

УДК 51-77

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы в экономике (физико-математические науки, экономические науки)

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Ануфриева Анна Петровна
доцент, кандидат экономических наук
gubskaya-a@mail.ru
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
технологический университет» Краснодар, Россия

Чолахян Ангелина Рубеновна
Студентка
РИНЦ SPIN-код:0009-0003-7710-1328
angelina1125@yandex.ru
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
технологический университет» Краснодар, Россия

Производственные функции (ПФ) выступают в роли сложных математических моделей, охватывающих крупномасштабные производственные процессы, отрасли, региональные и национальные экономические системы. Эти модели дают возможность осуществлять глубокий экономический анализ, не достижимый простыми методами расчетов. Так, модели, основанные на эконометрическом анализе производственных функций, представляют собой ключевой инструмент для исследования воздействия изменений в затратах на трудовые ресурсы, капитал и материалы на объём выпускаемой продукции. В структуре экономики любой страны промышленный сектор занимает важное место, обеспечивая население необходимыми товарами, услугами и рабочими местами. Исходя из его значимости для национального благополучия, актуальным становится изучение того, как ключевые факторы воздействуют на объёмы промышленного производства. Основная задача исследования заключается в анализе эконометрических моделей, применяемых для оценки и прогнозирования экономических явлений в сфере производства и оказания услуг. В рамках статьи рассматривается эволюция развития эконометрических моделей производственных функций, а также разбирается система критериев для выбора оптимальной модели. Особое внимание уделяется модели Кобба-Дугласа: изучаются её теоретические основы, свойства, а также достоинства и недостатки, что позволяет глубже понять механизмы функционирования промышленного сектора

Ключевые слова: ПРОМЫШЛЕННОСТЬ, ПРОИЗВОДСТВО, ДОХОДЫ, РАСХОДЫ, РЕСУРСЫ, КАПИТАЛ, ФАКТОРЫ,

UDC 51-77

5.2.2. Mathematical, statistical and instrumental methods in economics (physical and mathematical sciences, economic sciences)

ECONOMETRIC MODELS OF PRODUCTION FUNCTIONS

Anufrieva Anna Petrovna
Associate Professor, Candidate in Economics
gubskaya-a@mail.ru
Federal State Budgetary Educational Institution
of Higher Education «Kuban State Technological
University» Krasnodar, Russia

Cholakhyan Angelina Rubenovna
Student
RSCI SPIN-code:0009-0003-7710-1328
angelina1125@yandex.ru
Federal State Budgetary Educational Institution
of Higher Education «Kuban State Technological
University» Krasnodar, Russia

Production functions (PF) act as complex mathematical models covering large-scale production processes, industries, regional and national economic systems. These models provide an opportunity to perform deep economic analysis that is not achievable by simple calculation methods. Thus, models based on econometric analysis of production functions are a key tool for studying the impact of changes in labor, capital and material costs on the volume of output. In the structure of the economy of any country, the industrial sector occupies an important place, providing the population with the necessary goods, services and jobs. Based on its importance for national well-being, it becomes relevant to study how key factors affect the volume of industrial production. The main objective of the study is to analyze econometric models used to assess and forecast economic phenomena in the sphere of production and services. The article considers the evolution of the development of econometric models of production functions, and also analyzes the system of criteria for choosing the optimal model. Particular attention is paid to the Cobb-Douglas model: its theoretical foundations, properties, as well as advantages and disadvantages are studied, which allows for a deeper understanding of the mechanisms of functioning of the industrial sector

Keywords: INDUSTRY, PRODUCTION, REVENUES, EXPENSES, RESOURCES, CAPITAL, FACTORS, FORECASTING,

ВВЕДЕНИЕ

Факторы, определяющие уровень производства, всегда были в центре внимания как отечественных, так и зарубежных исследователей.

В условиях современной экономики, характеризующейся сложностью и неопределённостью, возрастает значимость использования эконометрических методов анализа и прогнозирования экономических процессов. Особое место среди них занимают эконометрические модели производственных функций, которые позволяют исследовать взаимосвязи между факторами производства и результатами экономической деятельности, а также прогнозировать объёмы производства и эффективность использования ресурсов.

В ходе исследований учёные разработали ряд математических и статистических методов, представляющих как теоретическую, так и практическую ценность. Данные методы направлены на анализ результатов деятельности предприятий, включая объём производства определённых товаров, величину прибыли и выручки. Эти показатели находятся в прямой зависимости от ключевых производственных факторов, таких как инвестиции в основной капитал и трудовые ресурсы.

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

История разработки производственных функций представляет собой результат многолетних исследований учёных, направленных на изучение ключевых факторов, влияющих на процесс производства. Исследователи как в России, так и за её пределами стремились разработать системы

моделей, которые позволили бы оптимизировать результаты на основе анализа основных движущих сил [1].

В результате были созданы системы моделей, включающие в себя теоретические концепции и практические инструменты. Основным критерием оценки в этих моделях являются показатели работы предприятий, а ключевыми независимыми параметрами – капитальные и трудовые затраты [2].

С развитием технологий, в частности, информационно-коммуникационных, актуальность производственных функций не только сохранилась, но и расширилась. Эти модели продолжают активно использоваться для анализа и оценки функционирования экономических систем на различных уровнях – от микро до макро.

Среди актуальных исследований в этой области выделяются работы таких авторов, как: Афанасьев А.А., Аширбаев Б.И., Бессонов В.А., Кокоткина Т.Н., Пащенко О.А., Пыхтеева И.В., Силаева М.В.

В конце XIX – начале XX веков в экономической науке начался процесс математизации, который привёл к появлению неоклассического анализа. В это время сформировалось понятие производственной функции (ПФ).

В основополагающем труде Марка Блауга «Экономическая мысль в ретроспективе» подробно исследуется эволюция производственных функций. В частности, автор уделяет внимание квадратичной производственной функции, предложенной Д. Рикардо [3].

Особое внимание заслуживает критический анализ работ Блауга, в котором он рассматривает аргументы Ф. Уикстида о равенстве совокупной стоимости продукции и суммарных издержек каждого производственного ресурса, распределённых в соответствии с их предельной производительностью. Основные принципы данного подхода, предложенные Блаугом, строго применимы лишь к моделям производства,

подобным модели Кобба-Дугласа, что ограничивает их универсальность. Также он рассматривает доводы, предложенные Флаксом в поддержку этого утверждения [3].

В контексте теоремы Эйлера об однородных функциях возникает вопрос: исчерпал ли себя продукт? Это интересная тема для обсуждения, которое проводит Флакс.

М. Блауг описывает формальные свойства подобных функций и предостерегает от возможных ошибок при использовании некоторых экономических показателей.

Основные идеи данного метода опираются на четкие правила, применяемые исключительно к производственным моделям, схожим с функцией Кобба-Дугласа [4]. Эффективность отдельного ресурса может меняться только при изменении соотношения различных факторов производства. Так, существует связь между переменными и фиксированными ресурсами, где рост использования переменных факторов приводит к снижению их относительной продуктивности, но в то же время способствует увеличению эффективности стационарных ресурсов [5].

Важно отметить, что общий объем продукции определяется как произведение затрат на факторы производства и их предельной продуктивности. Это означает, что показатели зависят от распределения общего дохода. Данная структура соответствует функции Кобба-Дугласа и подразумевает её эластичность.

Исторически значимой стала работа Чарльз Кобба и Полом Дугласом «Теория производства», опубликованная в 1928 году. Она заложила фундамент для развития макроэкономических представлений о производственных функциях, а также стимулировала эмпирические исследования для подтверждения теоретических положений [4].

В контексте экономической интерпретации линейно однородных моделей производства можно утверждать: полное покрытие продукта выплатами за факторы происходит только при условии их строгой линейной однородности, когда распределение ресурсов оптимизировано по предельным показателям эффективности.

При исследовании ситуации, когда производственная функция отличается от линейной однородной функции первого порядка, необходимо учитывать несколько ключевых аспектов. Во-первых, следует обратить внимание на механизмы функционирования рынка производственных факторов. Здесь оценка стоимости ресурсов осуществляется на основании их предельной продуктивности в рамках производственного процесса, что верно вне зависимости от типа производственной функции [6].

Во-вторых, нарушение линейной однородности первого порядка влечет за собой несоответствие между долями факторов производственной деятельности и фактическим объёмом продукта. Это несоответствие может привести к недостаточно эффективному распределению ресурсов.

Таким образом, понимание этих аспектов имеет критическое значение для оптимизации процессов и достижения максимальной производительности [6].

В случае, если масштабы производства приводят к снижению его эффективности, рыночный механизм распределения ресурсов может оказаться недостаточным для покрытия всех издержек. В результате часть стоимости произведённой продукции остаётся нераспределённой и распределяется между «постоянными» факторами производства.

В условиях, когда эффект масштаба оказывает положительное влияние, итоговый результат может быть искажен. Это происходит из-за того, что вклад каждого ключевого фактора оценивается ниже его максимальной эффективности. Отдельные элементы системы получают

меньше воздействия, чем могли бы при оптимальном использовании. Эти явления можно объяснить через анализ соотношения между максимальными и средними затратами.

В долгосрочной перспективе, при неизменной зависимости производственной функции от масштаба, затраты на производство становятся постоянными. Это выражается в горизонтальном положении кривой средних затрат. Если производительность увеличивается или затраты снижаются, предельные затраты становятся ниже средних. В такой ситуации предприятие может стать убыточным. И в данном случае ценообразование на основе предельных затрат становится неэффективным и не может покрыть общие расходы на производство [3].

Концепция Хотеллинга-Лернера подчеркивает, что если бы в каждой отрасли цены формировались исходя из предельных издержек, то для отраслей с убывающими предельными издержками потребовались бы государственные субсидии. При этом, важно отметить, что экономия от масштаба, приводящая к монополизации рынка, уничтожает конкуренцию и, как следствие, препятствует оптимальной оплате факторов производства по их предельной производительности. В результате, когда долгосрочные предельные издержки превышают средние, неизбежно возникает излишек, что свидетельствует о неэффективности распределительного механизма.

Подобный подход к анализу основополагающих принципов производственных функций позволяет проникнуть в суть ключевых областей экономических знаний, что способствует формированию более глубокого и всестороннего понимания экономических процессов.

Дальнейшее развитие методологии производственных функций связано с работами В. В. Леонтьева. Производственная функция Леонтьева, построенная в рамках линейной алгебры, представляет собой математическое выражение, описывающее связь между объёмом выпуска продукции и используемыми факторами производства [7].

КРИТЕРИИ ВЫБОРА ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Тип производственной функции [8]:

а) производственная функция Кобба-Дугласа – это функция, которая предполагает постоянную отдачу от масштаба и однородность степени один;

б) функция CES (Constant Elasticity of Substitution) представляет собой производственную функцию, которая позволяет учитывать различные комбинации факторов производства;

в) производственная функция Транслог – это функция, которая позволяет учесть нелинейные эффекты и взаимодействия между факторами производства.

2. Тип данных:

а) панельные данные: наблюдения собраны для разных объектов (например, стран, регионов, компаний) за несколько периодов времени;

б) временные ряды: наблюдения собраны для одного объекта за несколько периодов времени;

в) перекрестные данные: наблюдения собраны для нескольких объектов в один период времени.

3. Наличие и характер пропущенных данных:

а) если данные содержат много пропущенных значений, то может потребоваться использовать методы для их заполнения или удаления;

б) если пропущенные значения случайны, то можно использовать методы для их игнорирования;

в) если пропущенные значения систематичны, то может потребоваться провести дополнительный анализ для выявления причин и устранения.

4. Наличие и характер выбросов: если данные содержат выбросы, то необходимо провести дополнительный анализ для выявления причин и удаления. Выбросы могут быть вызваны ошибками в сборе данных, аномальными условиями производства или другими факторами. Для удаления выбросов можно использовать следующие методы:

- а) удаление наблюдений с наибольшими или наименьшими значениями;
- б) удаление наблюдений, лежащих за пределами определенного диапазона;
- в) использование методов робастной регрессии.

5. Наличие и характер мультиколлинеарности: если факторы производства сильно коррелируют друг с другом, то может необходимо провести дополнительный анализ для выявления причин и удаления одного из факторов. Мультиколлинеарность может привести к неустойчивым оценкам параметров и затруднить интерпретацию результатов. Для уменьшения мультиколлинеарности можно использовать методы, такие как:

- а) удаление одного из факторов;
- б) использование методов робастной регрессии;
- в) включение дополнительных факторов.

6. Наличие и характер гетероскедастичности: если дисперсия ошибок модели зависит от значений факторов производства, то может потребоваться провести дополнительный анализ. Гетероскедастичность может привести к неустойчивым оценкам параметров и затруднить интерпретацию результатов. Для борьбы с гетероскедастичностью можно использовать следующие методы:

- а) взвешенный метод наименьших квадратов;
- б) использование робастных оценок.

7. Наличие и характер автокорреляции: если ошибки модели коррелируют друг с другом во времени, то может провести дополнительный анализ.

Автокорреляция может привести к неустойчивым оценкам параметров и затруднить интерпретацию результатов. Для борьбы с автокорреляцией можно использовать методы, такие как:

- а) обобщенный метод наименьших квадратов;
- б) использование робастных оценок.

8. Качество модели: коэффициент детерминации R^2 : показывает, какая часть дисперсии зависимой переменной объясняется независимой переменной. Скорректированный коэффициент детерминации R^2_{adj} : учитывает количество параметров в модели и может быть более точным показателем качества модели.

Стандартная ошибка модели: показывает, насколько хорошо модель соответствует данным. Тест на значимость параметров: показывает, насколько значимы параметры модели.

9. Наличие и характер эндогенности: если факторы производства могут быть эндогенными (зависящими от других факторов), то может провести дополнительный анализ. Эндогенность может привести к смещенным оценкам параметров и затруднить интерпретацию результатов.

Для борьбы с эндогенностью можно использовать следующие методы:

- а) инструментальные переменные;
- б) двухшаговый метод наименьших квадратов.

10. Наличие и характер структурных изменений: если в данных есть структурные изменения (например, изменение технологии, изменение цен на ресурсы), то может провести дополнительный анализ. Структурные изменения могут привести к смещенным оценкам параметров и затруднить

интерпретацию результатов. Для учета структурных изменений можно использовать методы, такие как:

- а) динамические модели;
- б) методы с учетом структурных изменений.

11. Наличие и характер нелинейности: если функция производства нелинейна, то нужно провести дополнительный анализ. Нелинейность может привести к смещенным оценкам параметров и затруднить интерпретацию результатов.

Для учета нелинейности можно использовать методы, такие как:

- а) нелинейные модели;
- б) методы с учетом нелинейности.

Выбор эконометрической модели производственной функции включает в себя следующие этапы [9]:

- 1) необходимо провести анализ данных и определить, какие факторы производства являются наиболее важными;
- 2) провести анализ качества модели и определить, какая модель лучше всего подходит для данных;
- 3) провести анализ наличия и характера проблем в данных и определить, какие методы можно использовать для их решения;
- 4) на основе проведенного анализа можно выбрать наиболее подходящую модель производственной функции.

Важно помнить, что выбор модели производственной функции зависит от многих факторов, и не существует универсального подхода. Необходимо провести тщательный анализ данных и выбрать модель, которая лучше всего подходит для конкретной задачи.

ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ ЧАРЛЬЗА КОББА И ПОЛА ДУГЛАСА (КОББА-ДУГЛАСА): СВОЙСТВА, ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ

Модели экономического роста, базирующиеся на неоклассических предпосылках, предполагают:

1) наличие полной занятости на рынке труда и в других секторах, где цены являются высоко эластичными и быстро реагируют на изменения спроса и предложения;

2) возможность взаимозаменяемости факторов производства, что предполагает способность заменять один ресурс на другой без потерь в процессе создания товаров [10].

Научные исследования, направленные на изучение влияния качества и пропорций факторов (труда и капитала), привели к значительному открытию – разработке модели производственной функции Чарльза Кобба и Пола Дугласа. Это стало возможным благодаря:

1) математической переработке исходной производственной функции, что позволило более точно отобразить реальные условия ведения производства;

2) учету неполной взаимозаменяемости факторов, что отличает её от традиционной модели, в которой факторы считались бесконечно взаимозаменяемыми.

Таким образом, модель Кобба-Дугласа существенно обогатила экономическую теорию, предложив более точную интерпретацию процессов экономического роста и производственных возможностей.

Функция Чарльза Кобба и Пола Дугласа была получена путём математических преобразований исходной производственной функции.

$$Y = F(L, K)$$

(1)

Она была преобразована в виде наглядной модели, отражающей долю фактора производства, участвующего в создании продукта, в общем объеме этого продукта. В наиболее распространенном варианте функция производства одного товара с использованием двух факторов может быть представлена следующим образом:

$$Y(L, K) = AK^aL^b,$$

(2)

где Y – общий объем производства;

L – трудовые затраты;

K – вложения капитала

A – общая факторная производительность;

a – эластичность выпуска капитала, которая изменяется в пределах от 0 до 1;

b – эластичность выпуска рабочей силы

$$b = 1 - a$$

(3)

Модель Чарльза Кобба и Пола Дугласа служит механизмом для анализа взаимосвязи между двумя основными факторами производства. Коэффициент A обозначает эффективность технологического процесса и сохраняет стабильность в краткосрочном периоде. Параметры a и b показывают, как меняется объем выпуска при изменении одного из факторов, а именно капитала или труда. Если стоимость капитала

соответствует его предельному продукту, а цена труда соответствует предельному продукту труда, то a и b демонстрируют долю дохода от капитала (aY) и труда (bY).

Таким образом, если труд и капитал вознаграждаются в соответствии с их предельными продуктами, коэффициент a и b отражают распределение дохода между этими факторами. Условие $b = 1 - a$ приводит к равенству $a + b = 1$, что указывает на постоянные возвраты от увеличения масштабов производства. Например, эмпирические значения могут быть следующими: $A = 1,1$; $a = 1/4$; $b = 3/4$, это подразумевает, что доля капитала составляет 25 %, а труда – 75 %.

Оптимизация производственных процессов требует внимания к повышению эффективности применения ресурсов, что выявляет наилучшие методы их использования:

$$MP_k = aY / K$$

(4)

Аналогичным образом определяется предельная производительность труда (MP):

$$MP_L = py / 1$$

(5)

Рассмотрим ключевые свойства производственной функции Чарльза Кобба и Пола Дугласа.

1. Одним из основных свойств этой функции является постоянная отдача от масштаба, что можно выразить следующей формулой:

$$F_{(nK,nL)} = nAK^aL^b$$

(6)

Данная формула демонстрирует, что увеличение объемов капитала и труда в n раз приведет к пропорциональному увеличению объема производства (или дохода) также в n раз.

2. Еще одна важная характеристика функции – изменение предельной производительности факторов. Если мы увеличим капитал, оставляя количество труда неизменным, то при тех же условиях предельная производительность труда (MP_L) возрастет, а предельная производительность капитала (MP_K) упадет. В случае увеличения труда предельная производительность труда будет понижаться, а капитала, наоборот, повышаться. Такой дисбаланс приводит к снижению производственной эффективности, однако увеличение параметра A , например, за счет внедрения новых технологий, может одновременно повысить предельные продуктивности труда и капитала, что способствует экономическому росту.

3. В рамках функции наблюдается стабильное соотношение доходов от труда и капитала, то есть доли в национальном продукте остаются постоянными.

Преимущества производственной функции Кобба-Дугласа [11]:

1) относительная простота и универсальность модели, которая строится на реальных экономических показателях и может быть легко адаптирована под конкретные условия;

2) возможность оптимизации использования ресурсов, позволяющая анализировать текущее использование труда и капитала, определять узкие места и области для улучшения;

3) применение для сценарного анализа, помогающее оценить влияние различных факторов на объём производства и рассчитать ожидаемые объёмы выпуска для каждого сценария.

Недостатки производственной функции Кобба-Дугласа:

1) отсутствие точных показателей, вызванное критикой представителей австрийской школы экономики, которые указывали на отсутствие значимых и экономически правильных мер измерения;

2) отсутствие микроэкономических оснований, поскольку факторы производственной функции не были разработаны на основе знаний в области инженерии, технологии или управления производственным процессом;

3) вывод на основе статистических данных о прошлом, который не даёт сущностного объяснения происходящих процессов в сфере производства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках экономической теории производственная функция определяет технологическую взаимосвязь между ресурсными затратами и объемами выпускаемой продукции. Она выступает как центральный элемент ключевых неоклассических концепций, обеспечивая анализ предельного вклада каждого фактора производства.

Основной целью производственной функции является оптимизация распределения ограниченных ресурсов между различными компонентами производства: капиталом, трудом и природными ресурсами. Этот процесс подразумевает повышение общей эффективности экономики без непосредственного фокуса на технологических аспектах достижения технической совершенства.

В макроэкономическом контексте производственные функции

применяются для комплексного анализа национального продукта. Они позволяют разграничить вклад в экономический рост между увеличением физического капитала (например, инвестициями) и прогрессом технологий. Так, изучая изменения параметров производственной функции на протяжении времени, можно выявить влияние основных фондов и численности, занятых на динамику Валового регионального продукта в России.

Таким образом, эконометрические модели производственных функций занимают особое место в экономической науке. Их практическая значимость многократно подтверждена исследованиями как инструмента для глубокой диагностики и прогнозирования ключевых показателей развития национальной экономики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов С.В. Эконометрические модели производственных функций: история и современность // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2021. – С. 53-57.
2. Афанасьев А.А. Производственная функция Российской экономики с учетом инфраструктуры в 1990-2019 годах // Имущественные отношения в Российской Федерации. – 2021. – С. 6-15.
3. Марк Блауг. Экономическая мысль в ретроспективе. / – Москва: Акад. нар. хоз-ва: Дело, – 2020. – 687 с.
4. Пащенко О.А. Производственные функции экономического роста. Функция Кобба-Дугласа / О. А. Пащенко // Моя профессиональная карьера. – 2020. – С. 7-12.
5. Баранов С.В. Эконометрические модели производственных функций: история и современность // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2022. – С. 53-57
6. Кокоткина Т.Н. Производственные функции в макроэкономическом анализе / Т. Н. Кокоткина, Н. С. Садовин // Развитие территорий. – 2022. – С. 33-40.
7. Википедия. Функция Леонтьева. –
URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_Леонтьева (дата обращения: 02.02.2025 г.)
8. Алехина А.Э. Эконометрика. Учебно-методическое пособие. – Минск: БГУИР, – 2022. – 98 с.
9. Зеткина О.В. Эконометрика: основы математического моделирования социально-экономических процессов. Учебное пособие / Ярославль: ЯрГУ, – 2019. – 124 с.
10. Studfiles. Модель производственной функции. –
URL: <https://studfile.net/preview/355883/page/5/> (дата обращения: 05.02.2025 г.)
11. Финансовый анализ. Производственная функция Кобба-Дугласа. – URL: <https://1-fin.ru/?id=281&t=2364> (дата обращения: 05.02.2025 г.)

REFERENCES

1. Baranov S.V. Jekonometricheskie modeli proizvodstvennyh funkcij: istorija i sovremennost' // Mezhdunarodnyj zhurnal prikladnyh i fundamental'nyh issledovanij. – 2021. – S. 53-57.
2. Afanas'ev A.A. Proizvodstvennaja funkcija Rossijskoj jekonomiki s uchetom infrastruktury v 1990-2019 godah // Imushhestvennye otnoshenija v Rossijskoj Federacii. – 2021. – S. 6-15.
3. Mark Blaug. Jekonomicheskaja mysl' v retrospektive. / – Moskva: Akad. nar. hoz-va: Delo, – 2020. – 687 s.
4. Pashhenko O.A. Proizvodstvennye funkcii jekonomicheskogo rosta. Funkcija Kobba-Duglasa / O. A. Pashhenko // Moja professional'naja kar'era. – 2020. – S. 7-12.
5. Baranov S.V. Jekonometricheskie modeli proizvodstvennyh funkcij: istorija i sovremennost' // Mezhdunarodnyj zhurnal prikladnyh i fundamental'nyh issledovanij. – 2022. – S. 53-57
6. Kokotkina T.N. Proizvodstvennye funkcii v makrojekonomicheskom analize / T. N. Kokotkina, N. S. Sadovin // Razvitie territorij. – 2022. – S. 33-40.
7. Vikipedija. Funkcija Leont'eva. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Funkcija_Leont'eva (data obrashhenija: 02.02.2025 g.)
8. Alehina A.Je. Jekonometrika. Uchebno-metodicheskoe posobie. – Minsk: BGUIR, – 2022. – 98 s.
9. Zetkina O.V. Jekonometrika: osnovy matematicheskogo modelirovanija social'no-jekonomicheskikh processov. Uchebnoe posobie / Jaroslavl': JarGU, – 2019. – 124 s.
10. Studfiles. Model' proizvodstvennoj funkcii. – URL: <https://studfile.net/preview/355883/page:5/> (data obrashhenija: 05.02.2025 g.)
11. Finansovyj analiz. Proizvodstvennaja funkcija Kobba-Duglasa. – URL: <https://1-fin.ru/?id=281&t=2364> (data obrashhenija: 05.02.2025 g.)