УДК 630:583

5.2.2 Математические, статистические и инструментальные методы в экономике

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ПРОЕКТЫ МНОГОФАКТОРНЫХ ТОВАРНЫХ ТАБЛИЦ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЕСОУПРАВЛЕНИЯ В ИНТЕРЕСАХ СУБЪЕКТОВ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Вариводина И.Н.
канд. техн. наук, доцент, ведущий научный сотрудник отдела лесной генетики и биотехнологии
*ФГБУ «Всероссийский научно-исследовательский институт лесной генетики, селекции и биотехнологии» Воронеж, Российская Федерация*

Орнатский А.Н.
канд. биол. наук, заместитель директора
*ФГБУ «Всероссийский научно-исследовательский институт лесной генетики, селекции и биотехнологии» Воронеж, Российская Федерация*

Гудкова К.А.
младший научный сотрудник отдела лесной генетики и биотехнологии
*ФГБУ «Всероссийский научно-исследовательский институт лесной генетики, селекции и биотехнологии» Воронеж, Российская Федерация*

Внукова Н.И.
научный сотрудник отдела лесной генетики и биотехнологии
*ФГБУ «Всероссийский научно-исследовательский институт лесной генетики, селекции и биотехнологии» Воронеж, Российская Федерация*

Разработана универсальная система многофакторных математических моделей для прогнозирования сортиментной структуры древостоев дуба и сосны с обеспечением свойства аддитивности сортиментов. Показано, что разработанная система является эффективным и биологически обоснованным инструментом, в частности, комбинация степенной функции Шумахера — Холла для базисных объемов и функции Херля для оценки доли целевых сортиментов решает проблему экстраполяции данных на перестойные и крупномерные древостои. Определено, что полученная расчетная

UDC 630:583

5.2.2 Mathematical, statistical and instrumental methods in economics

# MATHEMATICAL MODELS AND PROJECTS OF MULTIFACTORIAL COMMODITY TABLES TO IMPROVE THE SUSTAINABILITY OF FOREST MANAGEMENT IN THE INTERESTS OF ECONOMIC ENTITIES

Varivodina I.N.
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher at the Department of Forest Genetics and Biotechnology
*Federal State Budgetary Institution "All-Russian Research Institute of Forest Genetics, Breeding and Biotechnology", Voronezh, Russian Federation*

Ornatsky A.N.
Candidate of Biological Sciences, Deputy Director
*Federal State Budgetary Institution "All-Russian Research Institute of Forest Genetics, Breeding and Biotechnology", Voronezh, Russian Federation*

Gudkova K.A.
Junior Researcher at the Department of Forest Genetics and Biotechnology
*Federal State Budgetary Institution "All-Russian Research Institute of Forest Genetics, Breeding and Biotechnology", Voronezh, Russian Federation*

Vnukova N.I.
Researcher at the Department of Forest Genetics and Biotechnology
*Federal State Budgetary Institution "All-Russian Research Institute of Forest Genetics, Breeding and Biotechnology", Voronezh, Russian Federation*

A universal system of multifactorial mathematical models has been developed for predicting the product structure of oak and pine stands, ensuring the additivity property of the products. It has been shown that the developed system is an effective and biologically grounded tool; in particular, the combination of the Schumacher–Hall power function for basic volumes and the Herl function for estimating the share of target products solves the problem of extrapolating data to overmature and large-sized stands. It has been determined that the resulting calculation matrix can serve as a regulatory basis for certification and material assessment, using forest

матрица может служить нормативной базой для паспортизации и материальной оценки на примере лесных насаждений

stands as an example

Ключевые слова: МНОГОФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, МАТРИЦА, СОРТИМЕНТНАЯ ТАБЛИЦА, ТОВАРНОСТЬ, КЛАСС ТОВАРНОСТИ, ДУБ, СОСНА

Keywords: MULTIFACETED MODEL, STATISTICAL METHODS, MATRIX, RANKING TABLE, MERCHANDISE VALUE, MERCHANDISE VALUE CLASS, OAK, PINE

http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-222-006

В связи с цифровизацией лесного комплекса Российской Федерации (Федеральная государственная информационная система лесного комплекса (ФГИС ЛК), Государственная инвентаризация лесов (ГИЛ) задача повышения точности таксации лесных экосистем при заготовке древесины и оценке причиненного ущерба при воздействии на экосистемы природных и антропогенных факторов становится все более актуальной. Сегодня необходима актуализация существующих и разработка новых нормативов по следующим показателям: увеличение диапазонов максимальных таксационных диаметров в сортиментных таблицах, увеличение диапазонов средних диаметров и высот в товарных таблицах для лесостепного района центральной части РФ, применения нормативов таксации сортиментной и товарной структуры. Сортиментные таблицы востребованы арендаторами лесных участков, товарные таблицы – для прогнозных расчетов и проверки материалов перечислительной таксации, для отвода и таксации лесных участков. Точность таких нормативов во многом зависит от научного подхода к их построению, использования различных данных, в том числе пробных площадей различного назначения, материалов государственной инвентаризации лесов.

Научная значимость исследований заключается в использовании кроме классических, также новых подходов к товаризации древостоев с использованием многофакторных моделей, данных государственной инвентаризации лесов, в использовании данных государственной

инвентаризации лесов для моделирования закономерных связей товарности, сортности сортиментов, разработке новых форматов представления нормативов товарности в виде многофакторных товарных таблиц.

Разработанные нормативы сортиментной и товарной структуры будут являться основой для повышения точности оценки товарности насаждений и определения оптимального размера лесопользования. Результаты НИР могут использоваться органами исполнительной власти субъектов Российской Федерации, уполномоченных в области лесных отношений, для принятия эффективных управленческих решений, а также предприятиями лесопромышленного комплекса при заготовке, транспортировке и переработке древесины. Практическое применение новых нормативов позволит повысить точность оценки сортиментной и товарной структуры насаждений, сократить производственные расходы на заготовку древесины, улучшить нормативную базу лесохозяйственных мероприятий.

## 1 Материалы исследования

Исходным нормативным материалом для разработки многофакторных моделей сортиментной структуры послужили действующие сортиментные таблицы для древостоев дуба черешчатого и сосны обыкновенной, приведённые в сводном нормативно-справочном документе по теме, а также сопряжённые с ними шкалы разрядов высот [1].

Каждая исходная таблица представляет собой двухблочную матрицу: блок деловых стволов (категории крупности деловой древесины, конкретные сортименты, технологическое сырьё, дрова и отходы) и блок дровяных стволов (технологическое сырьё, дрова, отходы). Строка

таблицы соответствует сочетанию «разряд высот × ступень толщины». Характеристика исходных материалов приведена в таблице 1.

Таблица 1 – Характеристика исходных сортиментных таблиц

| Показатель | Дуб черешчатый | Сосна обыкновенная |
|---|---|---|
| Исходная таблица | 1.2.6 | 1.2.2 |
| Разряды высот | Ia, I, II, III, IV, V (6) | Iб, Ia, I, II, III, IV, V, Va (8) |
| Диапазон ступеней толщины, см | 8-116 | 8-80 |
| Верхняя ступень по разрядам, см | Ia – 116; I – 108; II – 96; III – 76; IV – 68; V – 60 | от 80 (высшие разряды) до 44 (Va) |

Разряды высот в исходных таблицах заданы дискретно, шаг ступеней толщины составляет 4 см в области тонкомерных и 4-8 см в области крупномерных деревьев, что и определило необходимость построения непрерывных моделей.

Таблицы были оцифрованы в табличный формат с сохранением структуры «разряд – ступень – показатель». Оцифровка выполнялась программным разбором исходного документа, после чего каждая ячейка полученного массива сопоставлялась с ячейкой источника. Такая сплошная сверка позволила выявить как ошибки оцифровки, так и опечатки самого источника.

Верифицированные массивы сохранены в виде файлов с фиксированной структурой и служат единственным источником данных для всех последующих расчётов, что обеспечивает воспроизводимость результатов.

Обработка данных, построение моделей и формирование итоговых таблиц выполнены на языке Python 3 с использованием библиотек NumPy (матричные вычисления, метод наименьших квадратов), Pandas (работа с таблицами) и openpyxl (формирование выходных файлов). Параллельно составлен скрипт на языке *R*, реализующий ту же вычислительную схему и предназначенный для независимой проверки расчётов. Трёхмерная

визуализация построенных поверхностей выполнена средствами библиотеки plotly.

Все расчёты организованы от верифицированного массива исходных данных до итоговых таблиц в формате электронных таблиц, без промежуточного ручного редактирования. Повторный запуск воспроизводит все опубликованные значения.

**При разработке методики построения сортиментных таблиц п**ринята трёхуровневая схема моделирования, в которой каждый последующий уровень опирается на результат предыдущего:

1) моделирование высоты ствола по разряду высот как непрерывной функции ступени толщины;

2) моделирование базисного объёма ствола в коре как функции диаметра и высоты;

3) моделирование всех остальных показателей таблицы как долей от базисного объёма (объёма ствола либо итога деловой древесины) с последующей нормировкой долей внутри групп.

Принципиальное отличие принятой схемы от распространённого подхода состоит в том, что объёмы отдельных сортиментов не моделируются независимыми уравнениями. Независимое моделирование даёт формально высокие показатели точности по каждому сортименту в отдельности, но не обеспечивает сходимости столбцов таблицы: сумма объёмов сортиментов не совпадает с итогом деловой древесины, а сумма фракций – с объёмом ствола. Для нормативного документа такое расхождение недопустимо, поэтому расчёт построен на долевом принципе с обязательной нормировкой.

Для каждого разряда высот построена собственная логарифмическая кривая высот:

$$H = a + b \cdot \ln(D), \quad (1)$$

где $H$ – высота ствола, м; $D$ – ступень толщины (диаметр на высоте 1,3 м), см; $a$, $b$ – параметры уравнения, определяемые для каждого разряда отдельно методом наименьших квадратов.

Коэффициент детерминации кривых высот составил 0,89-0,96 для дуба и 0,92-0,997 для сосны. Кривые высот обеспечивают переход от дискретной шкалы разрядов к непрерывному расчёту и используются далее, как входной параметр объёмных и долевых моделей.

Объём ствола в коре описан классическим аллометрическим уравнением Шумахера – Холла, связывающим объём с диаметром и высотой:

$$V = a \cdot D^b \cdot H^c, \quad (2)$$

где $V$ – объём ствола в коре, м³; $a$, $b$, $c$ – эмпирические коэффициенты.

Параметризация выполнена методом наименьших квадратов после логарифмической линеаризации уравнения:

$$\ln V = \ln a + b \cdot \ln D + c \cdot \ln H. \quad (3)$$

Логарифмирование одновременно решает задачу устранения гетероскедастичности: в исходном пространстве дисперсия остатков резко возрастает у крупномерных деревьев, тогда как в логарифмическом пространстве она стабильна, и вклад тонкомерных и крупномерных ступеней в оценку параметров становится сопоставимым. Уравнение (2) построено единым для всех разрядов высот, поскольку разряд входит в него неявно – через высоту. Коэффициент детерминации составил 0,998 для дуба и 0,996 для сосны при средней абсолютной ошибке 0,123 и 0,078 м³ соответственно.

Выход отдельных сортиментов не является монотонной функцией диаметра: каждый сортимент появляется на определённой ступени толщины, достигает максимума и затем вытесняется более ценными или более крупными сортиментами. Степенная функция такую динамику

воспроизвести не может – при экстраполяции она даёт неограниченный рост там, где в действительности наблюдается спад.

Поэтому доля каждого показателя в соответствующей базе описана обобщённой многофакторной функцией Хёрля, в которую дополнительно введена высота ствола как самостоятельный фактор:

$$\ln p = a_0 + b \cdot \ln D + c \cdot D + d \cdot \ln H, \quad (4)$$

где $p$ – доля показателя в базе группы, доли единицы (безразмерная величина); $D$ – ступень толщины (диаметр на высоте груди), см; H – высота ствола, м; $a_0 = \ln a$ – свободный член логарифмической формы уравнения, безразмерный; $b$ – показатель степени при диаметре, безразмерный; характеризует скорость вступления дерева в размерную фазу, пригодную для заготовки данного сортимента; $c$ – экспоненциальный параметр затухания, $см^{-1}$; определяет интенсивность вытеснения сортимента другими фракциями по мере утолщения ствола; d – показатель степени при высоте, безразмерный;

Все логарифмы натуральные. Аргументы логарифмов приведены к безразмерному виду отнесением к единичным значениям соответствующих размерностей (1 см для диаметра, 1 м для высоты).

Для сортиментов с выраженным куполообразным распределением, полностью исчезающих внутри диапазона исходных данных, допускалась расширенная форма уравнения с дополнительным квадратичным членом по логарифму диаметра:

$$\ln p = a_0 + b \cdot \ln D + c \cdot D + d \cdot \ln H + e \cdot (\ln D)^2. \quad (5)$$

Выбор между формами (4) и (5) выполнялся по приросту коэффициента детерминации, рассчитанного в кубометрах: расширенная форма принималась только при приросте не менее 0,03. Форма с дополнительным членом по квадрату диаметра также была проверена и отвергнута: она даёт более высокий формальный показатель точности, но

её коэффициенты выходят на порядки, непригодные для нормативного документа, а расчёт по ним численно неустойчив.

Существенным методическим ограничением является запрет на использование расширенной формы для «сквозных» сортиментов – тех, которые присутствуют до последней ступени исходной таблицы и, следовательно, подлежат экстраполяции. Дополнительные члены уравнения повышают точность внутри диапазона данных, но резко ухудшают поведение модели за его пределами. Для таких сортиментов принята только консервативная форма (4).

В таблице коэффициентов приводится свободный член логарифмической формы $a_0$, а не множитель $a$. Это вынужденная мера: для ряда сортиментов множитель имеет порядок $10^{-150}$ и ниже, его невозможно ни воспроизвести в печатном виде, ни использовать в расчёте без потери точности. Коэффициенты следует применять с приведённым числом значащих цифр – округление до трёх-четырёх знаков даёт заметную погрешность.

Показатели сортиментной таблицы связаны между собой балансовыми тождествами. Для их выполнения все показатели разделены на четыре группы, внутри каждой из которых доли нормируются к единице и только затем умножаются на базу:

$$p_i^* = p_i / \Sigma p_j, \quad V_i = p_i^* \cdot B, \tag{6}$$

где $p_i$ – доля, рассчитанная по уравнению (4) или (5); $p_i^*$ – нормированная доля; $B$ – база группы; $V_i$ – объём показателя, м³.

При такой схеме равенство суммы объёмов группы её базе выполняется тождественно, а не приближённо. Состав групп приведён в таблице 2.

Таблица 2 – Группы нормировки и балансовые тождества

| Группа | Состав | База (тождество) |
|---|---|---|
| 1 | Итого деловой древесины, технологическое сырьё, дрова топливные, отходы | Объём ствола в коре |
| 2 | Крупная, средняя-1, средняя-2, мелкая | Итого деловой древесины |
| 3 | Деловые сортименты (для дуба – 8, для сосны – 5 наименований) | Итого деловой древесины |
| 4 | Дровяные стволы: технологическое сырьё, дрова, отходы | Объём ствола в коре |

Фактическое максимальное отклонение в итоговых таблицах не превышает 0,0002 м³, что соответствует округлению до третьего знака.

Для подтверждения того, что указанное отклонение имеет исключительно природу округления, выполнен анализ его распределения по ступеням толщины. Абсолютная величина отклонения не зависит от ступени толщины и во всём диапазоне не превышает 0,0002 м³, то есть половины единицы последнего удерживаемого разряда. Коэффициент корреляции отклонения со ступенью толщины составляет −0,03 для дуба и −0,06 для сосны, что свидетельствует об отсутствии систематического дрейфа.

Таблица 3 – Распределение балансового отклонения по ступеням

| Ступени толщины, см | Максимальное отклонение, м³ | Средний объём ствола, м³ | Отклонение, % от объёма |
|---|---|---|---|
| Дуб: 6-20 | 0,0001 | 0,124 | 0,081 |
| Дуб: 22-40 | 0,0002 | 0,834 | 0,024 |
| Дуб: 42-60 | 0,0002 | 2,508 | 0,008 |
| Дуб: 62-80 | 0,0001 | 5,221 | 0,002 |
| Дуб: 82-110 | 0,0002 | 10,229 | 0,002 |
| Дуб: 112-160 | 0,0001 | 22,148 | 0,0005 |
| Сосна: 6-20 | 0,0001 | 0,126 | 0,079 |
| Сосна: 22-40 | 0,0002 | 0,831 | 0,024 |
| Сосна: 42-60 | 0,0001 | 2,460 | 0,004 |

| Ступени толщины, см | Максимальное отклонение, м³ | Средний объём ствола, м³ | Отклонение, % от объёма |
|---|---|---|---|
| Сосна: 62-80 | 0,0002 | 5,061 | 0,004 |
| Сосна: 82-110 | 0,0001 | 9,571 | 0,001 |

Распределение знаков симметрично: по дубу 308 положительных отклонений против 300 отрицательных, по сосне – 248 против 245; в 19 % строк по дубу и в 25 % по сосне балансовые тождества выполняются точно. Относительная величина отклонения монотонно убывает с ростом ступени толщины – с 0,08 % на тонкомерных ступенях до 0,0005 % на крупномерных, то есть более чем в сто раз.

Совокупность перечисленных признаков – постоянство абсолютной величины, отсутствие корреляции со ступенью толщины, симметрия знаков и убывание относительной доли – характерна именно для ошибки округления и исключает систематическую погрешность расчётной схемы.

Отдельно решён случай начальных ступеней толщины. Ниже ступени, на которой появляется первый сортимент группы, все доли обнуляются интервалами существования, и сумма долей обратилась бы в нуль. В этом случае весь объём группы относится к фракции, появляющейся раньше остальных (мелкая деловая древесина, рудстойка), что сохраняет аддитивность на ступени 6 см.

Для каждого сортимента задан интервал существования $[D_{min}; D_{max}]$, за пределами которого расчётный объём принимается равным нулю. Нижняя граница соответствует ступени, начиная с которой сортимент встречается в исходной таблице. Определение верхней границы выполнено раздельно для двух категорий сортиментов:

– «исчезающие» – сортименты, выход которых прекращается внутри диапазона исходных данных (шпальные и обозостроительные кряжи,

столбы, рудстойка, средние категории крупности). Для них верхняя граница принята по фактическим данным;

– «сквозные» – сортименты, присутствующие до последней ступени исходной таблицы (фанерные, пиловочные, клепочные кряжи, кряжи для фризы, крупная деловая древесина). Для них граница продлевается до конца расчётной сетки.

Введение верхней границы принципиально: без неё модели «исчезающих» сортиментов при экстраполяции продолжают давать положительные значения на диаметрах, где эти сортименты в действительности не заготавливаются, что искажает всю структуру таблицы у крупномерных деревьев.

Итоговые таблицы рассчитаны с постоянным шагом ступеней толщины 2 см: для дуба – от 6 до 160 см (78 ступеней на разряд, 468 строк), для сосны – от 6 до 108 см (52 ступени на разряд, 416 строк).

Каждая строка снабжена признаком достоверности. Строки, попадающие в диапазон исходной таблицы соответствующего разряда, отмечены как расчётные; строки за его пределами – как экстраполяция. По дубу экстраполяцией получено 218 строк из 468, по сосне – 168 из 416. Эти значения математически корректны и биологически непротиворечивы, однако опираются на продолжение выявленных закономерностей, а не на измерения, и при использовании требуют соответствующей оговорки. Наиболее протяжённой является экстраполяция для низших разрядов высот, где исходные данные заканчиваются на существенно меньших ступенях толщины.

Границы расчётной и экстраполяционной частей различаются по разрядам высот, поскольку исходные сортиментные таблицы оборваны на разных ступенях толщины: для высших разрядов данные доведены до крупномерных ступеней, для низших заканчиваются существенно раньше.

Таблица 4 – Границы расчётной части и объём экстраполяции

| Разряд | Последняя ступень исходной таблицы, см | Рассчитано до, см | Кратность расширения | Строк экстраполяции | Доля, % |
|---|---|---|---|---|---|
| Дуб: Ia | 116 | 160 | 1,38 | 22 из 78 | 28 |
| Дуб: I | 108 | 160 | 1,48 | 26 из 78 | 33 |
| Дуб: II | 96 | 160 | 1,67 | 32 из 78 | 41 |
| Дуб: III | 76 | 160 | 2,11 | 42 из 78 | 54 |
| Дуб: IV | 68 | 160 | 2,35 | 46 из 78 | 59 |
| Дуб: V | 60 | 160 | 2,67 | 50 из 78 | 64 |
| Сосна: Iб–II | 80 | 108 | 1,35 | 14 из 52 | 27 |
| Сосна: III | 72 | 108 | 1,50 | 18 из 52 | 35 |
| Сосна: IV | 60 | 108 | 1,80 | 24 из 52 | 46 |
| Сосна: V | 44 | 108 | 2,45 | 32 из 52 | 62 |
| Сосна: Va | 32 | 108 | 3,38 | 38 из 52 | 73 |

Суммарно экстраполяцией получено 218 строк из 468 по дубу (47%) и 168 из 416 по сосне (40%). Распределение этой доли по разрядам крайне неравномерно. Для высших разрядов расширение составляет 1,3-1,5 диапазона исходных данных, и экстраполированная часть опирается на хорошо обеспеченный данными участок кривых. Для низших разрядов расширение достигает 2,67 (дуб, разряд V) и 3,38 (сосна, разряд Va), то есть модель работает на диаметрах, втрое превышающих крайнюю ступень исходной таблицы.

Границы применимости. Для высших разрядов (Ia-II у дуба, Iб-II у сосны) экстраполированные значения следует рассматривать как рабочие. Для низших разрядов (III-V у дуба, III-Va у сосны) значения на ступенях, превышающих последнюю ступень исходной таблицы более чем вдвое, носят ориентировочный характер и подлежат уточнению по мере

накопления данных по крупномерным древостоям низших классов бонитета.

Точность оценивалась не в пространстве долей и не в логарифмическом пространстве, где показатели закономерно завышены, а в кубометрах – на фактических значениях исходной таблицы, после нормировки долей, то есть для итоговой расчётной схемы целиком. Рассчитывались коэффициент детерминации по всей таблице, коэффициент детерминации внутри интервала существования сортимента и средняя абсолютная ошибка. Для мелких фракций определяющей является именно абсолютная ошибка: при малых средних объёмах коэффициент детерминации теряет информативность.

Обобщённые показатели точности приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Точность итоговых моделей (в кубометрах, после нормировки)

| **Группа показателей** | **Дуб: $R^2$** | **Дуб: сред. абс. ошибка, $м^3$** | **Сосна: $R^2$** | **Сосна: сред. абс. ошибка, $м^3$** |
|---|---|---|---|---|
| Высота ствола | 0,954 | 1,41 м | 0,975 | 1,11 м |
| Объём ствола в коре | 0,998 | 0,123 | 0,996 | 0,078 |
| Итого деловой древесины | 0,997 | 0,116 | 0,997 | 0,058 |
| Крупная деловая древесина | 0,997 | 0,122 | 0,996 | 0,082 |
| Основные деловые сортименты | 0,880-0,984 | 0,003-0,106 | 0,875-0,997 | 0,004-0,049 |
| Технологическое сырьё, дрова, отходы | 0,817-0,998 | 0,017-0,069 | 0,779-0,998 | 0,008-0,032 |
| Средние и мелкие категории крупности | 0,780-0,870 | 0,003-0,021 | 0,302-0,774 | 0,010-0,068 |

Наиболее слабыми являются модели средних и мелкой категорий крупности. Для корректной интерпретации приведённых показателей существенно, что коэффициент детерминации рассчитывался в двух пространствах. Значение «по всей таблице» включает строки за пределами интервала существования сортимента, где модель по построению даёт 0 и

совпадает с исходными данными точно; эти строки завышают показатель. Значение «в интервале существования» рассчитано только по тем ступеням толщины, на которых категория реально присутствует, и является более строгим.

В строгой метрике модель средней-2 сосны объясняющей силой не обладает: коэффициент детерминации составляет −0,038. Доля этой категории в итоге деловой древесины изменяется от 5 до 69% без выраженной зависимости от диаметра и высоты. Причина имеет содержательный характер и заключена в природе самих категорий крупности: принадлежность отрезка ствола к категории определяется диаметром в верхнем отрезе, который зависит от диаметра и высоты совместно и меняется ступенчато. Так, доля средней-1 у сосны на трёх смежных ступенях толщины принимает значения 40, 65 и 43%. Непрерывная гладкая функция такую ступенчатость воспроизвести не может, это свойство исходных нормативов и не является недостатком применённого метода.

Сохранение указанных моделей в составе норматива обосновано двумя факторами. Во-первых, абсолютная величина ошибки мала в сопоставлении с объёмом ствола: 0,03-0,20% для дуба и 0,25-1,63% для сосны. Во-вторых, категории крупности нормируются к итогу деловой древесины, коэффициент детерминации которого составляет 0,997 при средней абсолютной ошибке 0,116 м³ для дуба и 0,058 м³ для сосны. Вследствие нормировки погрешность моделей отдельных категорий не уменьшает и не увеличивает общий объём деловой древесины, а лишь перераспределяется между категориями внутри группы; балансовое тождество выполняется с точностью 0,0001 м³. Для материальной оценки лесосек, где определяющим является суммарный выход деловой древесины, такая погрешность несущественна; при разделении деловой

древесины по категориям крупности результат для средних категорий следует рассматривать как ориентировочный.

**Методика построения товарных таблиц**

Товарная таблица характеризует не отдельное дерево, а древостой: она распределяет общий запас на деловую древесину по категориям крупности и сортиментам, технологическое сырьё, дрова и отходы в процентах от запаса [2]. Входными характеристиками служат средний диаметр древостоя, его высотная характеристика (разряд высот либо средняя высота) и класс товарности.

Переход от сортиментных моделей к товарным таблицам выполнен свёрткой сортиментных моделей по ряду распределения числа стволов по ступеням толщины. Такой подход обеспечивает полную согласованность двух видов нормативов: товарная таблица получается из тех же уравнений, что и сортиментная, и не требует независимой параметризации.

Использован обобщённый ряд распределения числа стволов А. В. Тюрина, заданный по естественным ступеням толщины – долям от среднего диаметра древостоя в интервале 0,5-1,7 с шагом 0,1: 0,7; 3,5; 9,5; 16,1; 18,4; 18,1; 13,1; 8,9; 6,3; 3,3; 1,5; 0,5; 0,1 %. Существенно, что процентное распределение числа стволов по естественным ступеням толщины не зависит ни от породы, ни от класса бонитета, ни от полноты древостоя, что и позволяет применять единый ряд для дуба и сосны.

Для совмещения ряда с расчётной сеткой сортиментных таблиц выполнен переход от естественных ступеней к абсолютным. По ряду построена кумулятивная функция распределения, после чего для каждой абсолютной ступени толщины шириной 2 см вычислено приращение кумуляты между её границами:

$$w_k = F((d_k + 1)/D_{ср}) - F((d_k - 1)/D_{ср}), \quad (7)$$

где $w_k$ – доля числа стволов, приходящаяся на ступень $d_k$; $F$ – кумулята обобщённого ряда; $D_{ср}$ – средний диаметр древостоя, см.

Полученные доли нормируются так, что их сумма по всем ступеням равна 100,00 %.

Промежуточные веса выведены в итоговые файлы отдельным листом «Распределение стволов», что позволяет проверить расчёт вручную. Так, при среднем диаметре 32 см древостой охватывает ступени от 14 до 56 см, максимум распределения приходится на ступени 28-32 см (по 11,3-11,4 % числа стволов).

Вариант свёртки непосредственно по естественным ступеням также был просчитан; он даёт практически те же результаты (расхождение 0,01-0,21 процентного пункта), однако расчёт по абсолютным ступеням нагляднее и соответствует классической процедуре построения товарных таблиц.

Запас среднего ствола древостоя определяется как взвешенная сумма объёмов стволов по ступеням толщины:

$$M = \Sigma\, w_k \cdot V(d_k, h_k), \qquad (8)$$

где $V(d_k, h_k)$ – объём ствола ступени $d_k$ при соответствующей ей высоте $h_k$, рассчитанный по уравнению (2).

Выход каждого сортимента вычисляется аналогично – взвешенным суммированием объёмов, рассчитанных по долевым моделям, с последующим отнесением к общему запасу:

$$P_i = 100 \cdot \Sigma\, w_k \cdot v_i(d_k, h_k) \,/\, M, \qquad (9)$$

где $P_i$ – выход $i$-го сортимента, % от запаса; $v_i$ – объём $i$-го сортимента на ступени $d_k$, м³.

Класс товарности определяет соотношение деловых и дровяных стволов в древостое. Приняты нормативы отнесения насаждений к классам товарности, установленные Лесоустроительной инструкцией (таблица 6): для лиственных пород (дуб) – четыре класса, для хвойных (сосна) – три. Доля деловых стволов в расчёте принята как середина нормативного диапазона по количеству деловых стволов [3].

Таблица 6 – Нормативы классов товарности

| Класс товарности | Хвойные: выход деловой по запасу, % | Хвойные: доля деловых стволов, % | Лиственные: выход деловой по запасу, % | Лиственные: доля деловых стволов, % |
|---|---|---|---|---|
| I | 81 и выше | 91 и выше | 71 и выше | 91 и выше |
| II | 61-80 | 71-90 | 51-70 | 66-90 |
| III | до 60 | до 70 | 31-50 | 41-65 |
| IV | – | – | до 30 | до 40 |

Деловые стволы дают сортименты по «деловому» блоку сортиментной таблицы, дровяные целиком относятся к блоку дровяных стволов. Именно на этом этапе два блока сортиментной таблицы соединяются в единый расчёт.

Товарные таблицы сформированы в двух вариантах. Разрядный вариант является классическим: входными параметрами служат разряд высот и средний диаметр древостоя; высоты ступеней берутся из соответствующих кривых высот. Многофакторный вариант позволяет задавать среднюю высоту древостоя непрерывно, без привязки к дискретному разряду; высоты отдельных ступеней в этом случае рассчитываются по соотношению

$$h(d) = H_{ср} + b \cdot \ln(d / D_{ср}), \quad (10)$$

где $h(d)$ – высота ствола ступени толщины $d$, м; $d$ – ступень толщины, см; $D_{ср}$ – средний диаметр древостоя, см; $H_{ср}$ – средняя высота древостоя, м; $b$ – средний наклон кривых высот по разрядам, м (7,775 для дуба и 8,019 для сосны). Отношение $d$ / $D_{ср}$ безразмерно, вследствие чего коэффициент $b$ имеет размерность высоты.

Объём выполненных расчётов: для дуба – 648 строк разрядного варианта (6 разрядов × 27 значений среднего диаметра от 12 до 64 см × 4 класса товарности) и 1728 строк многофакторного варианта (16 значений

средней высоты от 10 до 40 м × 27 значений среднего диаметра × 4 класса товарности); для сосны – соответственно 600 и 1200 строк при трёх классах товарности и среднем диаметре от 12 до 60 см.

Достоверность полученных товарных таблиц подтверждена тремя независимыми проверками.

Балансовая проверка. Сумма выходов «деловая древесина + технологическое сырьё + дрова + отходы» по всем строкам обеих таблиц равна 100,00 % с точностью 0,01 процентного пункта.

Проверка на согласие с нормативом. Расчётный выход деловой древесины сопоставлен с нормативным диапазоном соответствующего класса товарности: совпадение получено в 89-91 % строк. Все несовпадения относятся к *I* классу товарности при малых средних диаметрах: при среднем диаметре ниже 24-28 см выход деловой древесины физически не достигает нормативного порога *I* класса, поскольку тонкомерные древостои не могут дать требуемого выхода независимо от качества стволов.

Сопоставление двух вариантов. Разрядный и многофакторный варианты, построенные на разных способах задания высот, дают расхождение по выходу деловой древесины не более 0,47 процентного пункта для дуба и 0,11 – для сосны.

Дополнительным косвенным подтверждением моделей высот служит сопоставление рассчитанных относительных высот по естественным ступеням толщины (0,79-1,16) с опубликованными значениями (0,80-1,15): совпадение получено без какой-либо подгонки.

При построении нормативов приняты следующие допущения, которые следует учитывать при их применении [4].

1. Строки таблиц, отмеченные как экстраполяция получены за пределами диапазона исходных данных и опираются на продолжение выявленных закономерностей.

2. Ряд распределения числа стволов принят обобщённым. Это единственный элемент расчёта, опирающийся на внешний норматив, а не на исходные таблицы. При наличии региональных рядов распределения по данным государственной инвентаризации лесов или пробных площадей Центрально-Чернозёмного региона расчёт может быть повторён с их использованием без изменения методики.

3. Доля деловых стволов внутри класса товарности принята одинаковой для всех ступеней толщины, тогда как в действительности она возрастает с увеличением диаметра. Уточнение возможно при наличии рядов распределения деловых, полуделовых и дровяных стволов по естественным ступеням толщины.

4. Модели средних категорий крупности (в первую очередь по сосне) обладают пониженной объясняющей способностью; при нормативном использовании эти столбцы требуют отдельной оговорки либо получения по остатку баланса группы.

**Полученные результаты расчётов**

При расчетах был введен жесткий контроль биологического минимума ($D_{min}$): объем сортимента принимался равным нулю, если расчетный диаметр был меньше минимального диаметра появления данной фракции в эмпирической базе. Для осуществления непрерывной экстраполяции до 160 см по диаметру, для каждого дискретного разряда высот (от Ia до V) были построены индивидуальные логарифмические кривые высот вида:

$$H = a_h + b_h \times \ln(D)$$

Применение уравнения Шумахера-Холла для общих объемов ствола и деловой древесины показало исключительно высокую точность аппроксимации [5-7]. Коэффициент детерминации ($R^2$) для общего объема ствола составил более 0.99, а для деловой древесины – 0.98.

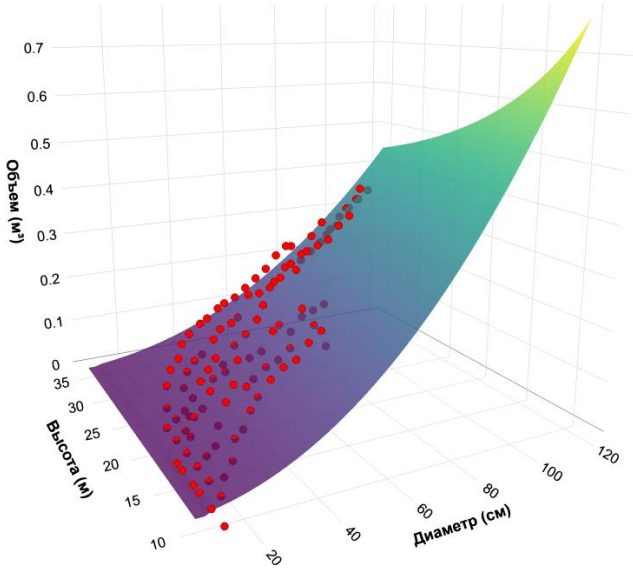



**Рис. 1.** Многофакторная математическая модель объемов древесины дуба: общий объем деловой древесины

При моделировании сортиментной структуры сосны обыкновенной методом нелинейной регрессии исходным материалом послужили сортиментные таблицы сосны обыкновенной (*Pinus sylvestris* L.), охватывающие 8 разрядов высот (Iб-Va) и ступени толщины 8-80 см с шагом 4 см. Для каждой ступени учитывали объём ствола в коре, выход деловой древесины по категориям крупности (крупная, средняя-1, средняя-2, мелкая), качественные сортименты (пиловочник, шпальник, строительные брёвна, балансы, рудстойка), технологическое сырьё, дрова и отходы. Абсолютные объёмы аппроксимировали моделью Шумахера-Холла; структуру сортиментов – долевыми моделями Хёрля, где p – доля сортимента от итогового объёма деловой древесины.

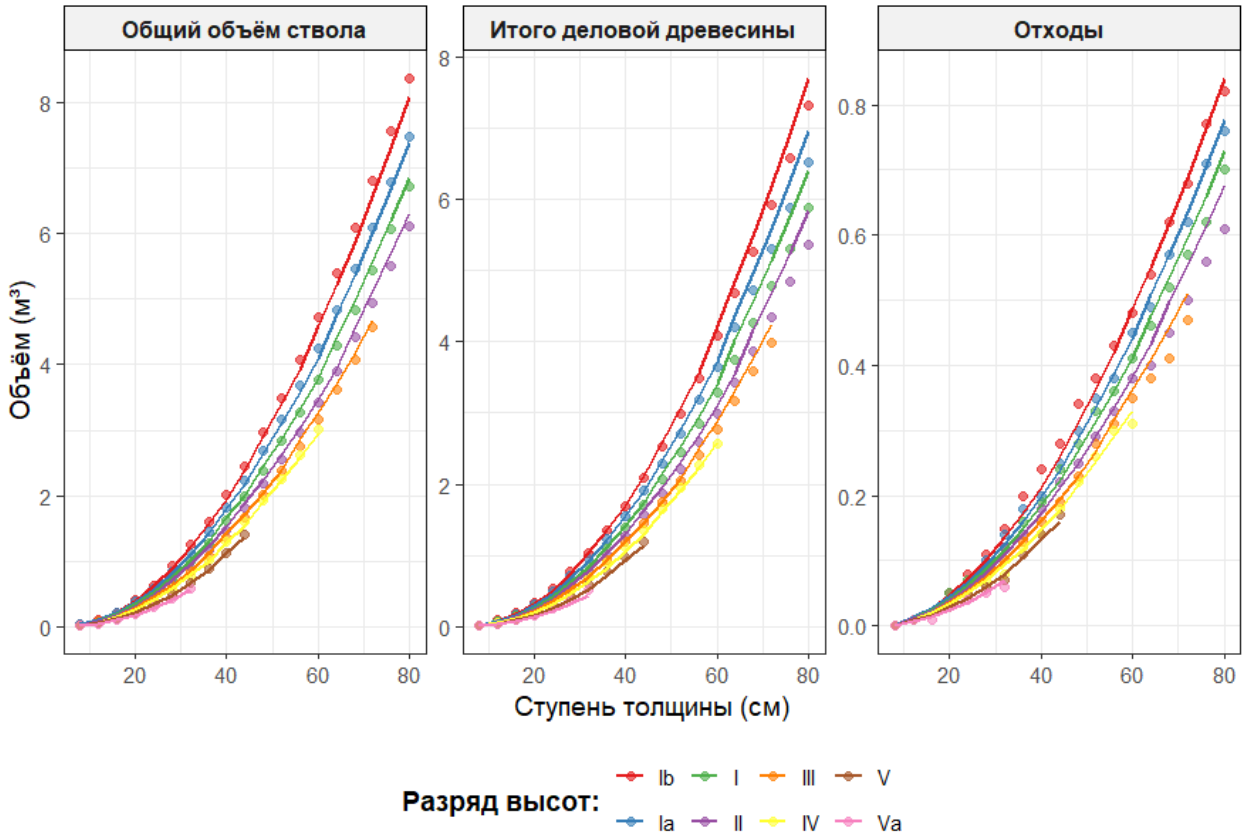



Рис. 2 Модели на основе уравнения Шумахера-Холла для общего объема ствола, итого деловой древесины и отходов.
Точки соответствуют исходным табличным данным, сплошные линии – расчетным значениям, полученным в ходе моделирования.

Базовые модели объёма показали высокую точность: коэффициент детерминации для общего объёма ствола, итога деловой древесины и отходов (рис. 1) составил 0,97-0,999 ($p < 0,001$). Долевые модели в пересчёте на абсолютные объёмы воспроизводят табличные данные с $R^2$ = 0,80-0,99 для пиловочника, шпальника, крупной деловой древесины, строительных брёвен и рудстойки; для средних категорий деловой древесины точность ниже (0,3-0,7), что связано с зависимостью предельной ступени толщины сортимента от разряда высот (рис. 2). Показано также, что коэффициент детерминации, рассчитанный в пространстве долей, неустойчив к единичным выбросам и может многократно занижать оценку качества модели: после верификации исходных данных и расчёта $R^2$ в абсолютных объёмах внутри интервала

существования сортимента для пиловочника значение возросло с 0,05 до 0,97. Это указывает на необходимость валидации сортиментных моделей именно в кубометрах, а не в долях.

Итогом описанной методики являются четыре комплекта нормативных материалов, характеристика которых приведена в таблице 7.

Таблица 7 – Объём полученных нормативных материалов

| Материал | Дуб черешчатый | Сосна обыкновенная |
|---|---|---|
| Сортиментная таблица | 6 разрядов; ступени 6-160 см с шагом 2 см; 24 показателя | 8 разрядов; ступени 6-108 см с шагом 2 см; 21 показатель |
| Таблица параметров моделей | 24 уравнения с интервалами существования и показателями точности | 22 уравнения с интервалами существования и показателями точности |
| Товарная таблица (разрядная) | 4 класса товарности | 3 класса товарности |
| Товарная таблица (многофакторная) | 1728 строк | 1200 строк |

Все материалы оформлены в виде электронных таблиц, содержащих, помимо самих нормативов, листы с параметрами уравнений, показателями точности, перечнем внесённых в исходные данные исправлений и промежуточными расчётными величинами, что обеспечивает полную проверяемость результатов [8].

Шаг в 2 см снижает погршность при материально-денежной оценке лесосек и проведении рубок ухода. Переход на 2 см шкалу повышает точность расчетов объема и выхода сортиментов для тонкомерных древостоев и молодняков (диаметр менее 16 – 32 см).

**Список литературы**

1. Сортиментные таблицы для лесов центральных и южных районов Европейской части РСФСР, Москва, 1987. 128 с.

2. Лесной кодекс Российской Федерации. Статья 23.3. Отвод и таксация лесосек. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_64299/f45248618c8fe602c7a5716cde7c408f611363c8/ (дата обращения 14.08.2026).

3. Вариводина И.Н., Орнатский А.Н., Мусиевский А.Л., Гудкова К.А. Совершенствование системы нормативов оценки сортиментной структуры древостоев дуба черешчатого для лесостепи Центрально-Черноземного региона России с использованием многофакторного математического моделирования// Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2026, том 30, № 5. С. 32 – 46.

4. Вариводина И.Н., Орнатский А.Н., Вариводина А.А. О необходимости разработки 5новых нормативов оценки сортиментной и товарной структуры древостоев, полученных на основе исследований региональных особенностей формирования насаждений, их строения и товарности// Леса России: политика, промышленность, наука, образование: материалы XI Всерос. науч.-техн.конф. 20-22 мая 2026 г. / Санкт-Петербург: СПбГЛТУ, 2026. – С. 58 – 61. ISBN 978-5-9239-1568-6

5. Орнатский А.Н., Вариводина И.Н., Гудкова К.А. Оценка и корректировка системы нормативов сортиментной и товарной структуры древостоев сосны обыкновенной для лесостепной зоны Центрально-Черноземного региона России с использованием многофакторного математического моделирования//Сборник Тезисов Всерос. науч.-практ. конф. «Мониторинг, инновации и биотехнологии лесных и аграрных экосистем в условиях изменчивости климата»/ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова», г. Воронеж, 10, 11 июня 2026 г.

6. Прядкин В.И., Бартенев И.М. Эколого-экономическая оценка применения сортиментной технологии заготовки древесины на рубках ухода // Лесотехнический журнал, 2018. Т. 8. № 4 (32). С. 250–259.

7. Алексеев А.С. Опыт статистической инвентаризации лесов России и современные проблемы формирования системы национальной инвентаризации лесов // Государственный лесной реестр, государственная инвентаризация лесов и лесоустройство: Материалы 3-й Междунар. науч.-практ. конф., Москва, 29 ноября - 01 декабря 2012 г. М.: Рослесинфорг, 2013. С. 92–96.

8. Schumacher F.X., Hall F.S. Logarithmic expression of timber-tree volume // J. of Agricultural Research, 1933, vol. 47, no. 9, pp. 719–734

**References:**

1. Sortimentnye tablicy dlja lesov central'nyh i juzhnyh rajonov Evropejskoj chasti RSFSR, Moskva, 1987. 128 s.

2. Lesnoj kodeks Rossijskoj Federacii. Stat'ja 23.3. Otvod i taksacija lesosek. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_64 299/f45248618c8fe602c7a5716cde7c408f611363c8/ (data obrashhenija 14.08.2026).

3. Varivodina I.N., Ornatskij A.N., Musievskij A.L., Gudkova K.A. Sovershenstvovanie sistemy normativov ocenki sortimentnoj struktury drevostoev duba chereshchatogo dlja lesostepi Central'no-Chernozemnogo regiona Rossii s ispol'zovaniem mnogofaktornogo matematicheskogo modelirovanija// Lesnoj vestnik / Forestry Bulletin, 2026, tom 30, № 5. S. 32 – 46.

4. Varivodina I.N., Ornatskij A.N., Varivodina A.A. O neobhodimosti razrabotki 5novyh normativov ocenki sortimentnoj i tovarnoj struktury drevostoev, poluchennyh na osnove issledovanij regional'nyh osobennostej formirovanija nasazhdenij, ih stroenija i tovarnosti// Lesa Rossii: politika, promyshlennost', nauka, obrazovanie: materialy XI Vseros. nauch.-tehn.konf. 20-22 maja 2026 g. / Sankt-Peterburg: SPbGLTU, 2026. – S. 58 – 61. ISBN 978-5-9239-1568-6

5. Ornatskij A.N., Varivodina I.N., Gudkova K.A. Ocenka i korrektirovka sistemy normativov sortimentnoj i tovarnoj struktury drevostoev sosny obyknovennoj dlja lesostepnoj

zony Central'no-Chernozemnogo regiona Rossii s ispol'zovaniem mnogofaktornogo matematicheskogo modelirovanija//Sbornik Tezisov Vseros. nauch.-prakt. konf. «Monitoring, innovacii i biotehnologii lesnyh i agrarnyh jekosistem v uslovijah izmenchivosti klimata»/ FGBOU VO «Voronezhskij gosudarstvennyj lesotehnicheskij universitet imeni G.F. Morozova», g. Voronezh, 10, 11 ijunja 2026 g.

6. Prjadkin V.I., Bartenev I.M. Jekologo-jekonomicheskaja ocenka primenenija sortimentnoj tehnologii zagotovki drevesiny na rubkah uhoda // Lesotehnicheskij zhurnal, 2018. T. 8. № 4 (32). S. 250–259.

7. Alekseev A.S. Opyt statisticheskoj inventarizacii lesov Rossii i sovremennye problemy formirovanija sistemy nacional'noj inventarizacii lesov // Gosudarstvennyj lesnoj reestr, gosudarstvennaja inventarizacija lesov i lesoustrojstvo: Materialy 3-j Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Moskva, 29 nojabrja - 01 dekabrja 2012 g. M.: Roslesinforg, 2013. S. 92–96.

8. Schumacher F.X., Hall F.S. Logarithmic expression of timber-tree volume // J. of Agricultural Research, 1933, vol. 47, no. 9, pp. 719–734