

УДК 001.89

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы экономики (физико-математические науки, экономические науки)

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ДИСКОНТИРОВАННОЙ СТОИМОСТИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Ганичева Антонина Валериановна
к.ф.-м.н., профессор кафедры “Физико-математических дисциплин и информационных технологий”
tgan55@yandex.ru
Тверская государственная сельскохозяйственная академия, Тверь, Россия

Ганичев Алексей Валерианович
старший преподаватель кафедры “Информатики и прикладной математики”
SPIN-код: 4747-0880, AuthorID: 178091
alexej.ganichev@yandex.ru
Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

Статья посвящена разработке инновационного метода оценки дисконтированной стоимости денежных потоков инвестиционных проектов в условиях неопределенности процентной ставки. Авторы предлагают два подхода к учету нечеткой информации: на основе треугольных и гауссовых нечетких чисел. В первом случае процентная ставка моделируется как треугольное число, что позволяет рассчитать границы и среднее значение дисконтированной стоимости через разложение функции в ряд Маклорена. Во втором подходе используется гауссово нечеткое число с заданной функцией принадлежности, что обеспечивает более гибкое описание неопределенности. Исследование демонстрирует решение как прямой задачи (расчет стоимости при нечеткой ставке), так и обратной (определение ставки по заданному денежному потоку). Для линейной модели денежного потока ($f(t) = at + b$) получены аналитические выражения дисконтированной стоимости и ее функции принадлежности. Особое внимание уделено погрешностям аппроксимации и методам их минимизации. Практическая значимость работы заключается в возможности применения модели для управления инвестициями в условиях неполных данных. Предложенные методы позволяют учитывать экспертные оценки и адаптировать расчеты к реальным экономическим сценариям. Результаты могут быть использованы в финансовом анализе, стратегическом планировании и оценке рисков

Ключевые слова: ДЕНЕЖНЫЙ ПОТОК, ИНВЕСТИЦИИ, ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА,

UDC 001.89

5.2.2. Mathematical, statistical and instrumental methods of economics (physical and mathematical sciences, economic sciences)

DISCOUNT VALUE ESTIMATION MODEL UNDER UNCERTAINTY

Ganicheva Antonina Valerianovna,
Cand.Phys-Math.Sci., Professor of the Department of Physical and Mathematical Sciences and Information Technologies
RSCI SPIN-code: 9049-4545, AuthorID: 177856,
tgan55@yandex.ru
Tver state agricultural academy, Tver, Russia

Ganichev Alexey Valerianovich
Associate Professor of the Department of Computer Science and Applied Mathematics
RSCI SPIN code: 4747-0880, AuthorID: 178091
alexej.ganichev@yandex.ru
Tver State Technical University, Tver, Russia,

The article is devoted to the development of an innovative method for estimating the discounted value of cash flows of investment projects in the context of interest rate uncertainty. The authors propose two approaches to accounting for fuzzy information: based on triangular and Gaussian fuzzy numbers. In the first case, the interest rate is modeled as a triangular number, which makes it possible to calculate the boundaries and the average value of the discounted value by decomposing the function into a Maclaurin series. The second approach uses a Gaussian fuzzy number with a given membership function, which provides a more flexible description of uncertainty. The study demonstrates the solution of both the direct problem (calculating the cost at a fuzzy rate) and the reverse (determining the rate based on a given cash flow). Analytical expressions of the discounted value and its membership function are obtained for the linear cash flow model ($f(t) = at + b$). Special attention is paid to approximation errors and methods of their minimization. The practical significance of the work lies in the possibility of applying a model for investment management in conditions of incomplete data. The proposed methods make it possible to take into account expert assessments and adapt calculations to real economic scenarios. The results can be used in financial analysis, strategic planning, and risk assessment

Keywords: CASH FLOW, INVESTMENT, INTEREST RATE, INTERVAL, FACTOR,

Введение

В настоящее время для решения многих задач в бизнесе, экономике и финансах находит применение теория нечетких множеств [3] и нечеткий логический вывод.

В предлагаемом исследовании рассмотрен новый подход к построению моделей дисконтирования в условиях неопределенности.

Дисконтированная стоимость применяется в экономических исследованиях для сравнения денежных потоков инвестиций, формируемых в разные периоды времени [2]. С помощью модели дисконтирования можно определить необходимый объем вложений инвестора для получения данного потока денежных средств. Дисконтированная стоимость рассчитывается как для дискретного, так и для непрерывного начисления процентов.

Материалы и методы

Дисконтированная стоимость денежного потока инвестиционного проекта (Π) при условии непрерывного начисления процентов определяется по формуле [2]:

$$\Pi = \int_0^T f(t)e^{-pt} dt,$$

где $f(t)$ - интенсивность денежного потока, p – процентная ставка, $[0, T]$ – интервал поступления инвестиций.

В классических экономических задачах процентную ставку считают известным, постоянным на интервале поступления инвестиций, числом.

Инновационная технология оценки дисконтированной стоимости разработана в статье [1]. Величина Π рассматривается как функция $\Pi(p)$

случайной величины p . По известному закону распределения p , можно найти закон распределения Π и ее числовые характеристики.

Однако, во многих ситуациях этот денежный поток инвестиций формируется в условиях неопределенности, поэтому значение p зависит от множества разных факторов.

В таких ситуациях целесообразно рассматривать p как нечеткое число. Примем, что это треугольное число вида $p = [p_1, p_2]$. Тогда дисконтированная стоимость Π является функцией $\Pi(p)$ нечеткого числа.

Рассмотрим для примера случай, когда функция, характеризующая денежный поток инвестиций, имеет линейный вид $f(t) = at + b$ (a, b – постоянные коэффициенты). Найдем функцию нечеткого аргумента $\Pi(p)$.

В дальнейшем все рассуждения будем детально проводить для левой границы числа p , т.е. для p_1 . Эти же рассуждения будут справедливы и для правой границы p_2 , а также для любой внутренней точки отрезка $[p_1, p_2]$.

Разложим функцию $e^{-p_1 t}$ в ряд Маклорена, ограничиваясь первыми тремя членами. Погрешность при таком разложении составит $\frac{(p_1 t)^3}{6} \cdot e^{-\varepsilon}$ (величина ε заключена между значением $p_1 t$ и 0).

Вычислим функцию $\Pi(p_1)$:

$$\begin{aligned} \Pi(p_1) &= \int_0^T (at + b) \left(1 - p_1 t + \frac{p_1^2 t^2}{2}\right) dt = \\ &= \frac{aT^4}{8} p_1^2 + \left(\frac{b-2a}{6} T^3 - \frac{b}{2} T^2\right) p_1 + \frac{aT^2}{2} + bT. \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда $\Pi(p_2)$ будет равна:

$$\Pi(p_2) = \frac{aT^4}{8} p_2^2 + \left(\frac{b-2a}{6} T^3 - \frac{b}{2} T^2\right) p_2 + \frac{aT^2}{2} + bT. \quad (2)$$

Среднее значение дисконтированной стоимости $\bar{\Pi}$ при изменении процентной ставки на интервале $[p_1, p_2]$ по закону прямоугольного треугольника определяется выражением:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = \frac{\Pi(p_1) + \Pi(p_2)}{2} = \frac{aT^4}{16}(p_1^2 + p_2^2) + \\ + \left(\frac{b-2a}{12}T^3 - \frac{bT^2}{4} \right)(p_1^2 + p_2^2) + \frac{aT^2}{2} + bT. \end{aligned} \quad (3)$$

Можно решить и обратную задачу, т.е. по заданным значениям дисконтированных стоимостей $\Pi(p_1)$ и $\Pi(p_2)$ определить процентные ставки p_1 и p_2 .

Рассчитаем p_1 .

Вычтем из левой части выражения (1) правую часть, получаем:

$$\frac{aT^4}{8}p_1^2 + \left(\frac{b-2a}{6}T^3 - \frac{b}{2}T^2 \right)p_1 + \frac{aT^2}{2} + bT - \Pi(p_1) = 0.$$

Выразим p_1 через $\Pi(p_1)$:

$$p_1 = \frac{-d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - 4d_0d_2}}{2d_0}, \quad (4)$$

где $d_1 = \left(\frac{b-2a}{6}T^3 - \frac{b}{2}T^2 \right)$, $d_0 = \frac{aT^4}{8}$, $d_2 = \frac{aT^2}{2} + bT - \Pi(p_1)$.

Аналогично определяется p_2 через $\Pi(p_2)$.

Результаты и их обсуждение

Другой подход к учету изменения процентной ставки на интервале $[p_1, p_2]$ заключается в следующем.

Значение процентной ставки p на интервале $[c_1, c_2]$ считаем гауссовым нечетким числом [4] с функцией принадлежности:

$$\mu_A(p) = \frac{1}{(c_2 - c_1)} e^{\frac{-(p-m_p)^2}{2\sigma_p^2}}, \quad (5)$$

где m_p - модальное значение (ядро) нечеткого числа, σ_p - коэффициент концентрации (носитель).

Функция принадлежности четкой функции Π нечеткого аргумента p , т.е. $\Pi = \varphi(p)$ определяется следующим образом:

$$\mu_B(\Pi) = \sup_{p \in \varphi^{-1}(\Pi)} \mu_A(p), \quad \varphi^{-1}(\Pi) = \{p : p \in P, \varphi(p) = \Pi\} \quad (P - \text{нечеткое множество значений процентной ставки}).$$

значений процентной ставки).

Тогда, с учетом (1), значение дисконтированной стоимости денежного потока и ее функция принадлежности будут определяться формулами (6)-(7):

$$\Pi(p) = \frac{aT^4}{8} p^2 + \left(\frac{b-2a}{6} T^3 - \frac{b}{2} T^2 \right) p + \frac{aT^2}{2} + bT. \quad (6)$$

$$\mu_B(\Pi) = \frac{1}{(c_2 - c_1)} \left[\frac{aT^4}{8} e^{\frac{-(p-m_p)^4}{4\sigma_p^4}} + \left(\frac{b-2a}{6} T^3 - \frac{b}{2} T^2 \right) e^{\frac{-(p-m_p)^2}{2\sigma_p^2}} + \frac{aT^2}{2} + bT \right]. \quad (7)$$

На основе известных (или задаваемых путем применения методов экспертных оценок) значений p , m_p и σ_p можно по формулам (6)-(7) рассчитать ожидаемую дисконтированную стоимость денежного потока и ее функцию принадлежности.

Заключение

Разработанный в статье метод может быть использован в экономических исследованиях для управления инвестициями. На основе предложенной модели можно рассчитать как дисконтированную стоимость денежного потока при нечеткой информации о процентной ставки, так и решить обратную задачу: для данного потока инвестиций определить необходимую процентную ставку.

Литература

1. Ганичева А.В. Метод расчета инвестиций в условиях неопределенности // Инновационные процессы - основа модели стратегического развития АПК в XXI веке: материалы международной научно-практической конференции. Тверь: Тверская ГСХА, 2011. С. 117-119.
2. Математика в экономике: учебник: ч. 2. / А.С. Солодовников [и др.]. М.: Финансы и статистика. 2007. 560 с.
3. Недосекин А.О. Нечёткие множества и финансовый менеджмент. СПб, 2003. 184 с.
4. Раскин Л.Г., Серая О.В. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения. Харьков: Парус, 2008. 352 с.

References

1. Ganicheva A.V. Metod rascheta investicij v uslovijah neopredelennosti // Innovacionnye processy - osnova modeli strategicheskogo razvitija APK v XXI veke: materialy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Tver': Tverskaja GSHA, 2011. S. 117-119.
2. Matematika v jekonomike: uchebnik: ch. 2. / A.S. Solodovnikov [i dr.]. M.: Finansy i statistika. 2007. 560 s.
3. Nedosekin A.O. Nechjotkie mnozhestva i finansovyj menedzhment. SPb, 2003. 184 s.
4. Raskin L.G., Seraja O.V. Nechetkaja matematika. Osnovy teorii. Prilozhenija. Har'kov: Parus, 2008. 352 s.