УДК 631.8:519.24

UDC 519.71; 51-76

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы экономики (физико-математические науки, экономические науки)

5.2.2. Mathematical, statistical and instrumental methods of economics (physical and mathematical sciences, economic sciences)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ДОЗ ВНОСИМЫХ УДОБРЕНИЙ

A MATHEMATICAL MODEL FOR OPTIMIZING THE DOSES OF APPLIED FERTILIZERS

Ганичева Антонина Валериановна
к.ф.-м.н., профессор кафедры “Физико-математических дисциплин и информационных технологий“,
SPIN-код: 9049-4545, AuthorID: 177856
tgan55@yandex.ru
Тверская государственная сельскохозяйственная академия, ул. Василевского, дом 7, поселок Сахарово, Тверь, 17131, Россия

Ганичев Алексей Валерианович
старший преподаватель кафедры “Информатики и прикладной математики“
SPIN-код: 4747-0880, AuthorID: 178091
alexej.ganichev@yandex.ru
Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия,
170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, дом 22, Россия

Ganicheva Antonina Valerianovna
Cand.Phys-Math.Sci., Professor of the Department of Physical and Mathematical Sciences and Information Technologies
RSCI SPIN-code: 9049-4545, AuthorID: 177856
tgan55@yandex.ru
Tver state agricultural academy, ul.Vasilevskogo, 7, pos.Saharovo, Tver, 171314, Russia

Ganichev Alexey Valerianovich
Senior lecturer of the Department of Computer Science and Applied Mathematics,
RSCI SPIN-code: 4747-0880, AuthorID: 178091
alexej.ganichev@yandex.ru
Tver State Technical University,
Nikitina nab., 22, Tver, 170026, Russia

Проблема программирования доз удобрений, вносимых в почву для выращивания растений, является важной и особенно актуальной в условиях цифрового сельского хозяйства. Для расчета доз удобрений используются данные полевых опытов и результаты моделирования. В данной статье разработана новая аналитическая методика оптимизации доз удобрений. Для построения модели используется метод оптимизации задач нелинейного программирования. Получены необходимые и достаточные условия максимума функции прибыли

The problem of programming doses of fertilizers applied to the soil for growing plants is important and especially relevant in the context of digital agriculture. Field experiment data and simulation results are used to calculate fertilizer doses. This article develops a new analytical method for optimizing fertilizer doses. To build a model method of optimizing nonlinear programming problems is used. Necessary and sufficient conditions of profit function maximum are obtained

Ключевые слова: УРОЖАЙ, ФУНКЦИЯ ОТКЛИКА, ЭКСТРЕМУМ, ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, КРИТЕРИЙ СИЛЬВЕСТРА

Keywords: YIELD, RESPONSE FUNCTION, EXTREMUM, PARTIAL DERIVATIVES, SYLVESTER CRITERION

http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-204-046

Введение

Проблема оптимизации доз вносимых удобрений в почву является одной из важнейших в сельском хозяйстве. Особую актуальность эта проблема приобретает с переходом производства сельскохозяйственной продукции к цифровому сельскому хозяйству. Научные исследования в данной области сводятся преимущественно к обработке экспериментальных данных, полученных в ходе натурных экспериментов [1, 3]. Разработаны практические рекомендации по внесению доз удобрений в почву. Однако, проведение натурных экспериментов связано с существенными материальными затратами и не всегда возможно. Еще одним направлением оптимизации доз вносимых удобрений является математическое моделирование. Для построения математических моделей используются преимущественно численные методы оптимизации [2, 3]. Аналитические методы поиска экстремумов функций практически не используются для решения рассматриваемой проблемы.

Целью данной статьи является разработка модели оптимизации доз вносимых удобрений с использованием метода нелинейного программирования.

Для осуществления цели нужно решить следующие задачи:

1) сформировать функцию отклика урожая от доз удобрений;

2) задать критерий оптимальности (функцию прибыли);

3) сформулировать необходимые и достаточные условия экстремума целевой функции;

4) определить оптимальный план и значения целевой функции при его реализации.

Материалы и методы

Для питания и роста сельскохозяйственным растениям прежде всего необходимы разнообразные макроэлементы, прежде всего азот, фосфор и калий.

Результаты опытов [4] показывают, что для описания зависимости урожая Y сельскохозяйственных растений от доз внесенных удобрений (азота N, фосфора P и калия K) удобно использовать функцию отклика в виде квадратичной зависимости:

$$Y = a_1 N^2 + a_2 P^2 + a_3 K^2 + a_4 NP + a_5 NK + a_6 KP + a_7 N + a_8 P + a_9 K + a_{10}, \quad (1)$$

причем значения коэффициентов a_i $(i=\overline{1,10})$ можно найти с помощью экспериментальных данных методом наименьших квадратов.

Квадратичная функция отклика (в виде квадратичной формы) позволяет учитывать нелинейный характер увеличения урожая при росте количества вносимых в почву удобрений. Также уравнение в виде квадратичной формы позволяет учесть и взаимодействие факторов (доз внесенных макроэлементов).

Соотношение *NPK* в удобрении обычно приводят в процентах.

Рассмотрим применение метода нахождения экстремума нелинейной функции к задаче программирования урожая.

Здесь надо иметь в виду, что определение доз вносимых удобрений для получения максимума урожая не всегда оправдано, т.к. при приближении к точке максимума урожай растет медленно (частные производные близки к нулю), а затраты на удобрения растут значительно. Поэтому в качестве критерия оптимальности полезно принять либо максимум прибыли, либо минимум себестоимости продукции.

Функция прибыли вычисляется по формуле:

$$\Pi = MY - Z,$$

где M – стоимость единицы продукции, Z – функция затрат, которая, как правило, рассчитывается по формуле:

$$Z = a_N \cdot N + a_P \cdot P + a_K \cdot K,$$

где a_N, a_P, a_K - стоимость единицы соответственно азотных, фосфорных и калийных удобрений.

Пусть B – постоянные затраты, не зависящие от расходов на удобрения. Таким образом, функция прибыли имеет вид:

$$\Pi = M(a_1N^2 + a_2P^2 + a_3K^2 + a_4NP + a_5NK + a_6KP + a_7N + a_8P + a_9K + a_{10}) - \\ - a_N N - a_P P - a_K K - B.$$

Поэтому необходимым условием максимума прибыли является условие:

$$
\begin{aligned}
d\Pi / dN = 0, \text{ т.е. } M \cdot (2a_1 N + a_4 P + a_5 K + a_7) = a_N, \\
d\Pi / dP = 0, \text{ т.е. } M \cdot (2a_2 P + a_4 N + a_5 K + a_8) = a_P, \\
d\Pi / dK = 0, \quad \text{т.е. } M \cdot (2a_3 K + a_5 N + a_6 P + a_9) = a_K,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Для нахождения экстремума найдем вторые частные производные функции *П*. Итак,

$$
\begin{aligned}
d^2\Pi / dN^2 = 2Ma_1;\ d^2\Pi / dP^2 = 2Ma_2;\ d^2\Pi / dK^2 = 2Ma_3; \\
d^2\Pi / dNdP = Ma_4;\ d^2\Pi / dNdK = Ma_5;\ d^2\Pi / dPdK = Ma_5; \\
d^2\Pi / dKdN = Ma_5;\ d^2\Pi / dKdP = Ma_6; d^2\Pi / dPdN = Ma_4.
\end{aligned}
$$

Составим определитель

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 2Ma_1 & Ma_4 & Ma_4 \\ Ma_4 & 2Ma_2 & Ma_5 \\ Ma_5 & Ma_6 & 2Ma_3 \end{vmatrix}.
$$

Далее используем критерий Сильвестра:

функция *П* будет выпуклой тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы вторых частных производных будут неотрицательны, т.е.

$$
2Ma_1 \ge 0;\ \begin{vmatrix} 2Ma_1 & Ma_4 \\ Ma_4 & 2Ma_2 \end{vmatrix} \ge 0;\ \Delta \ge 0.
$$

Отсюда находим:

$$
Ma_1 \ge 0;\ 4M^2 a_1 a_2 \ge M^2 a_4{}^2;
$$

$$
6M^3 a_1 a_2 a_3 + 2M^3 a_4 a_5{}^2 + 2M^3 a_4{}^2 a_6 - 2M^3 a_2 a_4 a_6 - 2M^2 a_1 a_5 a_6 - 2M^2 a_4{}^2 a_3 \ge 0, \text{ т.е.}
$$

$$
\begin{cases} Ma_1 \ge 0; \\ 4a_1 a_2 \ge a_4{}^2; \\ 3Ma_1 a_2 a_3 + 2Ma_4 a_5{}^2 + 2Ma_4{}^2 a_6 - 2Ma_2 a_4 a_6 - a_1 a_5 a_6 - a_4{}^2 a_3 \ge 0. \end{cases}
\tag{3}
$$

Если выполняются условия (2) и (3), то в точке, которая находится из системы (2), будет минимум.

Исследуем условия максимума. Согласно критерию Сильвестра, функция *П* будет вогнутой тогда и только тогда, когда все главные миноры будут чередовать знак, начиная с отрицательного минора. Для рассматриваемого случая:

$$2Ma_1 < 0;\ \begin{vmatrix} 2Ma_1 & Ma_4 \\ Ma_4 & 2Ma_2 \end{vmatrix} > 0;\ \Delta < 0. \tag{4}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} Ma_1 < 0; \\ 4a_1a_2 > a_4{}^2; \\ 3Ma_1a_2a_3 + 2Ma_4a_5{}^2 + 2Ma_4{}^2a_6 - 2Ma_2a_4a_6 - a_1a_5a_6 - a_4{}^2a_3 < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, если выполняются условия (2), (5), то в точке, которая определяемой из (2), будет максимум.

Решение систем уравнений (3) и (5) позволяет учесть влияние цен удобрений на конечный результат практической деятельности. Причем в ценах удобрений можно учитывать потери от их вредного воздействия.

Для расчета доз удобрений, обеспечивающих минимум себестоимости продукции, найдем минимум функций себестоимости $S = Z / Y$, т.е.

$$S = (a_N \cdot N + a_P \cdot P + a_K \cdot K) / (a_1N^2 + a_2P^2 + a_3K^2 + a_4NP + a_5NK + a_6KP + \\ + a_7N + a_8P + a_9K + a_{10}).$$

Обозначим для краткости знаменатель через Q, тогда

$$dS / dN = [a_N \cdot Q - (a_N \cdot N + a_P \cdot P + a_K \cdot K) \cdot (2a_1N + a_4P + a_5K + a_7)] / Q^2;$$

$$dS / dP = [a_P \cdot Q - (a_N \cdot N + a_P \cdot P + a_K \cdot K) \cdot (2a_2P + a_4N + a_6K + a_8)] / Q^2;$$

$$dS / dK = [a_K \cdot Q - (a_N \cdot N + a_P \cdot P + a_K \cdot K) \cdot (2a_3K + a_5N + a_6P + a_9)] / Q^2.$$

Приравняв к нулю правые части данных уравнений и решив систему, получим точки, подозрительные на экстремум.

Далее используется критерий Сильвестра определения достаточного условия минимума нелинейной функции, аналогичного системе неравенств [3].

Из-за громоздкости записи приводить вторые производные не будем.

Результаты и их обсуждение

Таким образом, разработана аналитическая методика, в которой в качестве целевой функции используются критерии: 1) максимума урожая; 2) максимума прибыли; 3) минимум затрат; 4) минимум функций себестоимости.

При нахождении экстремума функции прибыли определены системы неравенств, определяющих ее максимум и минимум, Зная значения максимума и минимума, можно определить диапазон возможных значений прибыли.

Разработанная методика может применяться не только для целевой функции в виде квадратичной формы, но и для других нелинейных функций (например, логистической, экспоненциальной и т.д.). При наличии громоздких и сложных выражений для первых и вторых частных производных можно воспользоваться численными методами их отыскания. Сложные неравенства, определяющие необходимые достаточные условия экстремума, также могут быть решены с помощью численных методов.

При наличии ограничений на количества внесенных макроэлементов или условий их взаимодействия задача оптимизации доз удобрений будет решаться методом неопределенных множителей Лагранжа.

Более сложной является проблема расчета урожаев сельскохозяйственных культур с учетом воздействия атмосферных загрязнений. Практика показывает, что потери урожая, связанные с выбросами в атмосферу промышленными предприятиями вредных веществ (сернистого ангидрида SO_2, аммиака NH_3, промышленной пыли и др.), линейно зависят от их концентраций. Что касается расходов на очистку, то они растут нелинейно в зависимости от понижения уровня концентраций вредных выбросов, их измерение скорее приближается к экспоненциальному виду, и поэтому попытка добиться нулевого уровня вредных выбросов обычно связана с очень значительными затратами.

Заключение

В статье разработана новая аналитическая методика, позволяющая оптимизировать дозы внесенных в почву удобрений по различным критериям. Для реализации данной методики не требуется наличия сложного программного обеспечения и больших затрат вычислительных ресурсов.

Литература

1. Дричко В.Ф. Зависимость урожая сельскохозяйственных культур от дозы удобрений (функция отклика) / Плодородие, 2010. - № 2. - С. 25-27.
2. Митрофанов С.В. Математические модели по рациональному формированию систем удобрения / С.В. Митрофанов [и др.] // Международный научный сельскохозяйственный журнал, 2019. - № 2. – С. 36-43.
3. Новиков С.Б Математические методы для расчета оптимальных доз удобрений на основе полевых опытов // Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение, 2011. - №3 (27). - С. 100-106.
4. Тищенков И.Е., Бордюгов Ю.П. Применение метода корреляции при анализе зависимости урожайности от доз вносимых удобрений // Интенсификация сельскохозяйственного производства: сборник научных трудов. - Горки: БСХА МСХ, 1971. - Вып. 16. - С. 50-56.

References

1. Drichko V.F. Zavisimost' urozhaja sel'skohozjajstvennyh kul'tur ot dozy udobrenij (funkcija otklika) / Plodorodie, 2010. № 2. S. 25-27.
2. Mitrofanov S.V. Matematicheskie modeli po racional'nomu formirovaniju sistem udobrenija / S.V. Mitrofanov [i dr.] // Mezhdunarodnyj nauchnyj sel'skohozjajstvennyj zhurnal, 2019. № 2. – S. 36-43.
3. Novikov S.B Matematicheskie metody dlja rascheta optimal'nyh doz udobrenij na osnove polevyh opytov // Sovremennye naukoemkie tehnologii. Regional'noe prilozhenie, 2011. №3 (27). S. 100-106.
4. Tishhenkov I.E., Bordjugov Ju.P. Primenenie metoda korreljacii pri analize zavisimosti urozhajnosti ot doz vnosimyh udobrenij // Intensifikacija sel'skohozjajstvennogo proizvodstva: sbornik nauchnyh trudov. Gorki: BSHA MSH, 1971. Vyp. 16. S. 50-56.