

УДК 004.8

UDC 004.8

5.2.2. «Математические, статистические и инструментальные методы в экономике»

5.2.2. "Mathematical, statistical and instrumental methods in economics"

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА МОБИЛИЗАЦИИ С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНЫХ ФАКТОРОВ

MODELING THE MOBILIZATION PROCESS BASED ON RANDOM FACTORS

Ганичева Антонина Валериановна
к.ф.-м.н., профессор кафедры “Физико-математических дисциплин и информационных технологий”
SPIN-код: 9049-4545, AuthorID: 177856
tgan55@yandex.ru
Тверская государственная сельскохозяйственная академия, Тверь, Россия, ул. Василевского, дом 7

Ganicheva Antonina Valerianovna
Cand.Phys-Math.Sci., Professor of the Department of Physical and Mathematical Sciences and Information Technologies
tgan55@yandex.ru
Tver state agricultural academy, Saharovo, Tver, 171314, Russia

Ганичев Алексей Валерианович
старший преподаватель кафедры “Информатики и прикладной математики”
SPIN-код: 4747-0880, AuthorID: 178091
alexej.ganichev@yandex.ru
Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия, наб. Аф. Никитина, дом 22

Ganichev Alexey Valerianovich
Associate Professor of the Department of Computer Science and Applied Mathematics
RSCI SPIN code: 4747-0880, AuthorID: 178091
alexej.ganichev@yandex.ru
Tver State Technical University, Tver, Russia, Nikitin nab., 22

Проблема построения математических моделей для исследования социально экономических процессов является важной и актуальной. В статье разработан новый метод решения уравнения мобилизации со случайной составляющей. Для решения стохастического дифференциального уравнения предлагается использовать сечения случайного процесса и замену значений случайной величины ее математическим ожиданием с заданным уровнем точности. Разработанный в статье метод может быть использован для прогнозирования мобилизационного процесса с учетом воздействия случайных факторов

The problem of constructing mathematical models for studying socio-economic processes is important and relevant. The article develops a new method for solving the mobilization equation with a random component. To solve a stochastic differential equation, it is proposed to use cross sections of a random process and replace the values of a random variable with its mathematical expectation with a given level of accuracy. The method developed in the article can be used to predict the mobilization process taking into account the impact of random factors

Ключевые слова: ДОЛЯ МОБИЛИЗОВАННЫХ, СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС, ВЕРОЯТНОСТЬ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Keywords: SHARE OF MOBILIZED, RANDOM PROCESS, PROBABILITY, MATHEMATICAL EXPECTATION, DIFFERENTIAL EQUATION

<http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-211-014>

Введение

Для исследования социально-экономических процессов применяются различные математические модели. Одной из таких моделей является модель мобилизации. Под мобилизацией понимается вовлечение

населения в политическую партию или общественное движение (борьба за мир, экология, здоровье и т. д.) [6].

В последние годы сфера применения данного класса моделей существенно расширилась. Рассматриваются проблемы создания резервных фондов [1], сбора налоговых платежей [2], агитации поступления абитуриентов в ВУЗы [3]. В моделях мобилизации кроме разностных уравнений стали применяться дифференциальные уравнения, в том числе стохастические [5]. Однако, для аналитического решения стохастических дифференциальных уравнений предлагается использовать сложный математический аппарат - интегралы Ито и Стратоновича [4].

Целью данной статьи является разработка математической модели процесса мобилизации с учетом случайных факторов. В качестве математического аппарата предлагается использовать сечения случайного процесса и замену значений случайной величины ее математическим ожиданием в соответствии с теоремой Чебышева.

Методы и материалы

Как известно [1], процесс мобилизации описывается формулой:

$$x' = \alpha(1-x) - \beta x, \quad (1)$$

где α и β - постоянные коэффициенты, либо заданные [2], либо вычисляемые [3], $x = x(t)$ - доля мобилизованных.

Однако, в этом процессе имеется также и случайная составляющая, с учетом которой уравнение (1) запишется в виде:

$$x' = \alpha(1-x) - \beta x + X', \quad (2)$$

где X - случайный процесс, зависящий от времени, т. е. $X = X(t)$.

Как известно, X' - тоже случайный процесс, зависящий от времени, т. е. $X' = X'(t)$. Процесс $X(t)$ будем рассматривать как марковский, т. е. при отсутствии последействия. Решение уравнения [1] известно [1]:

$$x(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \left(x_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) e^{-(\alpha + \beta)(t - t_0)}, \quad (3)$$

при $x(t_0) = x_0$.

Рассмотрим процесс $X(t)$. Найдем условия его выражения через $M[X(t)]$. Дифференцируя полученное выражение, найдем приближенно (с заданной точностью) выражение для $X'(t)$ через неслучайную функцию, зависящую от времени. Затем решаем уравнение (2) с полученной неслучайной функцией вместо $X'(t)$ как обычное дифференциальное уравнение первого порядка с правой частью. Это решение будет учитывать как неслучайное слагаемое $\alpha(1 - x) - x\alpha$ в (2), так и случайное слагаемое $X'(t)$ в (2).

Случайную составляющую $X(t)$ представим в виде процесса. Для этого фиксируем промежутки времени (t_{k-1}, t_k) , $k = \overline{1, n}$. При этом каждое значение t_k ($k = \overline{0, n}$) будет соответствовать разрезу $X(t)$, на котором $X(t)$ является случайной величиной $x(t)$, т. е. принимает определенные значения с соответствующими вероятностями. Рассмотрим это подробно. Сначала рассмотрим случай, когда вероятность мобилизации одной единицы равна вероятности не мобилизации, одинакова для всех единиц и равна p . Кроме того, в любой момент времени t_k ($k = \overline{1, n}$) число мобилизованных либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1, т. е. рассматривается модель, аналогичная модели «гибели и размножения». Пусть в момент времени t_1 $X(t)$ принимает значение $x_1 = 1$. Тогда в момент t_2 $X(t)$ может принять либо значение $x_0 = 0$ с вероятностью $p = 1/2$, либо значение $x_2 = 2$ с вероятностью $1 - p = 1/2$. В первом случае мобилизованный в момент времени t_0 разочаруется и убывает. Во втором случае он остается, и к нему присоединяется еще один мобилизованный. В момент времени t_3 $X(t)$ может принять дважды значения: $x_1 = 1$ с

вероятностью $p = 1/3$, (либо мобилизованный в момент времени t_0 , затем в момент времени t_1 убывший, снова вернулся, либо не убывший в момент t_1 , остался), $X(t)$ может принять значение $x_3 = 3$ с вероятностью $p = 1/3$. Более полно изменения $X(t)$ со временем показаны на рис. 1.

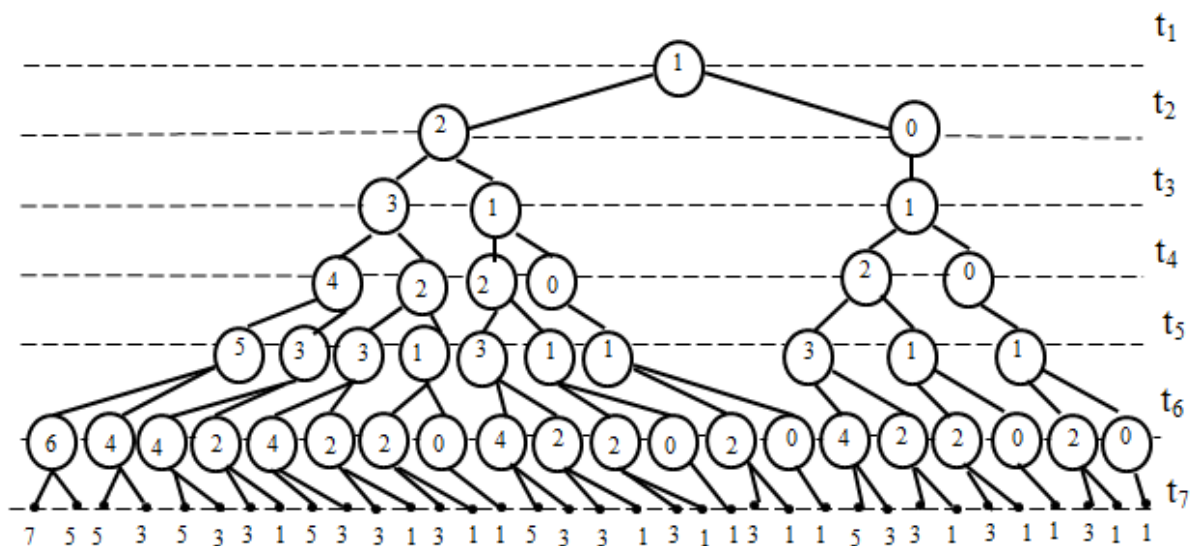


Рис. 1. Изменения $X(t)$ со временем

Это бинарное дерево, соответствующее семи временным разрезам t_i ($i = \overline{1, 7}$). Для краткости будем использовать обозначение i для описания события $x_i = i$.

Результаты и их обсуждение

Найдем математические ожидания временных разрезов с учетом отсутствия последействия (табл. 1):

Таблица 1. Зависимость математических ожиданий от временных разрезов

t_k	m_k
1	$m_1 = x_1 \cdot p_1 = 1 \cdot 1 = 1;$
2	$m_2 = x_0 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 0 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5 = 1$
3	$m_3 = x_1 \cdot \frac{2}{3} + x_3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1,6667;$
4	$m_4 = x_0 \cdot \frac{2}{6} + x_2 \cdot \frac{3}{6} + x_4 \cdot \frac{1}{6} = 0 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{3}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1,6667$

5	$m_5 = x_1 \cdot \frac{5}{10} + x_3 \cdot \frac{4}{10} + x_5 \cdot \frac{1}{10} = 1 \cdot \frac{5}{10} + 3 \cdot \frac{4}{10} + 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5} = 2,2;$
6	$m_6 = x_0 \frac{5}{20} + x_2 \frac{9}{20} + x_4 \frac{5}{20} + x_6 \frac{1}{20} = 0 \frac{5}{20} + 2 \frac{9}{20} + 4 \frac{5}{20} + 6 \frac{1}{20} = \frac{44}{20} = 2,2;$
7	$m_7 = x_1 \frac{15}{42} + x_3 \frac{20}{42} + x_5 \frac{6}{42} + x_7 \frac{1}{42} = 1 \frac{15}{42} + 3 \frac{20}{42} + 5 \frac{6}{42} + 7 \frac{1}{42} = \frac{8}{3} = 2,6667;$
8	$m_8 = x_0 \frac{15}{84} + x_2 \frac{35}{84} + x_4 \frac{26}{84} + x_6 \frac{7}{84} + x_8 \frac{1}{84} = \frac{8}{3} = 2,6667;$
9	$m_9 = x_1 \frac{50}{153} + x_3 \frac{61}{153} + x_5 \frac{33}{153} + x_7 \frac{8}{153} + x_9 \frac{1}{153} = \frac{463}{153} = 3,0261;$
10	$m_{10} = x_0 \frac{50}{306} + x_2 \frac{111}{306} + x_4 \frac{94}{306} + x_6 \frac{41}{306} + x_8 \frac{9}{306} + x_{10} \frac{1}{306} = \frac{926}{306} = 3,0261.$

По условию задачи можно считать, что на каждом полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ значение математического ожидания остается неизменным и равно m_k . Аналогичное замечание имеет место и для дисперсии. В то же время на рассматриваемом участке математическое ожидание является функцией времени, уравнение которой можно построить по найденным значениям m_k (табл. 1):

$$M(t) = at + b = 0,2446t + 0,7658. \quad (4)$$

Покажем, что случайную величину X_k каждого временного сечения с заданной степенью точности можно заменить ее математическим ожиданием. Для этого проведем следующие рассуждения.

Из неравенства Чебышева следует, что

$$P(|X_k - m_k| < \varepsilon_k) \geq 1 - \frac{D_k}{\varepsilon_k^2}, \quad (5)$$

где m_k - математическое ожидание X_k , D_k - дисперсия X_k , ε_k - сколь угодно малое положительное число.

Заметим, что это неравенство всегда выполняется, если $1 - D_k / \varepsilon_k^2 < 0$, т. е.

$$\varepsilon_k^2 < D_k. \quad (6)$$

Пусть y_{k_i} - i -ое ($i = \overline{1, l_k}$) значение случайной величины X_k , имеющее частоту n_{k_i} , причем $\sum_{i=1}^{l_k} n_{k_i} = n_k$.

$$\text{В этом случае } D_k = \sum_{i=1}^{l_k} \frac{n_{k_i}}{n_k} \cdot y_{k_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{l_k} \frac{n_{k_i}}{n_k} \cdot y_{k_i} \right)^2.$$

Потребуем выполнения условия (6). Тогда

$$\sum_{i=1}^{l_k} \frac{n_{k_i}}{n_k} \cdot y_{k_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{l_k} \frac{n_{k_i}}{n_k} \cdot y_{k_i} \right)^2 > \varepsilon_k^2.$$

Умножим обе части на n_k^2 , получим:

$$n_k \cdot \sum_{i=1}^{l_k} n_{k_i} \cdot y_{k_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{l_k} \frac{n_{k_i}}{n_k} \cdot y_{k_i} \right)^2 > n_k^2 \varepsilon_k^2. \quad (7)$$

Из (7) получаем:

$$\sum_{i=1}^{l_k} n_k^2 \cdot y_{k_i}^2 + \sum_{i=1}^{l_k} n_{k_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{l_k} n_{k_j} \cdot y_{k_j}^2 - \sum_{i=1}^{l_k} n_{k_i}^2 \cdot y_{k_i}^2 - 2 \sum_{i=1}^{l_k} n_{k_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{l_k} n_{k_j} \cdot y_{k_i} \cdot y_{k_j} > n_k^2 \varepsilon_k^2.$$

Отсюда

$$\frac{1}{n_k^2} \cdot \sum_{i=1}^{l_k} n_{k_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{l_k} n_{k_j} \cdot (y_{k_j} - y_{k_i})^2 > \varepsilon_k^2. \quad (8)$$

Пусть $\varepsilon_0 = \min_{l_k} \varepsilon_k$. Тогда для всех сечений t_k ($k = \overline{1, n}$) можно с точностью ε_0 заменять случайную величину X_k на ее математическое ожидание m_k и построить уравнение регрессии (4). Тогда $M(t) = at + b$ и

$$x(t) = \frac{\alpha + a}{\alpha + \beta} + \left(x_0 - \frac{\alpha + a}{\alpha + \beta} \right) e^{-(\alpha + \beta)(t - t_0)}. \quad (9)$$

Уравнение (9) позволяет исследовать процесс мобилизации с учетом воздействия случайных факторов, прогнозировать развитие процесса.

Заключение

В статье разработан новый метод моделирования мобилизационного процесса с учетом воздействия на него случайных факторов. Метод отличается относительной вычислительной простотой и наглядностью.

Дальнейшим развитием проведенных в статье исследований является графическое представление полученных в статье результатов и построение эконометрических моделей мобилизационных процессов.

Литература

1. Ганичева А.В. Математическая модель оптимального управления резервными средствами в учебном процессе // В мире научных открытий. 2015. № 12-3 (72). С. 953-964.
2. Ганичева А.В. Модель мобилизации налоговых платежей // Бизнес. Образование. Право. Вестник Волгоградского института бизнеса. 2018. № 2 (43). С. 98–104.
3. Ганичева А.В. Математическая модель профориентационной работы. Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение. 2019. № 4 (60). С. 14-27.
4. Лукшин А.В., Смирнов С.Н. Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений // Математическое моделирование. 1990. № 2 (11). С. 108-121.
5. Магомедова Е.С., Магомедов Р.И. Стохастическая модель общественно-политической мобилизации // Актуальные проблемы математики и информационных технологий: материалы Всероссийской конференции. Махачкала: Издательство ДГУ, 2024. С. 87-92.
6. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов: Учебное пособие для высших учебных заведений. М.: Логос, 2001. 296 с.

References

1. Ganicheva A.V. Matematicheskaja model' optimal'nogo upravlenija rezervnymi sredstvami v uchebnoe processe // V mire nauchnyh otkrytij. 2015. № 12-3 (72). S. 953-964.
2. Ganicheva A.V. Model' mobilizacii nalogovyh platezhej // Biznes. Obrazovanie. Pravo. Vestnik Volgogradskogo instituta biznesa. 2018. № 2 (43). S. 98–104.
3. Ganicheva A.V. Matematicheskaja model' proforientacionnoj raboty. Sovremennye naukoemkie tehnologii. Regional'noe prilozhenie. 2019. № 4 (60). S. 14-27.
4. Lukshin A.V., Smirnov S.N. Chislennye metody reshenija stohasticheskikh differencial'nyh uravnenij // Matematicheskoe modelirovanie. 1990. № 2 (11). S. 108-121.
5. Magomedova E.S., Magomedov R.I. Stohasticheskaja model' obshhestvenno-politicheskoy mobilizacii // Aktual'nye problemy matematiki i informacionnyh tehnologij: materialy Vserossijskoj konferencii. Mahachkala: Izdatel'stvo DGU, 2024. S. 87-92.
6. Plotinskij Ju.M. Modeli social'nyh processov: Uchebnoe posobie dlja vysshih uchebnyh zavedenij. M.: Logos, 2001. 296 s.