точки зрения эквивалентна модели с дефицитом. Необходимо дальнейшее изучение математических моделей управления запасами, в частности, в области оценивания точности асимптотических выводов сравнительно с допредельными результатами

not only in inventory management. For example, a model for optimizing the timing of new product launches is mathematically equivalent to the shortage model. Further study of mathematical models of inventory management is necessary, particularly in the area of assessing the accuracy of asymptotic inferences compared to pre-limit results

Ключевые слова: ЛОГИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ, ПЛАНЫ ПОСТАВКИ, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОПТИМИЗАЦИЯ, МОДЕЛЬ ХАРРИСА – ВИЛЬСОНА, МОДЕЛЬ С ДЕФИЦИТОМ, АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ, ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ, СТРАХОВОЙ ЗАПАС

Keywords: LOGISTICS, INVENTORY MANAGEMENT, SUPPLY PLANS, MATHEMATICAL MODELS, OPTIMIZATION, HARRIS – WILSON MODEL, SHORTAGE MODEL, ASYMPTOTIC OPTIMAL PLANS, TWO-LEVEL MODEL, SAFETY STOCK

http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-222-021

1. Введение

Модели управления работой склада являются важной составной частью теории логистики как экономической дисциплины, занимающейся системами управления процессами перемещения товаров, услуг, финансов, информации и ресурсов. На предприятиях обычно действует развитая система складов. При доставке сырья и комплектующих изделий они размещаются на соответствующем складе (обычно его называют входным) и проходят входной контроль. Затем прошедшие контроль единицы сырья и комплектующих поступают в обрабатывающие цеха. После соответствующей обработки детали и узлы передаются в сборочные цеха. Созданные изделия поступают на склад готовой продукции.

Таким образом, складская система включает в себя целый ряд складов - входной склад, склады сборочных единиц (результатов деятельности обрабатывающих (заготовительных) цехов), склад готовой продукции. Реально действующие производственные системы обычно

сложнее. Так, в заготовительном цехе детали могут проходить последовательно ряд технологических цепочек с различным временным ритмом. Важно, что темпы движения по различным цепочкам различаются, их нельзя объединить в один конвейер, и на стыке различных технологических цепочек возникает необходимость в складировании деталей и узлов.

Популярная в настоящее время концепция «бережливого производства» основана на том, что излишние издержки следует исключать. Иногда эта исходная идея понимается излишне упрощенно, что может приводить к ошибочным практическим рекомендациям. Так, среди различных видов издержек, выделяют потери из-за лишних запасов. Иногда пытаются требовать минимизации запасов. На такую постановку наталкивает слово «лишние» в формулировке «потери из-за лишних запасов». Это - неверное требование. Надо сокращать не запасы, и связанные с ними издержки. Запасы не должны быть минимальными, запасы должны быть оптимальными. Теория управления запасами имеет целью нахождение оптимальных значений запасов [1]. Для этого необходимо минимизировать издержки, связанные с работой склада.

2. Теория управления запасами – часть логистики

Теория управления запасами – часть логистики, под которой понимают научную дисциплину, посвященную планированию, управлению и контролю движения материальных, информационных и финансовых ресурсов в различных производственно-экономических системах. Предметом логистики является комплексное управление всеми материальными и нематериальными потоками в таких системах. Логистическая система должна охватывать и согласовывать процессы производства, закупок и распределения продукции, а также быть основой при стратегическом планировании и прогнозировании. Итак, логистика –

это экономическая дисциплина, занимающаяся оптимальной организацией материальных, финансовых и информационных потоков [2 – 5]. Важное место занимает логистика в менеджменте высоких технологий, посвященном вопросам организации, экономики, управления, проектирования, эффективности, устойчивости интегрированных производственно-корпоративных структур [6, 7].

Одна из основных частей логистики – теория управления запасами. Сколько товара держать на складе? Много – будут омертвляться оборотные средства, вложенные в запас. Мало – слишком часто надо будет заниматься получением новых партий товара и нести соответствующие расходы. Значит, надо рассчитать и использовать оптимальный размер запаса. А для этого необходимо применить соответствующую математическую модель.

Управление запасами (другими словами, материально-техническое снабжение) – неотъемлемая часть работы фирм и организаций. Речь идет о запасах сырья, топлива, материалов, инструментов, комплектующих изделий, полуфабрикатов, готовой продукции на промышленном (или сельскохозяйственном) предприятии, о запасах товаров на оптовых базах, складах магазинов, на рабочих местах продавцов, наконец, у потребителей. Запасы постоянно расходуются и пополняются по тем или иным правилам, принятым на предприятии. Оптимизация этих правил, т.е. оптимальное управление запасами на основе математических моделей и методов, как показывает мировая практика, дает большой экономический эффект.

Математическая теория управления запасами, основанная на моделях движения товарных потоков, является развитой областью технических и экономико-математических исследований. Предложенная еще в 1915 г. Ф. Харрисом [8] классическая модель теории управления запасами является одним из наиболее простых и наглядных примеров применения математического аппарата для принятия решений в экономической

области. Эту модель часто называют моделью Вильсона (или Уилсона), так как она получила известность после публикации работы Р.Г. Вильсона в 1934 г. [9]. Будем использовать исторически более правильное название «модель Харриса – Вильсона». Продолжают быть актуальными классические монографии Дж. Букана и Э. Кенинсберга [10], Дж. Хедли и Т. Уайтина [11], Ф. Хэнсменна [12], работы Е.В. Булинской [13] и Ю.И. Рыжикова [14]. Исследования в области математической теории управления запасами активно ведутся и в настоящее время [15 – 19].

Отметим прикладное значение «принципа уравнивания погрешностей» [20, гл. 5]. В классической модели управления запасами Харриса – Вильсона необходимо учитывать три вида погрешностей – погрешность спроса, вызванную отклонением интенсивности спроса от константы, погрешность платы за хранение продукции на складе и погрешность платы за доставку новой партии. По статистическим данным об отпуске продукции можно оценить возможные отклонения интенсивности спроса, а затем найти рациональную точность определения платы за хранение и рациональную точность определения платы за доставку согласно принципу уравнивания погрешностей. Стремиться к более точному определению двух последних параметров нецелесообразно. Как следствие, нет необходимости выбирать между конкурирующими методиками их расчета, например, между методиками Центрального экономико-математического института и Института материально-технического снабжения.

3. Основные факты о модели управления запасами Харриса – Вильсона

Опишем модель. Пусть $y(t)$ – величина запаса некоторого товара на складе в момент времени t, $t \geq 0$. Дефицит не допускается, т.е. $y(t) \geq 0$ при всех t. Товар пользуется равномерным спросом с интенсивностью μ, т.е. за

интервала времени Δt со склада извлекается и поступает потребителям часть запаса величиной $\mu\Delta t$ В моменты времени $t_0 = 0$, t_1, t_2,… пополняется запас на складе – приходят поставки величиной Q_0, Q_1, Q_2,… соответственно.

Пусть s – плата за хранение единицы товара в течение единицы времени. Затраты за хранение в течение интервала времени $[0;T)$, где T – интервал планирования, пропорциональны (с коэффициентом пропорциональности s) площади под графиком уровня запаса на складе $y(t)$ и равны

$$s\int_0^T y(t)dt$$

Пусть g – плата за доставку одной партии товара, а $n = n(T)$ – количество поставок, пришедших в интервале времени $[0; T)$. Тогда суммарные издержки на доставку товара равны $gn(T)$. Следовательно, общие издержки (затраты, расходы) за время T равны сумме расходов на хранение и затрат на доставку, т.е.

$$F(T; y) = F(y(t), 0 \le t < T) = gn(T) + s\int_0^T y(t)dt.$$

Запись $F(T; y) = F(y(t), 0 \le t < T)$ означает, что общие издержки зависят от значений функции $y = y(t)$ при всех $0 \le t < T$. Символ y обозначает функцию как целое. Другими словами, область определения $F(T; y)$ при фиксированном T – не множество чисел, а множество функций.

Если задать моменты прихода поставок и величины партий, то будет полностью определена функция $y=y(t)$ при всех $0 \le t < T$. Верно и обратное – фиксация функции $y= y(t)$, $0 \le t < T$, полностью определяет моменты прихода поставок и величины партий. И то, и другое будем называть *планом* поставок или планом работы системы управления запасами. Для ее оптимизации необходимо выбрать моменты времени $t_0 = 0$, t_1, t_2, …

пополнения запаса на складе и размеры поставляемых партий товара Q_0, Q_1, Q_2, … так, чтобы минимизировать издержки $F(T; y)$ при фиксированном T.

Модель производственной ситуации (т.е. работы склада) описывается четырьмя параметрами - μ (интенсивность спроса), s (стоимость хранения единицы продукции в течение единицы времени), g (стоимость доставки партии товара), T (горизонт планирования). Поэтому и оптимальный план должен зависеть от этих четырёх параметров.

В работах [21; 22, разд. 8.4] задача минимизации $F(T; y)$ по y осуществляется в три этапа. На первом из них проводилась минимизация при условии фиксации моментов приходов поставок. На первом этапе было установлено, что оптимальный план следует искать среди тех планов, у которых все зубцы доходят до оси абсцисс, т.е. запасы равны 0 в момент доставок очередной партии, в том числе и в момент T окончания горизонта планирования. На втором этапе было зафиксировано число интервалов и было выяснено, что в оптимальном плане интервалы между поставками должны быть одинаковыми, т.е. оптимальный план задается функцией, график которой представляет собой последовательность n одинаковых треугольников с высотами Q и основаниями Q/μ при некотором объеме партии Q. На третьем этапе минимизируются издержки $F(T; y)$ как функции Q с целью выбора наилучшего числа поставок – натурального числа n. Подчеркнем, что минимизация проводится не по всем положительным Q, а по дискретному множеству

$$A = \left\{\frac{\mu T}{k}, k = 1, 2, \ldots\right\},$$

поскольку на интервале $[0, T)$ должно укладываться целое число оснований треугольников, каждое из которых равно Q/μ.

На третьем этапе удобнее минимизировать не общие издержки $F(T; y)$, а средние издержки (на единицу времени) $f(Q) = f(T, y) = F(T; y) / T$. Их можно выразить как функцию размера партии Q:

$$f(Q) = \frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2}.$$

Надо минимизировать функцию $f(Q)$ по Q по дискретному множеству A.

Минимум $f(Q)$ по всем положительным Q можно найти, приравняв 0 производную $f(Q)$ по Q. Минимум достигается в точке

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}.$$

Получена т.н. «формула квадратного корня».

Алгоритм построения оптимального плана таков.

1. Найти Q_0 по формуле квадратного корня.

2. Найти Q_1 и Q_2 из условия

$$Q_1 = \frac{\mu T}{n+1} < Q_0 \leq \frac{\mu T}{n} = Q_2.$$

(Таким образом, Q_1 – это элемент множества A, ближайший к Q_0 снизу, а Q_2 - элемент множества A, ближайший к Q_0 сверху.)

3. Рассчитать $f(Q)$ для $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$.

4. Наименьшее из двух чисел $f_1(Q_1)$ и $f_1(Q_2)$ является искомым минимумом, а то из чисел Q_1 и Q_2, на котором достигается минимум – решением задачи оптимизации. Обозначим его $Q_{opt} = Q_{opt}(\mu, s, g, T)$. Ясно, что Q_{opt} почти всегда отличается от Q_0.

Рассмотрим план поставок с размером партий Q_0 и графиком уровня запасов $y(t)$, достигающим 0 при приходе очередной поставки. Для него

$$\frac{\mu T}{Q_0} = \frac{sQ_0}{2} = \sqrt{\frac{\mu g s}{2}}.$$

Значение средних издержек (за целое число периодов) при использовании этого плана таково:

$$f(Q_0) = \frac{\mu T}{Q_0} + \frac{sQ_0}{2} = \sqrt{2\mu gs}.$$

Подробное рассмотрение свойств модели Харриса – Вильсона содержится в книгах [21; 22, разд. 8.4].

4. Распространенные догмы

Модель Харриса – Вильсона и аналогичные ей – важный класс математических моделей экономических процессов. Поэтому по этой тематике имеется большое число публикаций. К сожалению, во многих из них присутствуют ошибочные рассуждения, которые будем называть догмами.

«Формула квадратного корня» для определения оптимального размера заказа, полученная в модели Харриса – Вильсона, широко применяется на различных этапах производства и распределения продукции, она является оказывается практически полезной для принятия решений при управлении запасами, в частности, приносящей заметный экономический эффект [20, 23]. Однако, вопреки распространенному заблуждению, эта формула не дает возможности рассчитать оптимальный размер заказа (хотя и является необходимым этапом на пути его нахождения). Это выясняется при строгом экономико-математическом анализе модели Харриса – Вильсона, намеченном выше и подробно проведённом в статье [24].

Одна из наиболее распространенных догм – «догма квадратного корня», состоящая в использовании Q_0 вместо Q_{opt}. Ошибочность использования Q_0 видна хотя бы из того, что Q_0 зависит от трёх параметров, хотя в исходной формулировке задачи оптимизации имеется четыре параметра. Причина появления ошибки состоит в отсутствии строгой постановки задачи оптимизации, что приводит к игнорированию влияния на оптимальное значение интервала планирования.

Другая распространённая догма – требование отсутствия дефицита. Из неё вытекает третья догма – необходимость страхового запаса. Для разбора этих догм начнём с анализа обобщения классической модели Харриса – Вильсона, в которой допускается дефицит. В [21; 22, разд. 8.4] кратко рассмотрена система 36 моделей управления запасами, обобщающих модель Харриса – Вильсона. Среди них – модель с дефицитом.

5. Модель с дефицитом

Классическая модель управления запасами может быть обобщена в различных направлениях [21; 22, разд. 8.4]. Одно из наиболее естественных обобщений – введение в модель возможности дефицита. Однако в литературе о модели с дефицитом имеются лишь отдельные упоминания. Здесь мы впервые разбираем её подробно.

В рассматриваемой до сих пор модели Харриса – Вильсона предполагалось, что дефицит не допускается, т.е. некоторое количество товара на складе всегда есть. Но, может быть, выгоднее сэкономить на расходах по хранению запаса, допустив небольшой дефицит – потребность в товаре в некоторые интервалы времени может остаться неудовлетворенной?

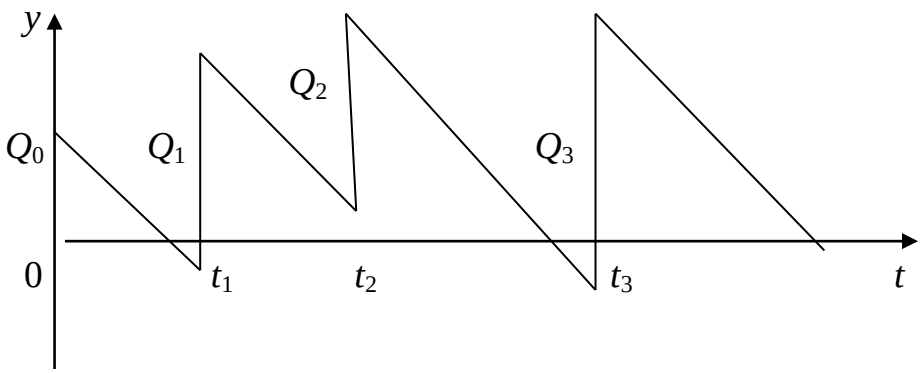


Рис. 1. График изменения величины запаса на складе при возможности дефицита

Необходимо учесть убытки от дефицита, в частности, связанные с потерей доверия потребителя. Будем считать, что если нет товара, то владеющая складом организация платит штраф – каждый день пропорционально нехватке в этот день. По приходе очередной поставки все накопленные требования сразу же удовлетворяются. Эти исходные положения модели с дефицитом представляются вполне естественным.

Сохраним все предположения и обозначения рассматриваемой до сих пор модели, кроме неотрицательности $y(t)$. Неудовлетворенный спрос будем рассматривать как отрицательный запас. График изменения величины запаса на складе изображен на рис. 1.

Пусть h – плата за нехватку единицы товара в единицу времени (например, в день). Тогда средние издержки за время T определяются формулой

$$f(T;y) = \frac{1}{T}\left\{ s\int_0^T y(t)\chi(y(t) \geq 0)dt + h\int_0^T y(t)\chi(y(t) < 0)dt + gn(T) \right\},$$

где $\chi(A)$ – индикатор множества A, т.е. $\chi(y(t) \geq 0) = 1$ при $y(t) \geq 0$ и $\chi(y(t) \geq 0) = 0$ при $y(t) < 0$, в то время как $\chi(y(t) < 0) = 1$ при $y(t) < 0$ и $\chi(y(t) < 0) = 0$ при $y(t) \geq 0$. Другими словами, площадь под частью графика уровня запаса, лежащей выше оси абсцисс, берется с множителем s, а площадь между осью абсцисс и частью графика $y(t)$, соответствующей отрицательным значениям запаса, берется с заметно большим по величине множителем h.

Для модели с дефицитом задачу минимизации $f(T; y)$ по y проведем в три этапа, во многом аналогичным этапам в модели Харриса - Вильсона.

6. Первый этап решения задачи минимизации затрат

На первом этапе фиксируем моменты поставок и находим при этом условии оптимальные размеры поставок. Задача минимизации средеих

издержек распадается на отдельные задачи для каждого интервала между последовательными поставками. Необходимо выбрать оптимальный уровень запаса Y в момент прихода очередной поставки (рис. 2).

Увеличивая или уменьшая Y, можно увеличивать или уменьшать площадь треугольника над осью абсцисс (учитываемую с коэффициентом s) и соответственно уменьшать или увеличивать площадь треугольника под осью абсцисс (учитываемую с коэффициентом h). Цель - добиться минимизации взвешенной суммы этих площадей. Все элементы прямоугольных треугольников на рис. 2 и взвешенная сумма их площадей выражаются через уровень Y на левом конце рассматриваемого отрезка, заданный интервал времени Δ между поставками и параметры модели (μ, s и h).

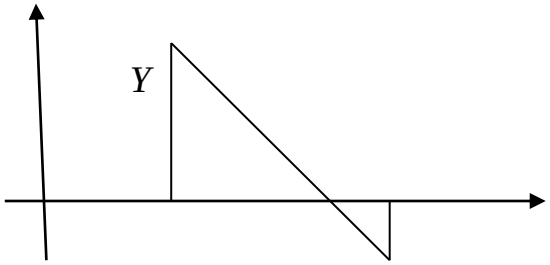


Рис. 2. Первый шаг построения оптимального плана в модели с дефицитом

У треугольника выше оси абсцисс высота равна Y. Этот запас расходуется за время Y/μ. Это и есть длина катета. Следовательно, площадь этого треугольника равна

$$\frac{Y^2}{2\mu}.$$

У треугольника ниже оси абсцисс длина катета равна Δ - Y/μ. За это время накапливается дефицит (неудотворённый спрос) в размере

$$\mu\left(\Delta - \frac{Y}{\mu}\right) = \mu\Delta - Y.$$

Это значение – высота рассматриваемого треугольника. Следовательно, его площадь равна

$$\frac{1}{2}\left(\Delta - \frac{Y}{\mu}\right)(\mu\Delta - Y) = \frac{1}{2\mu}(\mu\Delta - Y)^2.$$

Следовательно, за время Δ издержки, связанные с хранением и дефицитом, равна

$$g(Y) = \frac{sY^2}{2\mu} + \frac{h}{2\mu}(\mu\Delta - Y)^2.$$

Минимизация квадратного трехчлена $g(Y)$ дает оптимальное значение

$$Y = \frac{h}{s+h}\mu\Delta.$$

Подставляя это значение Y в формулу для $g(Y)$, получаем, что минимальная сумма затрат на хранение и издержек, вызванных дефицитом, за время Δ равна

$$\frac{\mu sh}{2(s+h)}\Delta^2.$$

7. Второй этап решения задачи минимизации затрат

На втором этапе решения задачи минимизации $f(T; y)$ по y фиксируем число поставок $n = n(T)$ и находим длины интервалов между поставками, минимизирующие сумму затрат на хранение и издержек, вызванных дефицитом, за весь интервал планирования [0, T).

Введем в рассмотрение длины интервалов между поставками

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, n(T),\ t_0 = 0,\ t_{n(T)} = T.$$

В соответствии с результатами, полученными на первом этапе решения задачи минимизации издержек на хранение и дефицит, следует минимизировать

$$\frac{1}{T}\left\{s\int_0^T y(t)\chi(y(t)\geq 0)dt + h\int_0^T y(t)\chi(y(t)<0)dt\right\} = \frac{\mu sh}{2T(s+h)}\sum_{i=1}^{n(T)}\Delta_i^2.$$

Здесь Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n = n(T)$, - неотрицательные числа, в сумме составляющие T. Следовательно, для успешного осуществления второго этапа минимизации достаточно решить вспомогательную задачу оптимизации:

$$\Delta_1^2 + \Delta_1^2 + \cdots + \Delta_n^2 \to min$$
$$\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n = 1,$$
$$\Delta_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n.$$

Вспомогательная задача оптимизации формально никак не связана с логистикой, она является чисто математической. Решить её можно разными способами. Один из наиболее элементарных таков. Введём новые переменные:

$$\alpha_i = \Delta_i - \frac{T}{n,}, i = 1,2,\ldots,n.$$

Тогда справедливо полезное для дальнейших выкладок равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta_i - \frac{T}{n}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\right) - n\frac{T}{n} = T - T = 0.$$

Поскольку по определению

$$\Delta_i = \frac{T}{n,} + \alpha_i, i = 1,2,\ldots,n,$$

то квадрат Δ_i таков:

$$\Delta_i^2 = \frac{T^2}{n^2} + 2\frac{T}{n}\alpha_i + \alpha_i^2,$$

следовательно, разложив рассматриваемую сумму квадратов на три суммы, соответствующие слагаемым в последней формуле, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2 = n\frac{T^2}{n^2} + 2\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = \frac{T^2}{n} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2,$$

поскольку средняя сумма из трёх равна 0, как установлено выше.

Сумма квадратов достигает минимума, равного 0, когда все переменные равны 0, т.е. при $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Тогда

$$\Delta_i = \frac{T}{n}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

При этих значениях Δ_i выполнены все ограничения вспомогательной задачи оптимизации. Итак, установлено, что все интервалы между поставками должны быть одинаковы.

Таким образом, оптимальным планом является план, у которого все зубцы одинаковы, т.е. уровень запаса в момент прихода очередной поставки – всегда один и тот же. При этом все объемы поставок, за исключением начальной (т.е. при $t_0 = 0$), равны между собой:

$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_{n(T)-1} = Q = \frac{\mu T}{n},$$

в то время как

$$Q_0 = y(0) = \frac{h}{s+h} Q.$$

Для такого плана издержки по хранению и дефициту равны

$$\frac{\mu s h}{2(s+h)} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \frac{\mu s h}{2(s+h)} \frac{T^2}{n}.$$

С учётом платы за доставку средние издержки (на единицу времени) таковы:

$$f(T; y) = \frac{1}{T}\left\{ gn(T) + \frac{\mu s h T^2}{2(s+h)n(T)} \right\} = g\frac{n(T)}{T} + \frac{\mu s h}{2(s+h)} \frac{T}{n(T)}.$$

8. Третий этап решения задачи минимизации затрат

Итак, минимизация средних издержек – это задача дискретной оптимизации. На третьем этапе построения оптимального плана необходимо найти натуральное число $n = n(T)$ – самое выгодное число поставок.

Общий объём поставок за весь интервал планирования [0, T) равен μT, т.е. объему отпущенного за это время продукта (считаем, что в момент 0 приходит поставка того же объема, что и в другие моменты доставок), следовательно, объем одной поставки равен $Q = \mu T / n$. Выразим средние издержки через переменную Q. Необходимо решить целочисленную задачу оптимизации

$$W(Q) = \frac{\mu g}{Q} + \frac{sh}{2(s+h)} Q \rightarrow min$$

при условии, что $Q = \mu T / n$ при некотором натуральном n. Ограничение можно записать так:

$$Q \in \left\{ \mu T, \frac{\mu T}{2}, \frac{\mu T}{3}, \frac{\mu T}{4}, \ldots \right\}$$

На третьем этапе среди указанного однопараметрического дискретного множества планов, определяемых объемом единичной поставки Q из указанного множества, находим оптимальный план.

Начинаем с минимизации функции $W(Q)$ по всем положительным Q. Как известно из курса дифференциального и интегрального исчислений, в точке минимума производная равна 0. Надо решить уравнение

$$\frac{dW(Q)}{dQ} = -\frac{\mu g}{Q^2} + \frac{sh}{2(s+h)} = 0.$$

Решением является

$$Q_1 = Q_1(\mu, g, s, h) = \sqrt{\frac{2\mu g(s+h)}{sh}}$$

Это и есть «формула квадратного корня» для модели с дефицитом.

Как и для модели без дефицита (Харриса – Вильсона), первым шагом алгоритма построения оптимального плана является расчёт по формуле квадратного корня значения $Q_1(\mu, g, s, h)$.

Для горизонтов планирования T, кратных $Q_1(\mu, g, s, h)/\mu$, оптимальным является план с $Q = Q_1(\mu, g, s, h)$. Для всех остальных

горизонтов планирования, как и в случае модели без дефицита, необходимо найти неотрицательное целое число n такое, что

$$Q_1 = \frac{\mu T}{n+1} < Q_1(\mu, g, s, h) \leq \frac{\mu T}{n} = Q_2,$$

а затем, сравнив средние издержки $W(Q)$ для $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$, выбрать из этих значений то, для которого издержки меньше. Обозначим его $Q_{1opt}(\mu, g, s, h, T)$.

Оптимальным планом в модели с дефицитом является план, у которого все зубцы одинаковы, т.е. объем поставки – всегда один и тот же, а именно, $Q_{1opt}(\mu, g, s, h, T)$.

9. Дальнейшее развитие моделей управления запасами

В некоторых ситуациях длина интервала планирования T задана. Так бывает, когда поставки предназначены для обеспечения некоторого мероприятия, продолжительность которого запланирована заранее. Например, для доставки топлива (из топливного отсека в двигательный) при разгоне корабля в течение заданного времени, например, 15 суток. Или для обеспечения деятельности Олимпийской деревни в течение спортивного мероприятия заданной длительности.

Однако гораздо чаще обосновать выбор длины интервала планирования затруднительно, если не брать за основу условные календарные даты, т.е., например, год или месяц. Поэтому представляет интерес ситуация при больших длины интервала планирования T, в математических терминах – при $T \to \infty$.

Установлено [21; 22, разд. 8.4], что в модели Харриса-Вильсона план с фиксированными объемами поставок $Q = Q_0(\mu, g, s)$ (в предположении, что в момент прихода очередной поставки уровень запаса на складе равен 0) является асимптотически оптимальным, т.е. отношение издержек в нём за весь интервал планирования $[0, T)$ к издержкам в оптимальных планах с

$Q = Q_{opt} = Q_{opt}(\mu, s, g, T)$ всегда не менее 1 и стремится к 1 при $T \to \infty$. Аналогичное утверждение справедливо и в модели с дефицитом. Для неё план с фиксированными объемами поставок, определяемыми по формуле квадратного корня, $Q = Q_1(\mu, g, s, h)$, и начальным уровнем запаса

$$Q = y(0) = \frac{h}{s+h} Q_1(\mu, g, s, h),$$

является асимптотически оптимальным, т.е. отношения издержек в нём за весь интервал планирования $[0, T)$ к издержкам в оптимальных планах с $Q = = Q_{1opt}(\mu, g, s, h, T)$ всегда не менее 1 и стремится к 1 при $T \to \infty$. Теории асимптотически оптимальных планов в общем случае посвящена статья [25].

Таким образом, «формулы квадратного корня» дают не оптимальные (за исключением счетного множества значений T), а асимптотически оптимальные планы. Как часто в математических методах исследованиях, переход к асимптотике позволяет, убрав бесконечно малые величины, получить более продвинутые результаты. Речь идёт о переходе от оптимальных планам к планам, полученным по «формулам квадратного корня».

Для таких планов в [21; 22, разд. 8.4] оценены погрешности, возникающие при использовании планов с одинаковыми объемами поставок $Q = Q_0(\mu, g, s) + \Delta Q$, отличающимися от оптимальных. Оказалось, что при малых отклонениях ΔQ средние издержки возрастают весьма мало, а именно, на величину, пропорциональную $(\Delta Q)^2$. Это утверждение верно и для модели с дефицитом.

Действительно, согласно разложению Тейлора-Маклорена для любой гладкой функции $g(x)$, достигающей минимума при $x = x_0$, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка (по сравнению с $(x - x_0)^2$) справедливо равенство

$$g(x) - g(x_0) = \frac{1}{2}\frac{d^2 g(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2.$$

Это соотношение показывает, что приращение значений минимизируемой функции – бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с приращением независимой переменной.

Поскольку для средних издержек $W(Q)$ в модели с дефицитом

$$\frac{d^2 W(Q)}{dG^2} = \frac{d}{dQ}\left(-\frac{\mu g}{Q^2} + \frac{sh}{2(s+h)}\right) = \frac{2\mu g}{Q^3},$$

то

$$\Delta W = W(Q_1 + \Delta Q) - W(Q_1) = \frac{\mu g}{Q_{1,}^3}(\Delta Q)^2.$$

С помощью равносильных преобразований легко получить, что

$$\frac{2\mu g}{Q_1} = W(Q_1).$$

Следовательно, как и в модели Харриса – Вильсона, для приращений средних издержек в оптимальном плане справедлива оценка (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка)

$$\frac{W(Q_1 + \Delta Q) - W(Q_1)}{W(Q_1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q - Q_1}{Q_1}\right)^2.$$

В начале статьи отмечалось, что в классической модели управления запасами Харриса – Вильсона необходимо учитывать три вида погрешностей – погрешность спроса, вызванную отклонением $\Delta\mu$ интенсивности спроса от константы, погрешность платы за хранение продукции на складе Δs и погрешность платы за доставку новой партии Δg. В модели с дефицитом добавляется четвёртый вид погрешностей, вызванных возможными отклонениями Δh платы за дефицит.

Влияние погрешностей параметров на средние издержки проявляется через их влияние на объём оптимальной поставки Q_1. Выделим главный линейный член в изменении этого объёма

$$\Delta Q_1 = Q_1(\mu+\Delta\mu, g+\Delta g, s+\Delta s, h+\Delta h) - Q_1(\mu, g, s, h).$$

Имеем

$$\Delta Q_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial \mu}\Delta\mu + \frac{\partial Q_1}{\partial g}\Delta g + \frac{\partial Q_1}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial Q_1}{\partial h}\Delta h$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка.

Вычислим частные производные. Имеем:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \mu} = \sqrt{\frac{g(s+h)}{2\mu sh}}, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial g} = \sqrt{\frac{\mu(s+h)}{2gsh}},$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial s} = -\sqrt{\frac{\mu gsh}{2(s+h)}}\frac{1}{s^2}, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial h} = -\sqrt{\frac{\mu gsh}{2(s+h)}}\frac{1}{h^2}.$$

Согласно «принципу уравнивания погрешностей» [20] вклад погрешностей различной природы в общую погрешность должен быть одинаков (по абсолютной величине), т.е. должны быть справедливы равенства

$$\sqrt{\frac{g(s+h)}{2\mu sh}}\Delta\mu = \sqrt{\frac{\mu(s+h)}{2gsh}}\Delta g = \sqrt{\frac{\mu gsh}{2(s+h)}}\frac{1}{s^2}\,\Delta s = \sqrt{\frac{\mu gsh}{2(s+h)}}\frac{1}{h^2}\Delta h.$$

Поделив на

$$\sqrt{\frac{\mu g(s+h)}{2sh}},$$

преобразуем последнее равенство к виду

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\Delta g}{g} = \frac{h}{s+h}\frac{\Delta s}{s} = \frac{s}{s+h}\frac{\Delta h}{h}.$$

Здесь, как и в модели Харриса – Вильсона, первую дробь можно оценить по данным склада по отпуску продукции, а остальные равенства использовать для определения необходимой точности расчётов других параметров модели (g, s, h), используя их предварительные оценки.

10. Сравнение модели с дефицитом с моделью Харриса-Вильсона

Поскольку

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2\mu g(s+h)}{sh}} = Q_0\sqrt{\frac{s+h}{h}},$$

то при больших длинах интервалах планирования T (т.е. тогда, когда можно применять приведённые формулы) объём разовой поставки Q_1 в модели с дефицитом больше объёма разовой поставки Q_0 в модели Харриса – Вильсона.

Минимальные средние издержки в модели Харриса – Вильсона (т.е. при использовании плана с $Q = Q_0$) равны $\sqrt{2\mu gs}$, а в модели с дефицитом (при использовании плана с $Q = Q_1$) такие издержки равны

$$W(Q_1) = \frac{\mu g}{Q_1} + \frac{sh}{2(s+h)}Q_1.$$

Подставим в эту сумму Q_1, получим

$$\frac{\mu g}{Q_1} = \sqrt{\frac{\mu gsh}{2(s+h)}}, \frac{sh}{2(s+h)}Q_1 = \sqrt{\frac{\mu gsh}{2(s+h)}}, W(Q_1) = \sqrt{\frac{2\mu gsh}{(s+h)}}.$$

Таким образом, в модели с дефицитом по сравнению с моделью Харриса-Вильсона издержки меньше в

$$\sqrt{1+\frac{s}{h}}$$

раз.

В модели Харриса-Вильсона минимальный объем запаса на складе равен 0, а максимальный объем есть

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}.$$

В модели с дефицитом максимальный объём равен

$$\frac{h}{s+h}Q_1(\mu, g, s, h) = Q_0\sqrt{\frac{h}{s+h}}.$$

Таким образом, он меньше, чем в модели Харриса – Вильсона. При этом максимальный дефицит (т.е. запас со знаком «минус») равен

$$\frac{s}{s+h}Q_1(\mu, g, s, h) = \sqrt{\frac{2\mu g s}{(s+h)h}} = Q_0\frac{s}{\sqrt{(s+h)h}}.$$

Правая часть последнего равенства при росте h имеет порядок $1 / h$.

Из сказанного ясно, что модель Харриса – Вильсона является предельным случаем для модели с дефицитом при безграничном возрастании платы за дефицит, поскольку при этом предельном переходе все рассмотренные выше характеристики модели с дефицитом стремятся к соответствующим характеристикам модели Харриса – Вильсона. Можно сказать, что модель Харриса – Вильсона является частным случаем модели с дефицитом при бесконечной плате за дефицит, т.е. при $h = +\infty$.

11. Двухуровневая модель управления запасами

Догма о недопустимости дефицита могла возникнуть, возможно, из-за того, что в модели Харриса-Вильсона уровень запасами на базе всегда неотрицателен. Поэтому полезно привести пример модели, в которой не может возникнуть подобная догма.

Двухуровневая модель управления запасами – это однопродуктовая модель работы склада, в которой заявки потребителей удовлетворяются мгновенно. При отсутствии продукта заявки учитываются и накапливаются. Как только запас на складе опускается до уровня $R < 0$ (другими словами, дефицит достигает значения $(-R)$), мгновенно поступает партия товара величиной Q и запас на складе оказывается равным $R + Q > 0$. Как и в рассмотренном выше обобщении модели Харриса - Вильсона на случай модели с дефицитом, издержки складываются из издержек по хранению, издержек от дефицита и издержек по доставке. Средние издержки за время T задаются той же формулой, что и для рассмотренной выше модели с дефицитом. Параметры модели s, h, g имеют тот же смысл,

что и выше. Оптимизация состоит в определении значений нижнего уровня R и верхнего уровня $R+Q$, минимизирующих средние издержки.

Двухуровневую модель управления запасами (известную также, как (R, Q) - модель, (S, s) – модель (здесь символ s имеют иной смысл, чем выше и чем далее) или система «минимум-максимум») впервые предложили и математически описали американские ученые Кеннет Эрроу (будущий лауреат Нобелевской премии по экономике), Теодор Харрис и Якоб Маршак [26]. В работах Г. Скарфа 1960 г. было установлено, что политика типа (S, s) (т.е. применение двухуровневой модели управления запасами) является оптимальной для динамических систем снабжения при наличии фиксированных транзакционных издержек [27, 28]. Проще говоря, оптимальная политика управления запасами – это политика, основанная на двухуровневой модели. Этот принципиально важный теоретический результат стимулировал развитие исследований свойств двухуровневой модели, продолжающихся вплоть до настоящего времени (см.. например, работы [20, 29. 30]).

Важными являются характеристики потока заявок. Пусть $\tau(T)$ – число заявок за время T. Эта величина предполагается случайной. С прикладной точки зрения вполне естественно предположить, что её математическое ожидание $M\tau(T)$ конечно. Накопленный спрос за время T имеет вид

$$X(T) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{\tau(T)},$$

где X_j – величина j-ой заявки. Предполагается, что X_1, X_2, … , X_n, … - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием MX_1. Таким образом, накопленный спрос за время T является суммой случайного числа случайных слагаемых. Накопленный спрос определяет уровень запаса на складе, поэтому математический аппарат изучения двухуровневой модели – это предельная теория сумм случайного числа случайных слагаемых.

При некоторых условиях регулярности (выполняющихся для реальных систем управления запасами) в [20, 31] найдены оптимальные (для горизонта планирования T) значения нижнего и верхнего уровней:

$$R_0(T) = -\sqrt{\frac{2gsM\tau(T)MX_1}{Th(s+h)}},$$

$$Q_0(T) = \sqrt{\frac{2g(s+h)M\tau(T)MX_1}{Tsh}}.$$

Таким образом, уровень запаса на складе в течение некоторых случайных интервалов времени является отрицательным, т.е. наблюдается дефицит.

12. Страховой запас не нужен

В литературе встречаются рекомендации об использовании страхового запаса в рамках модели Харриса – Вильсона. Исходят из того, что эта модель предполагает поставку товаров точно в срок и игнорирует риски. По мнению составителей таких рекомендаций, добавление страхового (гарантийного) запаса защищает компанию от дефицита товара при задержках поставок или резком росте спроса. Их базовое утверждение: в условиях нестабильности спроса или работы поставщиков на момент прихода новой партии на складе должен оставаться неприкосновенный минимум. При этом уровень запаса на складе увеличивается на величину страхового запаса.

Эта величина рассчитывается на основе той или модели отклонений спроса от равномерного. Например, полагают, что отклонение спроса за каждый конкретный день – случайная величина, все такие случайные величины независимы и одинаково распределены, отклонение к моменту прихода очередной поставки – сумма таких случайных величин. Более того, предполагают, что распределение этих случайных величин – нормальное. Между тем известно, что распределения реальных величин,

как правило, не являются нормальными [32]. Предположения о независимости и одинаковой распределённости отклонений спроса также вызывает сомнения. По крайней мере, при резком росте спроса они вряд ли выполнены.

Рекомендации об использовании страхового запаса основаны на механическом соединении двух независимых моделей - исходной модели Харриса – Вильсона и модели страхового запаса, успешно используемой в ряде задач техники, экономики и управления. Они приводят к повышению издержек, вызванному необходимостью хранения на складе страхового запаса. Эти рекомендации исходят из догмы недопустимости дефицита. Если отказаться от этой догмы, то издержки можно сократить. В модели с дефицитом, подробно рассмотренной выше, издержки меньше, чем в модели Харриса – Вильсона.

Вместе с тем ясна целесообразность рассмотрения спроса, отличающего от равномерного. В рассмотренной выше двухуровневой модели управления запасами накопленный спрос за время T является суммой случайного числа случайных слагаемых. Эта модель более адекватно отражает управление запасами при случайном спросе, чем модель страхового запаса.

В данном разделе статьи показано, что использование страхового запаса нецелесообразно. Вместо введения страхового запаса следует использовать модель с дефицитом и двухуровневую модель управления запасами.

13. Заключение

В данной статье представлены основные факты о классической модели управления запасами Харриса - Вильсона. Выявлена роль интервала планирования в оптимизационной задаче, предназначенной для установления величины партии поставки. Обсуждаются распространенные

догмы – использование «формулы квадратного корня» вместо решения оптимизационной задачи, требование отсутствия дефицита, необходимости страхового запаса.

Впервые разработана модель с дефицитом. Подробно разобраны три этапа решения задачи минимизации затрат. Рассмотрено дальнейшее развитие моделей управления запасами, прежде всего асимптотическая оптимальность планов, соответствующих «формулам квадратного корня». Установлено, что при малых отклонениях объемов поставок от оптимальных средние издержки возрастают весьма мало. На основе «принципа уравнивания погрешностей» разработан метод определения необходимой точности расчётов параметров модели.

Проведено сравнение характеристик модели с дефицитом и модели Харриса-Вильсона. Установлено преимущество модели с дефицитом, проявляющееся в уменьшении средних издержек. Констатируется, что модель Харриса - Вильсона является предельным случаем модели с дефицитом при безграничном росте платы за дефицит.

Кратко рассмотрена двухуровневая модель управления запасами, в которой накопленный за определенное время спрос является суммой случайного числа случайных слагаемых. Приведены оптимальные значения параметров модели, установлено, что уровень запаса на складе в течение некоторых случайных интервалов времени должен быть отрицательным.

Показано, что использование страхового запаса в модели Харриса – Вильсона нецелесообразно.

Рассмотренные в данной работе математические модели успешно используются не только при управлении запасами. Так, модель оптимизации моментов выпуска новых моделей продукции на рынок [33] с математической точки зрения эквивалентна модели с дефицитом. В выпускных квалификационных работах бакалавров кафедры «Экономика и

организация производства» (2026 г.) модели типа Харриса - Вильсона использовались, например, для расчёта объема производственных партий при оптимизации выпуска косметической продукции (Р.Э. Бастрон), для расчёта экономически обоснованного размера партии запуска, при котором минимизируются суммарные затраты на переналадки и промывки оборудования, хранение готовой продукции и использование оборотных средств на предприятии ООО «Барьер», специализирующемся на выпуске дерматологических средств индивидуальной защиты кожи работников (А.И. Сивохина).

Применение математических моделей управления запасами приносит значительный экономический эффект. Необходимо дальнейшее изучение математических моделей управления запасами, в частности, в области оценивания точности асимптотических выводов сравнительно с допредельными результатами.

Литература

1. Орлов А.И. Бережливое производство: оптимизация запасов и управление качеством // Научный журнал КубГАУ. 2022. №184. С. 164–177.

2. Сковронек Ч., Сариуш-Вольский З. Логистика на предприятии. — М.: Финансы и статистика, 2004. – 396 с.

3. Лайсонс К., Джилингем М. Управление закупочной деятельностью и цепью поставок. – М.: Инфра-М, 2005. – 798 с.

4. Дыбская В. В. Логистика складирования. – М.: ИНФРА-М, 2011. - 559 с.

5. Колобов А.А., Омельченко И.Н. Основы промышленной логистики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 116 с.

6. Проектирование интегрированных производственно-корпоративных структур: эффективность, организация, управление / Колобов А.А., Омельченко И.Н., Орлов А.И. и др. / Под ред. А.А. Колобова, А.И. Орлова. Научное издание. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. — 728 с.

7. Колобов А.А., Омельченко И.Н., Орлов А.И. Менеджмент высоких технологий. Интегрированные производственно-корпоративные структуры: организация, экономика, управление, проектирование, эффективность, устойчивость. — М.: Экзамен, 2008. — 621 с.

8. Harris F. W. Operations and Costs. – Chicago: A.W. Shaw Company, 1915. – 230 p.

9. Wilson R. H. A scientific routine for stock control // Harvard Business Rev. 1934. V.13. N 1. P. 116-128.

10. Букан Дж., Кенигсберг Э. Научное управление запасами. — М.: Наука, 1967. — 424 с.

11. Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. — М.: Наука, 1969. — 510 с.

12. Хэнсменн Ф. Применение математических методов в управлении производством и запасами. — М.: Прогресс, 1966. — 280 с.

13. Булинская Е.В. Стационарное решение в задачах оптимального управления запасами // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т.9. № 3. С.556 - 560.

14. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. — СПб.: Питер, 2001. — 384 с.

15. Калинин Н.М., Хоботов Е.Н. Модели управления многопродуктовыми запасами при постоянном спросе // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 156-169.

16. Хоботов Е.Н. Методы решения задач управления многопродуктовыми запасами при случайном спросе // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2011. № 2. С. 62-73.

17. Хоботов Е.Н. Применение кусочно-линейной аппроксимации функций расхода для построения методов управления запасами // Проблемы управления. 2011. № 6. С. 38-46.

18. Хоботов Е.Н. Управление многономенклатурными запасами с учетом производства продукции // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2011. № 2. С. 109-127.

19. Бродецкий Г.Л. Новый формат формулы Харриса-Уилсона: учет временной ценности денег и аренды мест хранения // Логистика сегодня. 2013. № 4. С. 242-251.

20. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. – М.: Наука, 1979. – 296 с.

21. Орлов А.И. Оптимальные методы в экономике и управлении. Учебное пособие по курсу «Организационно-экономическое моделирование». — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. — 44 с.

22. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование : учебник : в 3 ч. Ч.3. Статистические методы анализа данных. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. - 624 с.

23. Смольников Р. В. Практическое применение математических моделей управления запасами // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. Т.74. № 3. С.64-69.

24. Орлов А. И. Оптимальный план управления запасами нельзя найти на основе формулы квадратного корня // Научный журнал КубГАУ. 2015. № 106. С. 270–300.

25. Орлов А.И. Существование асимптотически оптимальных планов в дискретных задачах динамического программирования // Научный журнал КубГАУ. 2020. №155. С. 147–163.

26. Arrow K.J., Harris T., Marschak J. Optimal Inventory Policy // Econometrica. 1951. Vol.19. N 3. P. 250–272.

27. Scarf H. The Optimality of (S, s) Policies for the Dynamic Inventory Problem // Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959: Proceedings of the First Stanford Symposium / ed. by K. J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes. - Stanford: Stanford University Press, 1960. P. 196–202.

28. Clark A.J., Scarf H. Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem // Management Science. 1960. Vol. 6, № 4. P. 475–490.

29. Кулакова Ю.Н. Двухуровневый подход к управлению запасами предприятия // Экономический анализ: теория и практика. 2023. № 11 (314). С. 59-66.

30. Булгакова И.Н., Свиридова С.Ю. Исследование особенностей организации и контроля двухуровневых систем управления запасами при вариативности спроса // Цифровые модели и решения. 2025. Т. 4. № 3. С. 29-42.

31. Орлов А.И. Асимптотика квантования, выбор числа градаций в социологических анкетах и двухуровневая модель управления запасами // Научный журнал КубГАУ. 2016. № 123. С. 660 – 687.

32. Орлов А.И. Распределения реальных статистических данных не являются нормальными // Научный журнал КубГАУ. 2016. № 117. С. 71-90.

33. Орлов А.И. Модель оптимизации моментов выпуска новых моделей продукции на рынок // Научный журнал КубГАУ. 2014. №102. С. 64–77.

References

1. Orlov A.I. Berezhlivoe proizvodstvo: optimizaciya zapasov i upravlenie kachestvom // Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2022. №184. S. 164–177.

2. Skovronek CH., Sariush-Vol'skij Z. Logistika na predpriyatii. — M.: Finansy i statistika, 2004. – 396 s.

3. Lajsons K., Dzhilingem M. Upravlenie zakupochnoj deyatel'nost'yu i cep'yu postavok. – M.: Infra-M, 2005. – 798 s.

4. Dybskaya V. V. Logistika skladirovaniya. – M.: INFRA-M, 2011. - 559 s.

5. Kolobov A.A., Omel'chenko I.N. Osnovy promyshlennoj logistiki. – M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 1998. – 116 s.

6. Proektirovanie integrirovannyh proizvodstvenno-korporativnyh struktur: effektivnost', organizaciya, upravlenie / Kolobov A.A., Omel'chenko I.N., Orlov A.I. i dr. / Pod red. A.A. Kolobova, A.I. Orlova. Nauchnoe izdanie. — M.: Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2006. — 728 s.

7. Kolobov A.A., Omel'chenko I.N., Orlov A.I. Menedzhment vysokih tekhnologij. Integrirovannye proizvodstvenno-korporativnye struktury: organizaciya, ekonomika, upravlenie, proektirovanie, effektivnost', ustojchivost'. — M.: Ekzamen, 2008. — 621 s.

8. Harris F. W. Operations and Costs. – Chicago: A.W. Shaw Company, 1915. – 230 p.

9. Wilson R. H. A scientific routine for stock control // Harvard Business Rev. 1934. V.13. N 1. P. 116-128.

10. Bukan Dzh., Kenigsberg E. Nauchnoe upravlenie zapasami. — M.: Nauka, 1967. — 424 s.

11. Hedli Dzh., Uajtin T. Analiz sistem upravleniya zapasami. — M.: Nauka, 1969. — 510 s.

12. Hensmenn F. Primenenie matematicheskih metodov v upravlenii proizvodstvom i zapasami. — M.: Progress, 1966. — 280 s.

13. Bulinskaya E.V. Stacionarnoe reshenie v zadachah optimal'nogo upravleniya zapasami // Teoriya veroyatnostej i ee primeneniya. 1964. T.9. № 3. S.556 - 560.

14. Ryzhikov YU.I. Teoriya ocheredej i upravlenie zapasami. — SPb.: Piter, 2001. — 384 s.

15. Kalinin N.M., Hobotov E.N. Modeli upravleniya mnogoproduktovymi zapasami pri postoyannom sprose // Avtomatika i telemekhanika. 2008. № 9. S. 156-169.

16. Hobotov E.N. Metody resheniya zadach upravleniya mnogoproduktovymi zapasami pri sluchajnom sprose // Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya. 2011. № 2. S. 62-73.

17. Hobotov E.N. Primenenie kusochno-linejnoj approksimacii funkcij raskhoda dlya postroeniya metodov upravleniya zapasami // Problemy upravleniya. 2011. № 6. S. 38-46.

18. Hobotov E.N. Upravlenie mnogonomenklaturnymi zapasami s uchetom proizvodstva produkcii // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya: Mashinostroenie. 2011. № 2. S. 109-127.

19. Brodeckij G.L. Novyj format formuly Harrisa-Uilsona: uchet vremennoj cennosti deneg i arendy mest hraneniya // Logistika segodnya. 2013. № 4. S. 242-251.

20. Orlov A.I. Ustojchivost' v social'no-ekonomicheskih modelyah. – M.: Nauka, 1979. – 296 s.

21. Orlov A.I. Optimal'nye metody v ekonomike i upravlenii. Uchebnoe posobie po kursu «Organizacionno-ekonomicheskoe modelirovanie». — M.: Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2007. — 44 s.

22. Orlov A.I. Organizacionno-ekonomicheskoe modelirovanie : uchebnik : v 3 ch. CH.3. Statisticheskie metody analiza dannyh. - M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2012. - 624 s.

23. Smol'nikov R. V. Prakticheskoe primenenie matematicheskih modelej upravleniya zapasami // Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov. 2008. T.74. № 3. S.64-69.

24. Orlov A. I. Optimal'nyj plan upravleniya zapasami nel'zya najti na osnove formuly kvadratnogo kornya // Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2015. № 106. S. 270–300.

25. Orlov A.I. Sushchestvovanie asimptoticheski optimal'nyh planov v diskretnyh zadachah dinamicheskogo programmirovaniya // Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2020. №155. S. 147–163.

26. Arrow K.J., Harris T., Marschak J. Optimal Inventory Policy // Econometrica, 1951. Vol.19. N 3. P. 250–272.

27. Scarf H. The Optimality of (S, s) Policies for the Dynamic Inventory Problem // Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959: Proceedings of the First Stanford Symposium / ed. by K. J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes. - Stanford : Stanford University Press, 1960. P. 196–202.

28. Clark A.J., Scarf H. Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem // Management Science. 1960. Vol. 6, № 4. P. 475–490.

29. Kulakova YU.N. Dvuhurovnevyj podhod k upravleniyu zapasami predpriyatiya // Ekonomicheskij analiz: teoriya i praktika. 2023. № 11 (314). S. 59-66.

30. Bulgakova I.N., Sviridova S.YU. Issledovanie osobennostej organizacii i kontrolya dvuhurovnevyh sistem upravleniya zapasami pri variativnosti sprosa // Cifrovye modeli i resheniya. 2025. T. 4. № 3. S. 29-42.

31. Orlov A.I. Asimptotika kvantovaniya, vybor chisla gradacij v sociologicheskih anketah i dvuhurovnevaya model' upravleniya zapasami // Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2016. № 123. S. 660 – 687.

32. Orlov A.I. Raspredeleniya real'nyh statisticheskih dannyh ne yavlyayutsya normal'nymi // Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2016. № 117, S. 71-90.

33. Orlov A.I. Model' optimizacii momentov vypuska novyh modelej produkcii na rynok // Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2014. №102. S. 64–77.