УДК 330.43 : 519.2

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы в экономике (физико-математические науки, экономические науки)

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Орлов Александр Иванович
д.э.н., д.т.н., к.ф.-м.н., профессор
РИНЦ SPIN-код: 4342-4994
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, prof-orlov@mail.ru

В экономике и управлении, во всех отраслях промышленности и областях деятельности успешно применяют различные статистические методы. Прикладная статистика - это наука о том, как обрабатывать данные. В ней по виду решаемых задач выделяют три области - описание данных, оценивание, проверку гипотез. Один из наиболее известных методов оценивания - это метод максимального правдоподобия, основанный на максимизации функции правдоподобия. В настоящей статье изучен этот метод в наиболее общей постановке и рассмотрено его обобщение на случай, когда задача оптимизации функции правдоподобия не может быть решена. Впервые найдено необходимое и достаточное условие состоятельности оценки максимального правдоподобия в общем случае. Для этого понадобилось привлечь математический аппарат статистики в пространствах произвольной природы - центральной области статистики нечисловых данных. Затем изучена ситуация, когда решение задачи максимизации функции правдоподобия не существует. В этом случае для оценки функции распределения из соответствующего множества предложено использовать введенную в статье обобщенную оценку максимального правдоподобия. Такой подход отдаленно напоминает метод регуляризации Тихонова, предназначенный для решения некорректных операторных задач. Рассмотрены примеры оценок обобщенного максимального правдоподобия. Как показано в статье, ими являются, в частности, эмпирическая функция распределения и ее симметризация, полученная в предположении, что оцениваемая функция распределения симметрична относительно нуля. Симметризованная функция применяется, в частности, при проверке однородности связанных выборок. Сформулирован ряд нерешенных задач, связанных с разработкой обобщенного метода максимального правдоподобия. Их решению должны быть посвящены дальнейшие исследования

UDC 330.43: 519.2

5.2.2. Mathematical, statistical and instrumental methods in economics (physical and mathematical sciences, economic sciences)

GENERALIZED MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD

Orlov Alexander Ivanovich
Dr.Sci.Econ., Dr.Sci.Tech., Cand.Phys-Math.Sci., professor
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

In economics and management, in all industries and fields of activity, various statistical methods are successfully used. Applied statistics is the science of how to process data. It distinguishes three areas based on the type of problems being solved: data description, evaluation, and hypothesis testing. One of the most well-known estimation methods is the maximum likelihood method, which is based on maximizing the likelihood function. This article studies this method in its most general formulation and considers its generalization to the case when the likelihood function optimization problem cannot be solved. For the first time, a necessary and sufficient condition for the consistency of the maximum likelihood estimate in the general case has been found. To do this, it was necessary to use the mathematical apparatus of statistics in spaces of arbitrary nature - the central area of statistics of non-numerical data. Then we studied the situation when a solution to the likelihood function maximization problem does not exist. In this case, to estimate the distribution function from the corresponding set, it is proposed to use the generalized maximum likelihood estimator introduced in the article. This approach is vaguely reminiscent of Tikhonov's regularization method, intended for solving ill-posed operator problems. Examples of generalized maximum likelihood estimates are considered. As shown in the article, they are, in particular, the empirical distribution function and its symmetrization, obtained under the assumption that the estimated distribution function is symmetric about zero. The symmetrized function is used, in particular, when checking the homogeneity of related samples. A number of unsolved problems related to the development of a generalized maximum likelihood method are formulated. Therefore, further research should be devoted to their solution

Ключевые слова: СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, ОЦЕНИВАНИЕ, МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ, СТАТИСТИКА НЕЧИСЛОВЫХ ДАННЫХ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Keywords: STATISTICAL METHODS OF ECONOMICS, MATHEMATICAL STATISTICS, ESTIMATION, MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD, STATISTICS OF NON-NUMERICAL DATA, LIMIT THEOREMS

http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-198-020

Введение

В экономике и управлении, во всех отраслях промышленности и областях деятельности успешно применяют различные статистические методы. Прикладная статистика - это наука о том, как обрабатывать данные. В ней по виду решаемых задач выделяют три области - описание данных, оценивание, проверку гипотез.

Один из наиболее известных методов оценивания - это метод максимального правдоподобия, основанный на максимизации функции правдоподобия. В настоящей статье изучим этот метод в наиболее общей постановке и обсудим его обобщение на случай, когда задача оптимизации функции правдоподобия не может быть решена.

Основные понятия в пространстве произвольной природы

В соответствии с наиболее распространенной вероятностной моделью данных рассмотрим выборку $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - совокупность n независимых одинаково распределенных величин. Как известно, случайная величина - это функция, определенная на пространстве элементарных событий со значениями в некотором пространстве A. Чаще всего в качестве A рассматривают множество действительных чисел или конечномерных векторов, но это предположение не является обязательным в современной теории вероятностей. Пространство A может быть произвольным, в частности, нечисловым. Следовательно, нет необходимости специально определять, например, понятия случайного бинарного отношения или случайного множества. В этих случаях речь идет о случайных величинах со значениями в пространстве бинарных отношений и пространстве всех подмножеств некоторого множества.

Отметим важную с точки зрения математики подробность. В общем определении случайной величины речь идет также об алгебрах измеримых множеств. Однако если пространство A является конечным множеством, то естественно считать все его подмножества измеримым и тем самым избавиться от необходимости изучать проблемы измеримости.

Для определения понятия "плотность распределения вероятностей" в пространстве A должна быть задана некоторая мера μ. Функция $f(x)$, $x \in A$, является плотностью случайной величины X тогда и только тогда, когда для любого (измеримого) подмножества B пространства A выполнено равенство

$$P(X \in B) = \int_B f(x)\mu(dx). \quad (1)$$

Если пространство A является множеством действительных чисел, а мера μ отрезка единичной длины равна 0, то в правой части формулы (1) стоит обычный интеграл. Аналогично, если пространство A - конечномерное евклидово пространство, то правая часть формулы (1) - это известный в математическом анализе многомерный интеграл.

В параметрической статистике принимают, что плотность зависит от параметра, который можно оценить по выборке. Подробнее: плотность распределения вероятностей элементов выборки имеет вид $f(x,\theta)$, где $\theta \in \Theta$. По выборке X_1, X_2, ..., X_n необходимо оценить значение параметра $\theta \in \Theta$.

Для решения этой задачи разработан ряд методов. Один из них основан на рассмотрения функции правдоподобия

$$g(X_1, X_2, ..., X_n; \theta) = f(X_1, \theta) f(X_2, \theta) ... f(X_n, \theta), \quad (2)$$

т.е. плотность совместного распределения n элементов выборки в наблюдаемой точке n-мерного пространства ($X_1, X_2, ..., X_n$).

Если выборка $X_1, X_2, ..., X_n$ взята из распределения со значением параметра $\theta_0 \in \Theta$, то естественно ожидать, что значение функции правдоподобия (2) максимально по $\theta \in \Theta$ (при фиксированных $X_1, X_2, ..., X_n$) именно в точке $\theta_0 \in \Theta$. Это соображение дает интуитивное основание оценивать неизвестное значение параметра $\theta_0 \in \Theta$, путем максимизации функции правдоподобия (2). Другими словами, предлагается использовать оценку максимального правдоподобия θ^* - решение задачи оптимизации

$$g(X_1, X_2, ..., X_n; \theta) \to \max_{\theta}, \ \theta \in \Theta. \qquad (3)$$

Обсудим это предложение.

Оценки максимального правдоподобия в пространствах общей природы

При изучении оценки максимального правдоподобия необходимо ответить на ряд вопросов:

- существует ли решение задачи (3);
- является ли оно единственным;
- является ли оценка максимального правдоподобия состоятельной;
- как соотносится эта оценка с другими оценками того же параметра?

Если множество значений параметра Θ бикомпактно (т.е. из любого покрытия Θ открытыми множествами можно выделить конечное покрытие), то оценка максимального правдоподобия существует. Бикомпактное пространство обобщает понятие о замкнутых ограниченных подмножествах конечномерного евклидова пространства на топологические пространства произвольной природы.

Контрпримеры показывают, что решение задачи (3) может быть не единственным.

При естественных предположениях (см., например, [1]) оценка максимального правдоподобия является состоятельной. Ниже подробнее изучим асимптотическое поведение таких оценок.

Среди всех оценок одномерного параметра $\theta \in \Theta$ дисперсия оценки максимального правдоподобия, как правило, является асимптотически минимальной. Она принадлежит к классу наилучших асимптотически нормальных оценок. Однако при конечных объемах выборок в ряде случаев существуют оценки с меньшей дисперсией. Например, несмещенные оценки.

В некоторых случаях задачу (3) удается решить в явном виде, т.е. выписать оценки максимального правдоподобия в явном виде. Например, если известно, что элементы выборки имеют нормальное распределение с двумя неизвестными параметрами - математическим ожиданием и дисперсией, то оценками максимального правдоподобия этих параметров являются выборочное среднее арифметическое элементов выборки и выборочная дисперсия.

Однако во многих случаях (например, при оценивании параметров гамма-распределения или бета-распределения) задачу (3) нельзя решить в явном виде. Некоторые авторы предлагают использовать те или иные численные методы. Однако сходимость таких методов надо доказывать в каждом конкретном случае. Кроме того, имеются погрешности вычислений, в результате чего проходится поставить под сомнение даже состоятельность результатов численной оптимизации. Так, из результатов статистики интервальных данных следует, что дисперсия таких оценок не может быть меньше некоторой положительной величины. Можно пытаться преодолеть это затруднение, увязывая точность вычислений с объемом выборки - чем он больше, тем точнее должны проводиться вычисления (с двойной точностью и т.п.).

Поэтому в [2, 3] рекомендуется вместо оценок максимального правдоподобия использовать одношаговые оценки, т.е. первую итерацию при решении задачи (3) по методу Ньютона-Рафсона). Эти оценки, как и оценки максимального правдоподобия, являются наилучшими асимптотически нормальными оценками, т.е. в асимптотике эти два вида оценок одинаково хороши. Более того, одношаговые оценки отличаются от оценок максимального правдоподобия на бесконечно малые более высокого порядка (по сравнению с отклонениями оценок рассматриваемых видов от оцениваемого параметра). Однако весомым преимуществом одношаговых оценок является то, что они задаются явными формулами, а потому описанные выше сложности вычислительных процедур решения задачи (3) снимаются.

Однако в распространенных учебниках по теории вероятностей и математической статистике продолжают рекламировать оценки максимального правдоподобия, а об одношаговых оценках даже не упоминают. Причина - в традиции, в том, что такие учебники соответствуют научному уровню середины XX в. Пора менять эту традицию.

Поскольку максимум функции с положительными значениями достигается в той же точке, что и максимум ее логарифма, то из (2) и (3) следует, что для получения оценок максимального правдоподобия надо решать оптимизационную задачу

$$\ln g(X_1, X_2, ..., X_n; \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(X_i \theta) \to \max_{\theta}, \ \theta \in \Theta. \qquad (4)$$

Для изучения асимптотического поведения оценок максимального правдоподобия можно применить результаты статистики нечисловых данных (точнее, статистики в пространствах общей природы - центральной области статистики нечисловых данных). Решением задачи (4) является множество

$$E_n(X_1, X_2, ..., X_n) = Arg\max_{\theta \notin \Theta}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\ f(X_i, \theta)\right). \qquad (5)$$

Здесь использовано обозначение Arg max - совокупность всех значений параметра, для которых достигается максимум в задаче (4). Отметим, что в правой части (5) стоит множество, которое может состоять более чем из одной точки. Правая часть (5) задает множество возможных значений оценок максимального правдоподобия.

В соответствии с Законом больших чисел теории вероятностей выборочное среднее арифметическое в правой части (5) сходится при безграничном росте объема выборки к математическому ожиданию слагаемых, т.е.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\ f(X_i, \theta) \to M\left(\ln\ f(X_1, \theta)\right) \qquad (6)$$

при $n \to +\infty$ (при выполнении соответствующих условий регулярности). Введем теоретический аналог правой части соотношения (5):

$$E(X_1) = Arg\max_{\theta \notin \Theta}\left(M(\ln\ f(X_i, \theta)\right). \qquad (7)$$

Отметим, что соотношение (5) задает аналог эмпирического среднего, а (7) - теоретического среднего.

В статистике нечисловых данных найдены условия, при которых

$$E_n(X_1, X_2, ..., X_n) \to E(X_1) \qquad (8)$$

при $n \to +\infty$. В левой и правой частях соотношения (8) стоят, вообще говоря, множества, поэтому уточнение понятия сходимости в (8) требует использования соответствующих математических конструкций, разработанных в статистике нечисловых данных [4].

Асимптотическое поведение оценок максимального правдоподобия описывается соотношением (8). Из него вытекает, что для того, чтобы эта оценка, определенная равенством (5), была состоятельной оценкой параметра $\theta_0 \in \Theta$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\{\theta_0\} = E(X_1) = \underset{\theta \notin \Theta}{Arg\max}\left(M(\ln f(X_i, \theta)\right). \qquad (9)$$

Таким образом, необходимо, чтобы множество (7) состояло из одной точки, совпадающей с $\theta_0 \in \Theta$.

Случай, когда множество возможных значений параметра Θ лежит в конечномерном евклидовом пространстве, глубоко изучен в классической математической статистике [1].

Основная идея обобщенного метода максимального правдоподобия

При соответствующих условиях регулярности, приведенных в монографиях и учебниках по математической статистике, решение задачи (4), называемое оценкой максимального правдоподобия, существует, состоятельно, асимптотически эффективно. Для числовых случайных величин рассмотрим совокупность функций распределения

$$Q(\Theta) = \left\{ \int_{-\infty}^{x} f(x, \theta) dx, \ \theta \in \Theta \right\}.$$

Одним из условий регулярности является существование взаимно однозначного соответствия между Θ и $Q(\Theta)$. Поэтому можно считать, что $\Theta = Q(\Theta)$, т.е. параметрическое пространство Θ является подмножеством множества всех функций распределения, которое мы обозначим Q_0.

В некоторых важных для приложений случаях оценка максимального правдоподобия не существует, регулярность не имеет мета, поскольку некоторые допустимые распределения не имеют плотностей. таково положение, например, когда параметрическим пространством является множество всех функций распределения, т.е. $\Theta = Q_0$. В таких случаях может помочь описанный ниже метод обобщенного максимального правдоподобия.

Пусть X_1, X_2, ..., X_n - независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие неизвестную статистику функцию распределения F, входящую в известное ему семейство распределений $Q \subseteq Q_0$. Оценку F предлагается искать следующим образом. Пусть ρ - метрика Леви в Q_0. Рассмотрим последовательность подмножеств Q_1, Q_2, ..., Q_N, ... множества Q_0, замкнутых в топологии, порожденной метрикой Леви, и таких, что $Q_m \subset Q_p$ при $m < p$, а объединение всех Q_i всюду плотно в Q_0. Пусть оценка максимального правдоподобия существует в обычном смысле при $\Theta = Q \bigcap Q_N$. Обозначим эту оценку F_{nN}. Оценкой обобщенного максимального правдоподобия называется предел F_{nN} при безграничном росте вспомогательного параметра N, т.е.

$$\lim_{N \to \infty} F_{nN} = F_{(n)}, \tag{10}$$

если указанный предел существует.

Естественно, возникают три вопроса.

а) Когда существуют оценки F_{nN}?

б) Когда существует оценка обобщенного максимального правдоподобия?

в) Когда оценка обобщенного максимального правдоподобия является состоятельной?

На первый их этих вопросов ответить довольно легко. Пусть плотность $f(x) = F\,'(x)$ функции распределения $F(x)$ является непрерывной функцией от $F \in Q_N$ при любом x и любом N, причем Q_N - компакты, а Q замкнуто. Тогда $Q \bigcap Q_N$ также компакты, и максимум непрерывной функции достигается, т.е. существует оценка максимального правдоподобия F_{nN}. В то же время автору неизвестны ответы на вопросы б) и в) в общем случае.

Гипотеза. При некоторых условиях регулярности оценка обобщенного максимального правдоподобия существует и является состоятельной.

В ходе дальнейших исследований желательно доказать или опровергнуть эту гипотезу, а также найти какие-либо условия существования и состоятельности оценок обобщенного максимального правдоподобия, частными случаями которых являются приведенные ниже примеры.

Примеры оценок обобщенного максимального правдоподобия

В [5] предложено в качестве Q_N рассматривать совокупность функций распределения, имеющих плотности $f(x)$, обращающиеся в 0 вне замкнутого отрезка $[-N, N]$ и такие, что при всех x, y

$$|f(x) - f(y)| \le N\,|x - y|. \tag{11}$$

Легко видеть, что так определенное Q_N обладает всеми свойствами, сформулированными выше в качестве достаточных условий существования F_{nN}.

Автору известно четыре примера, в которых была вычислена оценка обобщенного максимального правдоподобия.

(I) В случае наиболее обширного параметрического пространства $Q = Q_0$ оценкой обобщенного максимального правдоподобия, как показано ниже, является эмпирическая функция распределения.

(II) Случай, когда Q состоит из всех имеющих плотность $f(x)$ функций распределения $F(x)$ таких, что функция

$$\frac{f(x)}{1-F(x)}$$

не убывает, изучен У. Гренандером [5] в связи со статистическим анализом данных о смертности населения.

(III) Множество Q всех функций распределения, имеющих нулевое математическое ожидание, рассматривал Ю.Н. Тюрин [6].

(IV) Автор изучал [7] множество Q всех непрерывных функций распределения $F(x)$, симметричных относительно нуля, т.е. таких, что при всех x

$$F(x) = 1 - F(-x), \tag{12}$$

а также некоторые пространства функций распределения, удовлетворяющих более сложным условиям симметрии.

Во всех четырех случаях оценки обобщенного максимального правдоподобия являются состоятельными. Более того, в случае (I) эта оценка является также минимаксной, а в случае (IV) - проекцией в естественной метрике эмпирической функции распределения на пространство Q всех непрерывных функций распределения $F(x)$, симметричных относительно нуля, т.е. удовлетворяющих соотношению (12). Во всех случаях в качестве Q_N использовалось ранее введенное множество функций распределения, удовлетворяющих неравенству (11). Исследование эффективности оценок обобщенного максимального правдоподобия - предмет дальнейших исследований, включающих, в частности, формулировку самого понятия эффективности.

Перейдем к вычислению оценки обобщенного максимального правдоподобия в наиболее простом случае (I).

С вероятностью 1 никакие два наблюдения X_1, X_2, ..., X_n не совпадают. Введем в рассмотрение значения плотности $f(x)$ функции распределения наблюдений в точках, включенных в выборку. Обозначим эти значения $F'(X_i) = f(X_i) = c_i$, $i = 1, 2, ..., n$. На основе (11) оценим функцию $f(x)$ снизу. В силу липшицевости $f(x)$ имеем

$$f(x) \geq f_i(x),$$

где $f_i(x)$ - функция треугольного вида, равная c_i в X_i и равная 0 в точках $X_i - \frac{c_i}{N}$ и $X_i + \frac{c_i}{N}$, линейно возрастающая от 0 до c_i на отрезке $\left[X_i - \frac{c_i}{N},\ X_i\right]$ с коэффициентом N при линейном члене и линейно убывающая от c_i до 0 на отрезке $\left[X_i,\ X_i+\frac{c_i}{N}\right]$ с коэффициентом (-N) при линейном члене. Таким образом,

$$f_i(x)=\begin{cases} 0,\ \ x<X_i-\frac{c_i}{N}, \\ N\left(x-X_i+\frac{c_i}{N}\right),\ \ X_i-\frac{c_i}{N}\le x\le X_i, \\ N\left(X_i+\frac{c_i}{N}-x\right),\ \ X_i<x\le X_i+\frac{c_i}{N}, \\ 0,\ \ x>X_i+\frac{c_i}{N}. \end{cases}$$

При достаточно больших N промежутки положительности функций $f_i(x)$ и $f_j(x)$ имеют пустое пересечение при $i\ne j$. Легко видеть, что оценку максимального правдоподобия F_{nN} следует искать среди тех плотностей f, для которых

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x).$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)dx=\frac{c_i^2}{N},$$

то с целью нахождения оценки максимального правдоподобия F_{nN} приходим к оптимизационной задаче

$$\begin{cases} c_1c_2c_3...c_n\to\max, \\ c_1^2+c_2^2+c_3^2+...+c_n^2=N, \\ c_i\ge 0,\ \ i=1,2,3,...,n. \end{cases}$$

Решение этой задачи таково:

$$c_1=c_2=c_3=...=c_n=\sqrt{\frac{N}{n}}.$$

Следовательно, оценкой максимального правдоподобия является функция распределения F_{nN}, построенная путем интегрирования найденной нами плотности. На каждом из интервалов $\left[X_i-\frac{1}{\sqrt{Nn}},\ X_i+\frac{1}{\sqrt{Nn}}\right]$ ее приращение равно $1/n$, а на любом интервале, имеющем пустое пересечение с объединением указанных интервалов, приращение равно 0. Следовательно, расстояние Леви между F_{nN} и эмпирической функцией распределения F_n не превосходит $1/\sqrt{Nn}$, а потому оценка обобщенного максимального правдоподобия существует и совпадает с F_n, являющейся, как известно, состоятельной оценкой F.

Случай (IV) рассматривается аналогично, в тем отличием, что все используемые в рассуждениях функции распределения должны удовлетворять равенству (12), а их плотности должны быть четными. Следовательно, функции треугольного вида должны строиться в $2n$ точках X_i, $(-X_i)$, i = 1, 2, 3, ..., n. Вместо F_n оценка обобщенного максимального правдоподобия - функция распределения G_n, имеющая скачки величиной $1/(2n)$ в этих $2n$ точках. Таким образом,

$$G_n(x) = \frac{F_n(x) + (1 - F_n(-x))}{2}$$

при всех x, кроме $2n$ точек X_i, $(-X_i)$, i = 1, 2, 3, ..., n, а в этих точках G_n определяется так, чтобы быть непрерывной слева, как это требуется в определении функции распределения (отметим, что некоторых литературных источниках от функции распределения требуется, наоборот, непрерывность справа).

Выше отмечено, что в случае (IV) оценка обобщенного максимального правдоподобия является проекцией эмпирической функции распределения на пространство симметричных относительно нуля функций распределения. Геометрическая теория проектирования эмпирической функции распределения на различные распространенные в приложениях пространства развита в работах Ю.Н. Тюрина, Е.В. Хмаладзе, Ю.А. Кошевника [8]. Кроме того, Б.Я. Левит доказал, что оценка обобщенного максимального правдоподобия в случае (IV), т.е. симметризованная эмпирическая функция распределения, является в некотором смысле неулучшаемой. Этот результат является одним из следствий доказанного им обобщения неравенства Гаека на бесконечномерный случай.

Заключение

В статье найдено необходимое и достаточное условие состоятельности оценки максимального правдоподобия в общем случае. Для этого понадобилось привлечь математический аппарат статистики в пространствах произвольной природы - центральной области статистики нечисловых данных.

Затем мы перешли к рассмотрению ситуации, когда решение задачи максимизации функции правдоподобия не существует. В этом случае для оценки функции распределения из соответствующего множества предложено использовать описанную нами обобщенную оценку максимального правдоподобия. Такой подход отдаленно напоминает метод регуляризации Тихонова, предназначенный для решения некорректных операторных задач [9]. Рассмотрены примеры оценок обобщенного максимального правдоподобия. Как показано в статье, ими являются, в частности, эмпирическая функция распределения и ее симметризация, полученная в предположении, что оцениваемая функция распределения симметрична относительно нуля. Симметризованная функция применяется, в частности, при проверке однородности связанных выборок.

Сформулирован ряд нерешенных задач, связанных с разработкой обобщенного метода максимального правдоподобия. Их решению должны быть посвящены дальнейшие исследования.

Литература

1. Боровков А.А. Математическая статистика. Изд. 5-е, стереотипное. - Санкт-Петербург : Лань, 2021. - 704 с.

2. Орлов А.И. Оценивание параметров: одношаговые оценки предпочтительнее оценок максимального правдоподобия // Научный журнал КубГАУ. 2015. №109. С. 208 – 237.

3. Орлов А.И. Прикладной статистический анализ. — М.: Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 812 с.
4. Орлов А.И. Искусственный интеллект: нечисловая статистика : учебник. — М.: Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 446 с.
5. Grenander U. On the theory of mortality measurement. Part II // Scandinav. Aktuarietidskr. 1956. Vol. 39. P. 125-153.
6. Тюрин Ю.Н. Об оценивании функции распределения // Теория вероятностей и ее применения. 1970. Т. 15. № 3. С. 567-568.
7. Орлов А.И. О проверке однородности связанных выборок // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2016. № 123. С. 708–726.
8. Тюрин Ю.Н. Многомерный статистический анализ: геометрическая теория // Теория вероятностей и ее применения. 2010. Т.55. № 1. С. 91–109.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 283 с.

References

1. Borovkov A.A. Matematicheskaya statistika. Izd. 5-e, stereotipnoe. - Sankt-Peterburg : Lan', 2021. - 704 s.
2. Orlov A.I. Ocenivanie parametrov: odnoshagovye ocenki predpochtitel'nee ocenok maksimal'nogo pravdopodobiya // Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2015. №109. S. 208 – 237.
3. Orlov A.I. Prikladnoj statisticheskij analiz. — M.: Aj Pi Ar Media, 2022. — 812 c.
4. Orlov A.I. Iskusstvennyj intellekt: nechislovaya statistika : uchebnik. — M.: Aj Pi Ar Media, 2022. — 446 c.
5. Grenander U. On the theory of mortality measurement. Part II // Scandinav. Aktuarietidskr. 1956. Vol. 39. P. 125-153.
6. Tyurin YU.N. Ob ocenivanii funkcii raspredeleniya // Teoriya veroyatnostej i ee primeneniya. 1970. T. 15. № 3. S. 567-568.
7. Orlov A.I. O proverke odnorodnosti svyazannyh vyborok // Politematicheskij setevoj elektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2016. № 123. S. 708–726.
8. Tyurin YU.N. Mnogomernyj statisticheskij analiz: geometricheskaya teoriya // Teoriya veroyatnostej i ee primeneniya. 2010. T.55. № 1. S. 91–109.
9. Tihonov A.N., Arsenin V.YA. Metody resheniya nekorrektnyh zadach. — M.: Nauka, 1979. — 283 s.