

УДК 519.86

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы экономики (физико-математические науки, экономические науки)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА БЫЧКА

Ганичева Антонина Валериановна
к.ф.-м.н., профессор,
AuthorID: 177856

Тверская государственная сельскохозяйственная академия, Тверь, Россия, профессор кафедры “Физико-математических дисциплин и информационных технологий”, ул. Василевского, дом 7, поселок Сахарово, Тверь, 171314, Россия

Ганичев Алексей Валерианович
AuthorID: 178091

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия, старший преподаватель кафедры “Информатики и прикладной математики”, 170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, дом 22, Россия, alexej.ganichev@yandex.ru

В статье рассмотрена одна из важных задач производства сельскохозяйственной продукции – построение модели роста бычка одной из мясных пород. Предложено дифференциальное уравнение, описывающего набор массы животным до возраста одного года. Получено решение дифференциального уравнения и записано уравнение роста массы бычка. Линия тренда, построенная в MS Excel, показывает очень хорошую линейную аппроксимацию полученного уравнения. Для описания набора массы животным в возрасте после года предложено использовать модель Перла-Рида

Ключевые слова: МАССА, ПОРОДА ЖИВОТНОГО, ДИНАМИКА, РЕГРЕССИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, ФУНКЦИЯ РОСТА, МОДЕЛЬ ПЕРЛА-РИДА

<http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-216-007>

Введение

Применение в сельском хозяйстве цифровых технологий вызывает необходимость использования для оценки показателей и факторов метода математического моделирования [2]. Особое место среди таких моделей занимают ростовые, описывающие динамику развития биологического

<http://ej.kubagro.ru/2026/02/pdf/07.pdf>

UDC 519.868

5.2.2. Mathematical, statistical and instrumental methods of economics (physical and mathematical sciences, economic sciences)

MATHEMATICAL MODEL OF BULL CALF BULL GROWTH

Ganicheva Antonina Valerianovna
Cand.Phys-Math.Sci., Professor
AuthorID: 177856

Tver state agricultural academy, Tver, Russia, Professor of the Department of Physical and Mathematical Sciences and Information Technologies, ul.Vasilevskogo, pos.Saharovo, Tver, 171314, Russia

Ganichev Alexey Valerianovich
AuthorID: 178091

Tver State Technical University, Tver, Russia, Associate Professor of the Department of Computer Science and Applied Mathematics, nab.Nikitina, 22, Tver, 170026, Russia, alexej.ganichev@yandex.ru

The article covers one of the important tasks of the production of agricultural products, namely the construction of the growth model of the bull calf of one of meat breeds. The differential equation that describes the weight gain by the animal until the age of one year was offered. The solution to the differential equation was received, and the equation of the weight growth of the bull calf was written. The trend line produced in MS Excel shows a very good linear approximation of the equation that was received. To describe the animal's weight gain after the age of one year, it was proposed to use the Pearl-Reed model

Keywords: WEIGHT, ANIMAL BREED, DYNAMICS, REGRESSION, DIFFERENTIAL EQUATION, GROWTH FUNCTION, PEARL-REED MODEL

объекта. В процессе роста животных происходят качественные и количественные изменения их организмов (изменение пропорций тела, увеличение массы, геометрических размеров тела и отдельных органов, изменение массы в единицу времени, количество потребляемого корма и т. д). На рост бычков оказывают влияние многие факторы: порода, рационы питания и организация кормления, условия содержания и т.д. [4]. Динамика живой массы тесно связана с продуктивностью животных.

Ученые по-разному относятся к моделям роста животных. Некоторые, например, академик И. И. Шмальгаузен считают, что рост меняется скачкообразно и построить такие модели нельзя. Известны модели роста животного организма Л. фон Берталанфи, Т. Б. Робертсона, С. Броди, Н. В. Найденова и др.

Новая цифровая математическая модель роста животных разработана в статье [3]. В данной модели используется единое основное уравнение для всех возрастов животного. В этом случае модель становится достаточно сложной. Однако возможен и другой подход – применение модели со структурными сдвигами, когда в одной модели объединяются два уравнения роста.

Целью данной статьи является разработка модели развития бычков мясных пород в возрасте до года и после года на основе единого уравнения.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи: 1) отдельно разрабатываются уравнения для каждого периода роста; 2) данные уравнения объединяются в одно уравнение в модели со структурными сдвигами с использованием метода фиктивных переменных.

1. Моделирование роста бычка от рождения до года

Рост массы бычка от рождения до года можно описывать следующей модифицированной моделью роста Берталанфи:

$$\Delta y / \Delta t = (y - a) / t - K (y - a), \quad (1)$$

где функция $y(t)$ определяет зависимость массы бычков y (кг) от возраста t (месяцев); константа K (1 / месяц) является постоянной катаболизма; постоянная a учитывает живую массу бычка при рождении.

Модель имеет две составляющих: 1) составляющую роста (анаболизма); 2) составляющую катаболизма, учитывающую энергозатраты организма.

Зависимость (1) можно считать линейной относительно Δt при малых значениях приращения. Поэтому заменяя в уравнении (1) Δt на dt и Δy на dy и используя предельный переход, получаем дифференциальное уравнение:

$$dy / dt = (y - a) / t - K(y - a). \quad (2)$$

Разделим переменные в уравнении (2), получим:

$$dy / (y - a) = (1 / t - K) dt.$$

Тогда

$$\int dy / (y - a) = \int (1 / t - K) dt, \text{ т.е.}$$

$$\ln y - a = \ln t - Kt + \ln C,$$

где C - произвольная постоянная интегрирования.

В этом случае общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$y = Cte^{-Kt} + a. \quad (3)$$

Найдём частное решение при следующих начальных условиях: $t = 1$, $y_0 = 60$ (кг) – это средний вес бычков в возрасте 1 месяц [5]).

Из экспериментальных данных известно, что вес бычка при рождении ($t = 0$) - $a = 31$ кг, в возрасте 1 месяц – 60 кг [4], примем $K = 0,008$ (1/месяц). Тогда

$$60 = Ce^{-0,008 \times 1} + 31.$$

Отсюда следует, что $C = 29,23$. В этом случае уравнение роста будет:

$$y(t) = 31 + 29,23 \cdot t \cdot e^{-0,008t}. \quad (4)$$

По уравнению (4) построим таблицу значений (табл. 1) и график функции роста $y(t)$ (кг) для значений $t=0, 1, 2, \dots, 12$ (месяц) (рис.1).

Табл. 1. – Значения функции роста в возрасте 0 – 12 месяцев

t , месяцев	0	1	2	3	4	5	6
$y(t)$, кг	31	60	88,53	116,61	144,24	171,42	198,16
t , месяцев	7	8	9	10	11	12	
$y(t)$, кг	224,47	250,34	275,79	300,83	325,44	349,65	

На рис. 1 линейный тренд $y=26,53 \cdot t+9,35$ проходит через все точки графика функции роста, при этом значение коэффициента детерминации очень большое ($R^2=0,9993$, т. е данный тренд можно использовать для анализа и прогнозирования).

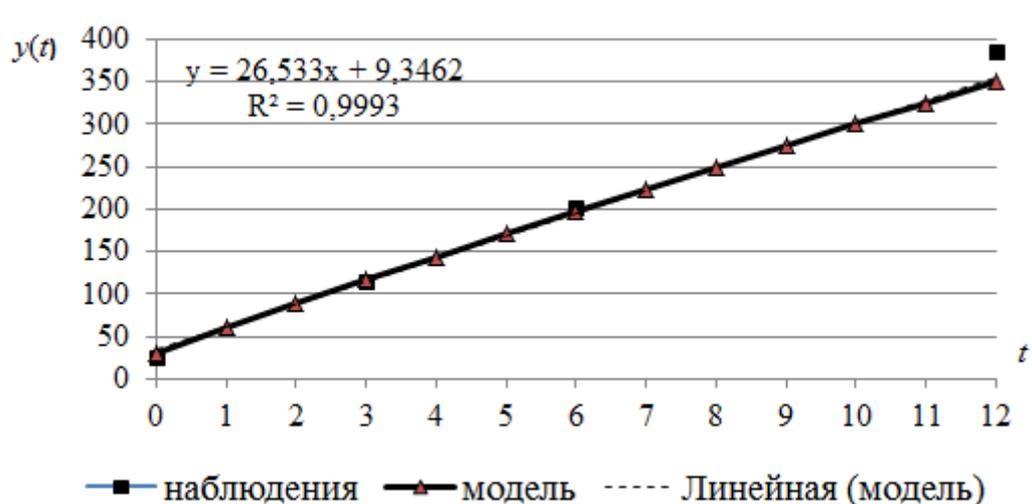


Рис. 1. График роста бычка до года

Из рис. 1 видно, что модель соответствует экспериментальным данным (наблюдениям) [5]. В статье [5] приведены данные о развитии бычков герефордской породы разных типов телосложения.

Таким образом, в возрасте до года, согласно уравнению (3), наблюдается быстрый рост бычка (3). Средний вес бычка в возрасте до одного года существенно зависит от породы животного.

2. Моделирование роста бычка после года

В возрасте после года наступает вторая стадия роста бычков - замедление роста (происходят структурные сдвиги в развитии биологической системы).

Таблица значений функции роста $y(t)$ (кг) для значений $t=13, 14, 15, \dots, 27$ (месяцев) и график приведены ниже.

Табл. 2. – Значения функции роста в возрасте 13 – 27 месяцев

t , месяцев	13	14	15	16	17	18	19	20
$y(t)$, кг	420	450	475	500	510	520	528	530
t , месяцев	21	22	23	24	25	26	27	
$y(t)$, кг	532	535	537	540	542	543	545	

Поэтому для второго этапа надо использовать другой вид: различные виды S -образных кривых с насыщением (например, логистическая кривая (модель Перла-Рида)).

Зависимость логистического типа $y_{t=1} / (a+b \cdot e^{-t})$ приведем к линейному виду $z=b_0+b_1u$ заменой переменных: $z=1 / y$, $u=e^{-t}$, $b_0 = a$, $b_1 = b$ [1].

Для упрощения расчетов введем вспомогательную переменную $x= t-12$.

Составим таблицу изменения новых переменных u и z (табл. 3).

Табл. 3. – Таблица изменения новых переменных

<i>x</i>	1	2	3	4	5
<i>u</i>	0,367879	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738
<i>z</i>	0,002381	0,002222	0,002105	0,002000	0,001961
<i>x</i>	6	7	8	9	10
<i>u</i>	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	$4,54 \cdot 10^{-5}$
<i>z</i>	0,001923	0,001894	0,001887	0,001888	0,001869
<i>x</i>	11	12	13	14	15
<i>u</i>	$1,67 \cdot 10^{-5}$	$6,144 \cdot 10^{-6}$	$2,26 \cdot 10^{-6}$	$8,3153 \cdot 10^{-7}$	$3,059 \cdot 10^{-7}$
<i>z</i>	0,001862	0,001852	0,001845	0,001842	0,001835

Имеем: $\bar{u} = 0,038798$; $\bar{z} = 0,001957$; $\bar{u}\bar{z} = 8,92532 \cdot 10^{-5}$; $S_u^2 = 0,008929$;

$$b_1 = (\bar{u}\bar{z} - \bar{u} \cdot \bar{z}) / S_u^2 = 0,001899; b_0 = \bar{z} - b_1 \cdot \bar{u} = 0,001492.$$

Тогда уравнение линейной регрессии имеет вид:

$$z = 0,001899 + 0,001492 \cdot u \tag{5}$$

Отсюда $y_x = 1 / (0,001899 + 0,001492 e^{-x})$; $y_t = 1 / (0,001899 + 0,001492 e^{-(t-12)})$; (6)

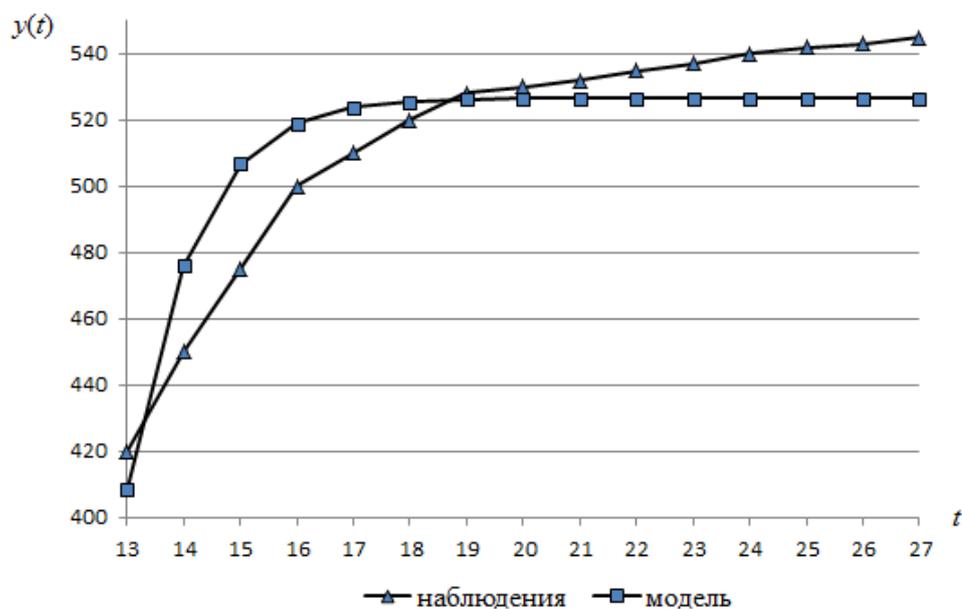


Рис. 2. Графики роста бычка после года

Из графиков на рис. 2 видно, что модель Перла-Рида, определяемая уравнениями (6), хорошо описывает процесс роста массы бычка после года.

Объединение двух видов уравнений роста (4 и 6) можно осуществить в рамках модели со структурными сдвигами [1]. Введем фиктивную переменную d , которая определяется следующим образом:

$$d=0, \text{ если } t \leq 12; \quad d=1 - \text{ иначе.}$$

Тогда общее уравнение можно записать так:

$$y=26,53 \cdot t(1-d)+9,35(1-d) + 1 / (0,001899 + 0,001492e^{12-t}) d; t=0, \dots, 27. \quad (7)$$

Фиктивная переменная d служит для переключения между двумя уравнениями роста: при $t \leq 12$ месяцев используется линейная модель, при $t > 12$ — логистическая». Данное уравнение можно использовать в качестве модели роста бычка на двух этапах его развития.

Заключение

Таким образом, в статье построены две модели этапов роста массы бычка: 1) в возрасте до года; 2) в возрасте после года. Модели объединены в одно эконометрическое уравнение с помощью метода фиктивных переменных. Полученное уравнение можно использовать для прогнозирования продукции животноводства.

После построения любой математической модели необходимо провести ее верификацию - проверку соответствия математической модели реальной биологической системе с учетом породы животного и особенностей его содержания [6]. Эти задачи являются направлением дальнейших исследований.

Литература

1. Ганичев А. В., Ганичева А. В. Эконометрика: учебное пособие. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2019. 144 с.

2. Ганичева А. В., Ганичев А. В. Моделирование процессов цифрового сельского хозяйства. Тверь: Тверской государственной технической университет, 2021. 160 с.

3. Григулецкий В. Г., Комлацкий В. И. Новая цифровая модель роста и развития сельскохозяйственных животных // Научный журнал Куб ГАУ, 2022. № 178(04). С. 49 - 64.

4. Куценко А. И. Моделирование динамики прироста живой массы и продуктивности крупного рогатого скота // Вестник ФГОУ ВПО МГАУ, 2011. № 1. С. 45 - 49.

5. Левахин Ю. И., Джуламанов Е. Б., Урынбаева Г. Н. Рост и развитие бычков герефордской породы разных типов телосложения при откорме // Известия Оренбургского государственного аграрного университета, 2016. Выпуск 1. С. 77 – 79.

6. Наумова В. В. Влияние живой массы телят герефордской породы при рождении на их последующую продуктивность // Вестник Ульяновской государственной сельскохозяйственной академии, 2022. № 1 (57). С. 182 - 187.

References

1. Ganichev A. V., Ganicheva A. V. Jekonometrika: uchebnoe posobie. Tver': Tverskoj gosudarstvennyj tehničeskij universitet, 2019. 144 s.

2. Ganicheva A. V., Ganichev A. V. Modelirovanie processov cifrovogo sel'skogo hozjajstva. Tver': Tverskoj gosudarstvennyj tehničeskij universitet, 2021. 160 s.

3. Griguleckij V. G., Komlackij V. I. Novaja cifrovaja model' rosta i razvitija sel'skohozjajstvennyh zhivotnyh // Nauchnyj zhurnal Kub GAU, 2022. № 178(04). S. 49 64.

4. Kucenko A. I. Modelirovanie dinamiki prirosta zhivoj massy i produktivnosti krupnogo rogatogo skota // Vestnik FGOU VPO MGAU, 2011. № 1. S. 45 49.

5. Levahin Ju. I., Dzhulamanov E. B., Urynbaeva G. N. Rost i razvitie bychkov gerefordskoj porody raznyh tipov teloslozhenija pri otkorme // Izvestija Orenburgskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta, 2016. Vypusk 1. S. 77 – 79.

6. Naumova V. V. Vlijanie zhivoj massy teljat gerefordskoj porody pri rozhdenii na ih posledujushhuju produktivnost' // Vestnik Ul'janovskoj gosudarstvennoj sel'skohozjajstvennoj akademii, 2022. № 1 (57). S. 182 187.