УДК 004.8

5.2.2. «Математические, статистические и инструментальные методы в экономике»

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИЙ**

Ганичева Антонина Валериановна
к.ф.-м.н., профессор кафедры “Физико-математических дисциплин и информационных технологий“
SPIN-код: 9049-4545, AuthorID: 177856,
tgan55@yandex.ru
*Тверская государственная сельскохозяйственная академия, Тверь, Россия*

Ганичев Алексей Валерианович
старший преподаватель кафедры “Информатики и прикладной математики“
SPIN-код: 4747-0880, AuthorID: 178091
alexej.ganichev@yandex.ru
*Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия*

Важность решения проблемы борьбы с распространением эпидемий заключается в серьезности последствий данного процесса. В работе выделены четыре характерные подгруппы популяции сельскохозяйственных животных по их отношению к вирусной инфекции. В основу математической модели положен аналитический метод решения систем однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для пояснения разработанного метода рассмотрен конкретный числовой пример

Ключевые слова: ГРУППА ЖИВОТНЫХ, ОСОБИ, ВИРУСНАЯ ИНФЕКЦИЯ, ПОПУЛЯЦИЯ, РЕШЕНИЕ, СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-212-011

UDC 004.8

5.2.2. "Mathematical, statistical and instrumental methods in economics"

**MATHEMATICAL MODEL OF SPREAD OF EPIDEMICS**

Ganicheva Antonina Valerianovna
Cand.Phys-Math.Sci., Professor of the Department of Physical and Mathematical Sciences and Information Technologies
tgan55@yandex.ru
*Tver state agricultural academy, Tver, Russia*

Ganichev Alexey Valerianovich
Professor of the Department of Computer Science and Applied Mathematics,
RSCI SPIN-code: 4747-0880, AuthorID: 178091
alexej.ganichev@yandex.ru
*Tver State Technical University, Tver, Russia, Associate*

The importance of solving the problem of combating the spread of epidemics lies in the seriousness of the consequences of this process. The work identifies four characteristic subgroups of the population of farm animals according to their attitude to viral infection. The mathematical model is based on an analytical method for solving systems of homogeneous differential equations with constant coefficients. To explain the developed method, a specific numerical example is considered

Keywords: GROUP OF ANIMALS, INDIVIDUALS, VIRAL INFECTION, POPULATION, SOLUTION, EQUATION SYSTEM

## Введение

Рассмотрим популяцию сельскохозяйственных животных (особей), которую условно разделим на четыре группы. В первую группу включим животных, которые восприимчивы к некоторому виду заболеваний, но на текущий момент $t$ пока здоровы. Количество таких особей в рассматриваемой популяции обозначим через $N_1(t)$. Вторую группу составляют инфицированные животные. Они в данный момент времени больны и являются в источниками распространения вирусного заболевания. Их количество - $N_2(t)$. В третью группу отнесем выздоровевшие особи. Количество таких животных обозначим как $N_3(t)$. Четвертая группа особей характеризуется наличием иммунитета к данному вирусному заболеванию. При выздоровлении всех инфекционных особей общее количество различных групп особей будет равно:

$$N = N_1(t) + N_2(t)(t) + N_3(t) + N_4(t).$$

Такое разделение популяции особей на 4 группы, несмотря на некоторую условность, является достаточно характерным применительно к задачам исследования отдельных аспектов эпидемий, возникающих в результате вирусных инфекций. Вирусы (бактерии), попадая в организм, размножаются со скоростью, пропорциональной их наличному количеству. Они вызывают реакцию иммунной системы организма, синтезируются антитела (антивирусы) со скоростью, пропорциональной числу вирусов. Взаимодействие колонии вирусов с антителами приводит к уменьшению числа первых.

## Методы и материалы

В зависимости от состояния организма (его иммунной системы) на момент попадания вирусов возможны следующие исходы процесса [1]:

*a*) особь заболевает, т.е. переходит из группы восприимчивых в группу инфекционных (больных), если число вирусов $G(t)$ в некоторый момент времени превышает критическое значение $G_{кр}$;

*b*) особь остается здоровой (она принадлежит к четвертой группе особей), если организм обладает иммунитетом к данной болезни и синтезируемое им число антител $X(t)$ оказывается достаточным для борьбы с вирусами.

Обозначим:

$\alpha_{12}(t)$, $\alpha_{13}(t)$, $\alpha_{14}(t)$– коэффициенты влияния особей первой группы на особи второй, третьей и четвертой групп соответственно;

$\alpha_{21}(t)$, $\alpha_{23}(t)$, $\alpha_{24}(t)$ - коэффициенты влияния особей второй группы на особи первой, третьей и четвертой групп соответственно;

$\alpha_{31}(t)$, $\alpha_{32}(t)$, $\alpha_{34}(t)$ – коэффициенты влияния особей третьей группы на особи первой, второй и четвертой групп соответственно;

$\alpha_{41}(t)$, $\alpha_{42}(t)$, $\alpha_{43}(t)$ – коэффициенты влияния особей четвертой группы на особи первой, второй и третьей групп соответственно;

$t=\overline{0,T}$ –время наблюдения.

Под влиянием особей одних групп особи других групп обретают такой же тип, как и у первых. Степень такого влияния зависит от следующих факторов: 1) значений коэффициентов влияния, 2) начальных численностей особей в группах, 3) текущих численностей особей в группах. Чем больше особей в данной группе, тем сильнее их влияние на особи других групп.

Модель динамического взаимовлияния особей имеет вид [2]:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt}=\frac{\alpha_{12}(t)\cdot N_{20}}{N_2(t)}+\frac{\alpha_{13}(t)\cdot N_{30}}{N_3(t)}+\frac{\alpha_{14}(t)\cdot N_{40}}{N_4(t)}-\frac{N_{10}}{N_1(t)}\left(\alpha_{21}(t)-\alpha_{31}(t)-\alpha_{41}(t)\right); \\ \frac{dN_2(t)}{dt}=\frac{\alpha_{21}(t)\cdot N_{10}}{N_1(t)}+\frac{\alpha_{23}(t)\cdot N_{30}}{N_3(t)}+\frac{\alpha_{24}(t)\cdot N_{40}}{N_4(t)}-\frac{N_{20}}{N_1(t)}\left(\alpha_{12}(t)-\alpha_{32}(t)-\alpha_{42}(t)\right); \\ \frac{dN_3(t)}{dt}=\frac{\alpha_{31}(t)\cdot N_{10}}{N_1(t)}+\frac{\alpha_{32}(t)\cdot N_{20}}{N_2(t)}+\frac{\alpha_{34}(t)\cdot N_{40}}{N_4(t)}-\frac{N_{30}}{N_1(t)}\left(\alpha_{13}(t)-\alpha_{23}(t)-\alpha_{43}(t)\right); \\ \frac{dN_4(t)}{dt}=\frac{\alpha_{41}(t)\cdot N_{10}}{N_1(t)}+\frac{\alpha_{42}(t)\cdot N_{20}}{N_2(t)}+\frac{\alpha_{43}(t)\cdot N_{40}}{N_4(t)}-\frac{N_{40}}{N_1(t)}\left(\alpha_{14}(t)-\alpha_{24}(t)-\alpha_{34}(t)\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $N_{10}$, $N_{20}$, $N_{30}, N_{40}$, - начальные численности групп.

Пусть:

$\alpha_{12}(t)=m_1\cdot N_1(t)\cdot N_2(t)$, $\alpha_{13}(t)=m_2\cdot N_1(t)\cdot N_3(t)$, $\alpha_{14}(t)=m_3\cdot N_1(t)\cdot N_4(t)$,

$\alpha_{21}(t)=m_4\cdot N_1(t)\cdot N_2(t)$, $\alpha_{23}(t)=m_5\cdot N_2(t)\cdot N_3(t)$, $\alpha_{24}(t)=m_6\cdot N_2(t)\cdot N_4(t)$,

$\alpha_{31}(t)=m_7\cdot N_1(t)\cdot N_3(t)$, $\alpha_{32}(t)=m_8\cdot N_2(t)\cdot N_3(t)$, $\alpha_{34}(t)=m_9\cdot N_3(t)\cdot N_4(t)$,

$\alpha_{41}(t)=m_{10}\cdot N_1(t)\cdot N_4(t)$, $\alpha_{42}(t)=m_{11}\cdot N_2(t)\cdot N_4(t)$, $\alpha_{43}(t)=m_{12}\cdot N_3(t)\cdot N_4(t)$.

где $m_i$ $(i=\overline{1,12})$ - постоянные числовые коэффициенты.

Обозначим: $x = N_1(t); \cdot y = N_2(t); \ z = N_3(t), \ q = N_4(t).$

Тогда система (1) преобразуется к виду :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = N_1(t)\left(m_1 \cdot N_{20} + m_2 \cdot N_{30} + m_3 \cdot N_{40}\right) - N_{10}(m_4 \cdot N_2(t) - m_7 \cdot N_3(t) - m_{10} \cdot N_4(t)); \\ \dfrac{dy}{dt} = N_2(t)\left(m_4 \cdot N_{10} + m_5 \cdot N_{30} + m_6 \cdot N_{40}\right) - N_{20}(m_1 \cdot N_1(t) - m_8 \cdot N_3(t) - m_{11} \cdot N_4(t)); \\ \dfrac{dz}{dt} = N_3(t)\left(m_7 \cdot N_{10} + m_8 \cdot N_{20} + m_9 \cdot N_{40}\right) - N_{30}(m_2 \cdot N_1(t) - m_5 \cdot N_2(t) - m_{12} \cdot N_4(t)); \\ \dfrac{dq}{dt} = N_4(t)\left(m_{10} \cdot N_{10} + m_{11} \cdot N_{20} + m_{12} \cdot N_{30}\right) - N_{40}(m_3 \cdot N_1(t) - m_6 \cdot N_2(t) - m_9 \cdot N_3(t)). \end{cases} \quad (2)$$

Примем:

$m_1 \cdot N_{20} + m_2 \cdot N_{30} + m_3 \cdot N_{40} = u_1; \ m_4 \cdot N_{10} = u_2; \ m_7 \cdot N_{10} = u_3; \ m_{10} \cdot N_{10} = u_4;$

$m_1 \cdot N_{20} = v_1; \ m_4 \cdot N_{10} + m_5 \cdot N_{30} + m_6 \cdot N_{40} = v_2; \ m_8 \cdot N_{20} = v_3; \ m_{11} \cdot N_{20} = v_4;$

$m_2 \cdot N_{30} = w_1; \ m_5 \cdot N_{30} = w_2; \ m_7 \cdot N_{10} + m_8 \cdot N_{20} + m_9 \cdot N_{40} = w_3; \ m_{12} \cdot N_{30} = w_4;$

$m_3 \cdot N_{40} = r_1; \ m_6 \cdot N_{40} = r_2; \ m_9 \cdot N_{40} = r_3; \ m_{10} \cdot N_{10} + m_{11} \cdot N_{20} + m_{12} \cdot N_{30} = r_4.$

Система (2) запишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u_1 \cdot x - u_2 \cdot y - u_3 \cdot z - r_1 \cdot q; \\ \dfrac{dy}{dt} = -v_1 \cdot x + v_2 \cdot y - v_3 \cdot z - r_2 \cdot q; \\ \dfrac{dz}{dt} = -w_1 \cdot x - w_2 \cdot y + w_3 \cdot z - r_3 \cdot q; \\ \dfrac{dq}{dt} = -r_1 \cdot x - r_2 \cdot y - r_3 \cdot z + r_4 \cdot q. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) является линейной однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [4, 5].

Определим корни характеристического уравнения: $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3, \ \lambda_4.$

Числу $\lambda_k \left(k=\overline{1,4}\right)$ поставим в соответствие собственный вектор $(p_{1k}, \ p_{2k}, \ p_{3k}, \ p_{4k})$, который находится из системы

$$\begin{cases} (u_1-\lambda_k)\cdot p_{1k}-u_2\cdot p_{2k}-u_3\cdot p_{3k}-u_4\cdot p_{4k}=0; \\ -v_1\cdot p_{1k}+(v_2-\lambda_k)\cdot p_{2k}-v_3\cdot p_{3k}-v_4\cdot p_{4k}=0; \\ -w_1\cdot p_{1k}-w_2\cdot p_{2k}+(w_3-\lambda_k)\cdot p_{3k}-w_4\cdot p_{4k}=0; \\ -r_1\cdot p_{1k}-r_2\cdot p_{2k}-r_3\cdot p_{3k}+(r_4-\lambda_k)\cdot p_{4k}=0. \end{cases} \quad (4)$$

Систему можно решить по методу Гаусса. Путем элементарных преобразований система приводится к трапецеидальному (система имеет множество решений) или треугольному виду (система имеет нулевое решение).

Система (3) имеет 4 решения:

1) $x_{11}=p_{11}\cdot e^{\lambda_1 t},\ x_{21}=p_{21}\cdot e^{\lambda_1 t},\ x_{31}=p_{31}\cdot e^{\lambda_1 t},\ x_{41}=p_{41}\cdot e^{\lambda_1 t},$

2) $x_{12}=p_{12}\cdot e^{\lambda_2 t},\ x_{22}=p_{22}\cdot e^{\lambda_2 t},\ x_{32}=p_{32}\cdot e^{\lambda_2 t},\ x_{42}=p_{42}\cdot e^{\lambda_2 t},$

3) $x_{13}=p_{13}\cdot e^{\lambda_3 t},\ x_{23}=p_{23}\cdot e^{\lambda_3 t},\ x_{33}=p_{33}\cdot e^{\lambda_3 t},\ x_{43}=p_{43}\cdot e^{\lambda_3 t},$

4) $x_{14}=p_{14}\cdot e^{\lambda_4 t},\ x_{24}=p_{24}\cdot e^{\lambda_4 t},\ x_{34}=p_{34}\cdot e^{\lambda_4 t},\ x_{44}=p_{44}\cdot e^{\lambda_4 t}.$

Общее решение системы (3):

$$\begin{cases} x=D_1\cdot x_{11}+D_2\cdot x_{12}+D_3\cdot x_{13}+D_4\cdot x_{14}; \\ y=D_1\cdot x_{21}+D_2\cdot x_{22}+D_3\cdot x_{23}+D_4\cdot x_{24}; \\ z=D_1\cdot x_{31}+D_2\cdot x_{32}+D_3\cdot x_{33}+D_4\cdot x_{34}; \\ q=D_1\cdot x_{41}+D_2\cdot x_{42}+D_3\cdot x_{43}+D_4\cdot x_{44}. \end{cases} \quad (5)$$

Коэффтциенты $D_i$ ($i$ = 1, 2. 3, 4) находятся из начальных условий задачи.

## Результаты и их обсуждение

Рассмотрим следующий пример.

Исходные данные: $N_1(0)=12$, $N_2(0)=18$, $N_3(0)=10$, $N_4(0)=9$, $m_1=0{,}002$, $m_2=0{,}003$, $m_3=0{,}002$, $m_4=0{,}003$, $m_5=0{,}0045$, $m_6=0{,}001$, $m_7=0{,}0025$, $m_8=0{,}0025$, $m_9=0{,}003$, $m_{10}=0{,}0015$, $m_{11}=0{,}0005$, $m_{12}=0{,}0027$.

Тогда $u_1 = 0,084$, $u_2 = 0,027$, $u_3 = 0,03$, $u_4 = 0,018$, $v_1 = 0,036$, $v_2 = 0,09$, $v_3 = 0,045$, $v_4 = 0,009$, $w_1 = 0,03$, $w_2 = 0,045$, $w_3 = 0,102$, $w_4 = 0,027$, $r_1 = 0,018,$, $r_2 = 0,009$, $r_3 = 0,027$, $r_4 = 0,054$.

Примем $t \in [0,\ 36]$.

Систему (3) запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} x' = (84x - 27y - 30z - 18q)\cdot 0,001; \\ y' = (-36x + 90y - 45z - 9q)\cdot 0,001; \\ z' = (-30x - 45y + 102z - 27q)\cdot 0,001; \\ q' = (-18x - 9y - 27z + 54q)\cdot 0,001. \end{cases} \quad (5)$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 0,084-\lambda & -0,036 & -0,03 & -0,018 \\ -0,036 & 0,09-\lambda & -0,045 & -0,009 \\ -0,03 & -0,045 & 0,102-\lambda & -0,027 \\ -0,018 & -0,009 & -0,027 & 0,054-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получаем: $\lambda^4 - 0,222\lambda^3 + 0,005049\lambda^2 + 0,00111488\lambda - 31,3878\cdot 10^{-6}$.

Находим: $\lambda_1 = 2,553$, $\lambda_2 = -15,243$, $\lambda_3 = 41,822$, $\lambda_4 = 192,868$.

Составляем 4 системы типа (4). Приводим их к трапецеидальному виду. Системы имеют множества решений.

Примем значения свободных переменных $p_{41} = p_{42} = p_{43} = p_{44} = 1$. Находим соответствующие собственные вектора:

$$(p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{41}) = (-0,011,\ 0,023,\ -67,601,\ 1);$$

$$(p_{12}, p_{22}, p_{32}, p_{42}) = (0,002,\ 0,001,\ -0,621,\ 1);$$

$$(p_{13}, p_{23}, p_{33}, p_{43}) = (0,001,\ 0,\ 0,\ 1); \quad (p_{14}, p_{24}, p_{34}, p_{44}) = (0,\ 0\ 0,\ 1).$$

Система (5) имеет 4 решения:

1) $x_{11} = -0,011\cdot e^{2,553t}$, $x_{21} = 0,023\cdot e^{2,553t}$, $x_{31} = -67,601\cdot e^{2,553t}$, $x_{41} = e^{2.553t}$,

2) $x_{12} = 0,002\cdot e^{-15,243t}$, $x_{22} = 0,001\cdot e^{-15,243}$, $x_{32} = -0,621\cdot e^{-15,243t}$, $x_{42} = e^{-15,243t}$,

3) $x_{13} = 0,0001\cdot e^{41,822t}$, $x_{23} = 0$, $x_{33} = 0$, $x_{43} = e^{41,822t}$,

4) $x_{14}=0,\ x_{24}=0,\ x_{34}=0,\ x_{44}=e^{192,868t}$.

Запишем общее решение системы (5):

$$\begin{cases} x = D_1\cdot(-0,011\cdot e^{2,553t}) + D_2\cdot 0,023\cdot e^{2,553t} + D_3\cdot(-67,601\cdot e^{2,553t}) + D_4\cdot e^{2,53t};\\ y = D_1\cdot 0,002\cdot e^{-15,243t} + D_2\cdot 0,001\cdot e^{-15,243t} + D_3\cdot(-0,621\cdot e^{-15,243t}) + D_4\cdot e^{-15,243t};\\ z = D_1\cdot 0 + D_2\cdot 0 + D_3\cdot 0 + D_4\cdot e^{41,822t};\\ q = D_1\cdot 0 + D_2\cdot 0 + D_3\cdot 0 + D_4\cdot e^{192,868t}. \end{cases} \quad (5)$$

При заданных начальных условиях ($t_0=0$) $x_0=N_1(0)=y_0=N_2(0)= =z_0=N_3(0)=q_0=N_4(0)=100$ для определения $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$ имеем треугольную матрицу. Получаем: $D_4$ = 100. Тогда при значении свободной переменной $D_3$ = 1 имеем: $D_1$ = - 935,4; $D_2$ = 2491,8.

Общее решение будет:

$$\begin{cases} x = -10,3\cdot e^{2,553t} + 57,3\cdot e^{2,553t} - 67,601\cdot e^{2,553t} + 100\cdot e^{2,53t};\\ y = -1,9\cdot e^{-15,243t} + 2,5\cdot e^{-15,243t} - 0,621\cdot e^{-15,243t} + 100\cdot e^{-15,243t};\\ z = 100\cdot e^{41,822t};\\ q = 100\cdot e^{192,868t}. \end{cases} \quad (6)$$

Полученное решение изображено на рис. 1.

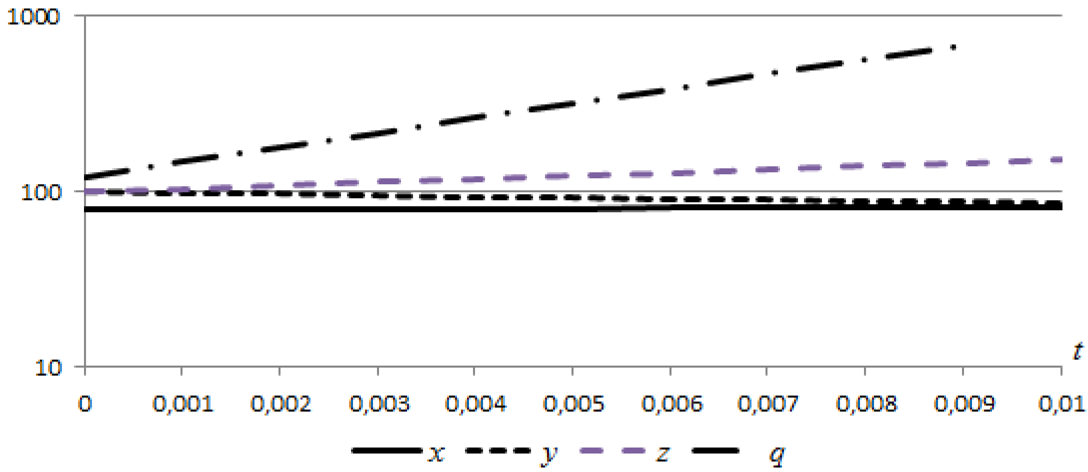


Рисунок 1 – Решение системы дифференциальных уравнений

Масштаб вертикальной оси на рисунке – логарифмический.

Трудность практической реализации предлагаемого метода для большего количества групп особей (более четырех) заключается в получении решения систем уравнений и нелинейных уравнений больших степеней из-за наличия большого количества корней уравнений, в том числе комплексных.

## Заключение

В статье разработана новая математическая модель распространения эпидемий. В основу модели положен аналитический метод решения систем однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [3]. Разработанная модель может найти применение для мониторинга эпидемиологической обстановки в региональных сельскохозяйственных предприятиях и фермерских хозяйствах.

### Литература

1. Андреева Е.А. Исследование иммунологических процессов с применением современных информационных технологий // Информационные технологии в УИС. 2020. № 1. С. 2-12.

2. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Модель системной динамики процесса обучения // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2019. № 7(1). С. 459-469. DOI: 10.26102/2310-6018/2019.24.1.006.

3. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Модель динамического взаимовлияния // Вестник кибернетики. 2018. № 4 (32). С. 77-84.

4. Иванов Г. Г., Алфёров Г. В., Королёв В. С. Исследование решений линейной одно-родной системы дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. № 1 (60). С. 47–53. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-47-53.

5. Сандаков Е.Б., Гордеев Ю.Н. Методы решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами. М.: НИЯУ МИФИ, 2013. 64 с.

### References

1. Andreeva E.A. Issledovanie immunologicheskih processov s primeneniem sovremennyh informacionnyh tehnologij // Informacionnye tehnologii v UIS. 2020. № 1. S. 2-12.

2. Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Model' sistemnoj dinamiki processa obuchenija // Modelirovanie, optimizacija i informacionnye tehnologii. 2019. № 7(1). S. 459-469. DOI: 10.26102/2310-6018/2019.24.1.006.

3. Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Model' dinamicheskogo vzaimovlijanija // Vestnik kibernetiki. 2018. № 4 (32). S. 77-84.

4. Ivanov G. G., Alfjorov G. V., Koroljov V. S. Issledovanie reshenij linejnoj odno-rodnoj sistemy differencial'nyh uravnenij // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Informatika. 2023. № 1 (60). S. 47–53. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-47-53.

5. Sandakov E.B., Gordeev Ju.N. Metody reshenija linejnyh differencial'nyh uravnenij i sistem s postojannymi kojefficientami. M.: NIJaU MIFI, 2013. 64 s.