УДК 330.5 : 519.2

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы в экономике (физико-математические науки, экономические науки)

КАКОЙ ОБЪЕМ ВЫБОРКИ ЦЕЛЕСООБРАЗНО ИСПОЛЬЗОВАТЬ?

Орлов Александр Иванович
д.э.н., д.т.н., к.ф.-м.н.,
профессор

РИНЦ SPIN-код: 4342-4994
prof-orlov@mail.ru
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5,

При планировании статистических исследований необходимо выбрать объем выборки. Правила такого выбора достаточно широко обсуждаются в работах специалистов различных областей науки и практики - экономики и управления, техники и технологий, медицины, социологии и др. Однако обычно рассматривают лишь отдельные частные постановки поставленной задачи, приводят без обоснования те или иные рецепты выбора необходимого объема выборки, причем зачастую ошибочные. Цель настоящей статьи - строгая формулировка методов расчета необходимого объема выборки и обоснование соответствующих алгоритмов с позиций современной прикладной математической статистики. Рассмотрены четыре подхода. В первом из них объем выборки определяется имеющимися ресурсами для проведения измерений, наблюдений, анализов, опытов, испытаний, обследований. Во втором рассматриваются задачи оценивания теоретических характеристик случайной величины. Необходимый объем выборки определяют по заданной точности оценивания, под которой понимаем полуширину доверительного интервала. Третий подход основан на теории проверки статистических гипотез. Речь идет о выборе между нулевой и альтернативной гипотезами, исходя из заданных уровня значимости и мощности определенного статистического критерия. Четвертый разработан в рамках статистики интервальных данных, являющейся частью статистики нечисловых данных и системной нечеткой интервальной математики. Рассмотрен общий подход на основе принципа уравнивания статистических и метрологических погрешностей. По известной точности исходных измерений определяем рациональный объем выборки, который и является с рассматриваемой точки зрения необходимым. В качестве базовых

UDC 330.5 : 519.2

5.2.2. Mathematical, statistical and instrumental methods of economics (physical and mathematical sciences, economic sciences)

WHAT SAMPLE SIZE IS IT APPROPRIATE TO USE?

Orlov Alexander Ivanovich
Dr.Sci.Econ., Dr.Sci.Tech., Cand.Phys-Math.Sci., professor

RSCI SPIN-code: 4342-4994

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

When planning statistical studies, it is necessary to select a sample size. The rules for such a choice are quite widely discussed in the works of specialists in various fields of science and practice - economics and management, engineering and technology, medicine, sociology, etc. However, usually only individual specific statements of the problem are considered, and certain recipes for choosing the required sample size are given without justification , and often erroneous. The purpose of this article is a strict formulation of methods for calculating the required sample size and justification of the corresponding algorithms from the standpoint of modern applied mathematical statistics. Four approaches are considered. In the first of them, the sample size is determined by the available resources for carrying out measurements, observations, analyses, experiments, tests, and surveys. In the second, problems of estimating the theoretical characteristics of a random variable are considered. The required sample size is determined by the specified estimation accuracy, by which we mean the half-width of the confidence interval. The third approach is based on the theory of statistical hypothesis testing. We are talking about choosing between the null and alternative hypotheses, based on the given level of significance and power of a certain statistical test. The fourth is developed within the framework of interval data statistics, which is part of the statistics of non-numerical data and system fuzzy interval mathematics. A general approach is considered based on the principle of equalizing statistical and metrological errors. Based on the known accuracy of the initial measurements, we determine the rational sample size, which is necessary from the point of view under consideration. As basic examples, the rules for calculating the required sample size when studying probability values and mathematical expectations are considered. Limit theorems of probability theory and mathematical statistics are used примеров рассмотрены правила расчета необходимого объема выборки при изучении значений вероятностей и математических ожиданий. В качестве основы математического аппарата используются предельные теоремы теории вероятностей и математической статистики. В дальнейших исследованиях целесообразно изучить скорость сходимости в полученных асимптотических выражениях, рассмотреть конечные объемы выборок с целью перейти от теории больших выборок к теории малых выборок

as the basis of the mathematical apparatus. In further research, it is advisable to study the rate of convergence in the obtained asymptotic expressions and consider finite sample sizes in order to move from the theory of large samples to the theory of small samples

Ключевые слова: СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, НЕОБХОДИМЫЙ ОБЪЕМ ВЫБОРКИ, ОЦЕНИВАНИЕ, ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ, ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ, МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЯ, СТАТИСТИКА ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДАННЫХ, РАЦИОНАЛЬНЫЙ ОБЪЕМ ВЫБОРКИ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ, СИСТЕМНАЯ НЕЧЕТКАЯ ИНТЕРВАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Keywords: STATISTICAL METHODS, APPLIED MATHEMATICAL STATISTICS, REQUIRED SAMPLE SIZE, ESTIMATION, CONFIDENCE INTERVALS, HYPOTHESIS TESTING, CRITERION POWER, INTERVAL DATA STATISTICS, RATIONAL SAMPLE SIZE, LIMIT THEOREMS, SYSTEM FUZZY INTERVAL MATHEMATICS

http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-197-012

Введение

При проведении научных и практических работ, составной частью которых является статистический анализ данных, часто возникает вопрос: какой объем выборки выбрать? Для обоснования необходимого объема выборки разработан ряд подходов, рассмотрению которых посвящена настоящая статья. Ее необходимость вызвана тем, что затрагивающие эту тему электронные и бумажные источники часто неполны, в них встречаются неточности и ошибки.

В статье рассмотрены четыре подхода.

В первом из них объем выборки определяется имеющимися ресурсами для проведения измерений, наблюдений, анализов, опытов, испытаний, обследований.

Во втором подходе рассматриваются задачи оценивания теоретических характеристик случайной величины. Необходимый объем выборки определяют по заданной точности оценивания, под которой понимаем полуширину доверительного интервала.

Третий подход основан на теории проверки статистических гипотез. Речь идет о выборе между нулевой и альтернативной гипотезами, исходя из заданных уровня значимости и мощности того или иного статистического критерия.

Четвертый подход разработан в рамках статистики интервальных данных, являющейся частью статистики нечисловых данных и системной нечеткой интервальной математики. Рассмотрен общий подход на основе принципа уравнивания статистических и метрологических погрешностей. По известной точности исходных измерений определяем рациональный объем выборки, который и является с рассматриваемой точки зрения необходимым.

В качестве базовых примеров рассмотрены правила расчета необходимого объема выборки при изучении значений вероятностей и математических ожиданий. В качестве основы математического аппарата используются предельные теоремы теории вероятностей и математической статистики.

Многообразие работ, посвященных выбору необходимого объема выборки

Правила такого выбора достаточно широко обсуждаются в работах специалистов различных областей науки и практики - экономики и управления [1 - 4], техники и технологий [5 - 8], биологии [9], социологии [10], лингвистики [11] и др. Особенно много работ в области научных медицинских исследований [12 - 14], поскольку типовая часть исследовательских работ в этой области - сбор и анализ статистических данных. Коллективы научных работников [15 - 17] и отдельные исследователи (см. серии работ Г.П. Тиховой [18, 19] и М.И. Шпитонкова [20, 21]) специализируются на разработке рекомендаций по выбору необходимого объемов выборок, что отражает большую востребованность подобных рекомендаций.

Однако практически все работы специалистов различных областей науки и практики по выбору необходимого объема выборки имеют те или иные недостатки, снижающие обоснованность данных в них рекомендаций. затрагивающие эту тему электронные и бумажные источники часто неполны, в них встречаются неточности и ошибки. Обычно рассматривают лишь отдельные частные постановки поставленной задачи, приводят без обоснования те или иные рецепты выбора необходимого объема выборки, причем зачастую ошибочные. Даже в наиболее квалифицированных работах рассмотрены лишь отдельные подходы у решению задачи определения необходимого объема выборки. Так, в [4] проанализирован только подход, исходящий из полуширины доверительного интервала, а в [22] даны рецепты в рамках теории проверки гипотез, но без вывода.

Приходится констатировать, что специалисты в области прикладной математической статистики не разбирались глубоко в рассматриваемой проблеме, весьма важной для прикладников, не разрабатывали и не изучали подходы и методы определения необходимого объема выборки.

Цель настоящей статьи - строгая формулировка методов расчета необходимого объема выборки и обоснование соответствующих алгоритмов с позиций современной прикладной математической статистики. Математический аппарат - предельные теоремы теории вероятностей и математической статистики. Рассмотрим последовательно четыре подхода, кратко сформулированных во введении к настоящей статье.

Необходимый объем выборки при ограниченных ресурсах

С точки зрения классической математической статистики ответ на поставленный вопрос ясен: чем больше объем выборки, тем лучше. Однако на практике приходится учитывать объем ресурсов, необходимых для сбора данных, поскольку при увеличении объема выборки точность оценивания улучшается всё меньше. А именно, при увеличении объема выборки в k раз среднее квадратическое отклонение от оцениваемого параметра уменьшается лишь как $1/\sqrt{k}$. Выбор объема выборки приходится делать на основе компромисса между точностью и стоимостью исследования. Например, в социологии число опрошенных обычно не превышает несколько тысяч.

Вероятностно-статистическая модель выборки

Как уже отмечалось, необходимый объем выборки можно найти, задав точность статистических выводов. Например, найти ее, задав ширину доверительного интервала при оценивании параметра или исходя из мощности критерия при выборе между двумя гипотезами. Если известна точность проводимых измерений, то ответить на вопрос о необходимом объеме выборки позволяет статистика интервальных данных. Она исходит из принципа уравнивания погрешностей: статистическая погрешность должна разняться метрологической.

Рассмотрим подробнее перечисленные подходы к выбору объема выборки, разобрав типовые примеры постановок статистических задач оценивания и проверки гипотез.

Согласно [23 - 25], начать надо с выбора вероятностно-статистической модели.

Пусть анализируемые данные $X_1, X_2,..., X_n$ рассматриваются как выборка, т.е. набор независимых (в совокупности) одинаково распределенных случайных величин. Будем использовать термины, определения и факты, приведенные в справочнике [26].

Необходимый объем выборки при оценивании вероятности

Пусть элементы выборки принимают только два значения 0 и 1 (например, 0 соответствует тому, что деталь годная, а 1 - что дефектная). Обозначим вероятности $P(X_i = 1) = p,\ P(X_i = 0) = 1 - p$. Необходимо оценить долю *p* ответов 1 в генеральной совокупности (долю дефектных единиц). Как установлено в прикладной статистике [27], доверительный интервал (p_H, p_B) для неизвестного параметра *p* строится по объему выборки *n* и числу ответов 1 в выборке, равному $X_1 + X_2 + ... + X_n = X$, следующим образом:

$$p_H = p* - C(\gamma)\sqrt{\frac{p*(1-p*)}{n}},\ p_B = p* + C(\gamma)\sqrt{\frac{p*(1-p*)}{n}}, \qquad (1)$$

где p_H - нижняя доверительная граница, p_B - верхняя доверительная граница, *p* = X/n* - выборочная доля (доля ответов 1 в выборке), γ - доверительная вероятность, $C(\gamma)$ - коэффициент, соответствующий доверительной вероятности,

$$C(\gamma) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right),$$

где $\Phi^{-1}(x)$ - функция, обратная к функции стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Обычно используют доверительную вероятность $\gamma = 0{,}95$, тогда $C(\gamma) = C(0{,}95) = 1{,}96$.

Замечание. Формулы (1) получены в [27] на основе теоремы Муавра-Лапласа в предположении безграничного роста объема выборки. При решении практических задач обычно полагают, что их можно использовать при объеме выборки $n \geq 10$.

Пусть задана необходимая точность оценивания Δ вероятности *p*. Это значит, что доверительный интервал должен полностью входить в интервал $(p* - \Delta; p* - \Delta)$. Согласно формулам (1) это означает, что должно быть выполнено неравенство

$$C(\gamma)\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \le \Delta. \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что

$$n \ge \frac{p^*(1-p^*)}{\Delta^2} C^2(\gamma) \qquad (3)$$

(поскольку объем выборки - натуральное число, то правую часть неравенства в формуле (3) необходимо увеличить до ближайшего целого).

Эту формулу нельзя непосредственно применить для определения необходимого объема выборки, поскольку $p^* = X/n$, т.е. знание объема выборки необходимо для применения формулы (3). Есть два пути для преодоления этой сложности.

Во-первых, величина p^* может быть оценена по результатам предыдущих исследований или в результате анализа данных предварительной выборки небольшого объема.

Во-вторых, можно воспользоваться тем, что

$$p^*(1 - p^*) \le 1/4,$$

причем равенство достигается при $p^* = 1/2$. Следовательно, вместо (3) можно использовать формулу

$$n \ge \frac{1}{4\Delta^2} C^2(\gamma). \qquad (4)$$

Поскольку, как уже сказано, для наиболее часто применяемого значения доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ имеем $C(\gamma) = 1{,}96$, а это значение с достаточной для практики точностью можно заменить на 2, то в этом случае можно заменить формулу (4) на более простую:

$$n \ge \frac{1}{\Delta^2}. \qquad (5)$$

Согласно формуле (5) для оценки вероятности с точностью ± 10 % (т.е. $\Delta = 0{,}1$) необходимый объем выборки равен 100. а для оценки с точностью ± 5 % (т.е. $\Delta = 0{,}05$) требуется уже 400 наблюдений.

Ясно, что формула (4) дает завышенные объемы для вероятностей.

отличающихся от 1/2. Например, если оценка вероятности около 0,1 (или 0,9), то p*(1 - p*) равно не 0,25, а 0,09, соответственно необходимый объем выборки по формуле (3) сокращается в 0,25/0,09 = 2,78 раза по сравнению с правой частью формулы (4).

Необходимый объем выборки при оценивании математического ожидания

В этом случае элементы выборки $X_1, X_2, ..., X_n$ могут принимать любые числовые значения. Согласно принятой модели элементы выборки - независимые одинаково распределенные случайные величины. Поскольку все они одинаково распределены, то математические ожидания и дисперсии элементов выборки совпадают:

$$M(X_i) = a,\ D(X_i) = \sigma^2,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Как известно [27], точечной оценкой математического ожидания является выборочное среднее арифметическое

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

а доверительный интервал (a_H, a_B) для математического ожидания a имеет вид:

$$a_H = \overline{X} - C(\gamma)\frac{s}{\sqrt{n}},\ a_B = \overline{X} + C(\gamma)\frac{s}{\sqrt{n}},$$

где s - выборочное среднее квадратическое отклонение (т.е. статистическая оценка теоретического среднего квадратичного отклонения σ):

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}.$$

Аналогом формулы (2) является соотношение

$$C(\gamma)\frac{s}{\sqrt{n}} \le \Delta.$$

Следовательно, необходимый объем выборки - это минимальное n такое, что

$$n \geq \frac{s^2}{\Delta^2} C^2(\gamma). \tag{6}$$

Как и в случае оценивания вероятности, возникает проблема из-за того, что до проведения измерений неизвестна величина выборочной дисперсии s^2. Эта величина может быть оценена по результатам предыдущих исследований или в результате анализа данных предварительной выборки небольшого объема.

В техническом паспорте средства измерения обычно указывают такую характеристику случайной ошибки, как ее среднее квадратическое отклонение σ. В таком случае вместо (5) можно использовать формулу

$$n \geq \frac{\sigma^2}{\Delta^2} C^2(\gamma).$$

Как и при оценивании вероятности, обычно используют доверительную вероятность $\gamma = 0{,}95$, тогда $C(\gamma) = 1{,}96$. Однако иногда теоретическую точность указывают в виде $a \pm \sigma$, что соответствует выборочной оценке $\overline{X} \pm s$. В этом случае $C(\gamma) = 1{,}00$, т.е $\gamma = 0{,}68$.

Выше рассмотрены две задачи оценивания. В прикладной статистике используются и другие задачи оценивания. Во всех из них необходимый объем выборки находят путем приравнивания полуширины симметричного доверительного интервала и заданной точности.

Необходимый объем выборки при проверке статистической гипотезы о вероятности

Построение вероятностно-статистической модели [1] начинается с задания двух гипотез - нулевой H_0 и альтернативной H_1. Рассмотрим две типовые постановки задачи проверки статистических гипотез.

Если случайные величины принимают два значения, то вероятностно-статистическая модель описывается двумя параметрами - объемом выборки n и вероятностью определенного значения p.

Задача 1. Пусть заданы гипотезы

$$H_0\colon p = p_0\,,\ H_1\colon p = p_1\,. \tag{7}$$

Рассматривают случайную величину X, имеющую биномиальное распределение с параметрами n (объем выборки) и p (вероятность определенного значения). Как известно (см., например, [26]),

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 1,2,\ldots,n,$$

где C_n^k - число сочетаний из n элементов по k. Исходя из X и n, необходимо принять решение о том, какая из двух гипотез верна. Например, при статистическом контроле качества по объему выборки и числу дефектных единиц в ней надо установить, какова доля дефектных единиц в партии - p_0 или $p = p_1$.

Задача 2. Во второй постановке речь идет о математической ожидании $M(X)$ случайной величины X. Задают гипотезы

$$H_0\colon M(X) = a_0,\ \ H_1\colon M(X) = a_1\,. \tag{8}$$

По выборке $X_1, X_2,..., X_n$ необходимо принять решение о том, какая из двух гипотез верна. Например, при статистическом регулировании технологических процессов методом контрольных карт Шухарта гипотеза H_0: соответствует налаженному состоянию процесса, а гипотеза H_1 - разлаженному [28, гл.10].

Для проверки статистических гипотез используют статистические критерии [26, 27], т.е. функции от статистических данных (от объема выборки и числа дефектных единиц в задаче 1 и от $X_1, X_2,..., X_n$ в задаче 2). С каждым статистическим критерием связаны две ошибки - ошибка первого рода (вероятность того, что нулевая гипотеза отклоняется, хотя она верна) и ошибка второго рода (вероятность того, что нулевая гипотеза принимается, хотя верна альтернативная). Вероятность ошибки первого рода обычно обозначают α, вероятность ошибки второго рода - β. Величину α называют уровнем значимости статистического критерия, а величину (1 - β) - мощностью критерия. Уровень значимости задается исследователем, обычно принимают, что $\alpha = 0{,}05$. Необходимый объем выборки находят, задав требуемую мощность критерия.

В задаче 1 для проверки нулевой гипотезы в [27] рекомендуется статистический критерий, основанный на статистике

$$Y = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}.,$$

Как вытекает из теоремы Муавра-Лапласа, если верна нулевая гипотеза, то при росте объема выборки распределение этой статистики сходится к стандартному нормальному распределению с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1:

$$\lim_{n\to\infty} P(Y < x) = \Phi(x). \qquad (9)$$

Правило принятия решения на основе значения Y зависит от предположений об альтернативных гипотезах. Если неизвестно, в какую сторону может быть отклонение от нулевой гипотезы (т.е. неизвестно, какое значение больше - p_0 или p_1, т.е. рассматривают двухстороннюю альтернативу), то правило принятия решения имеет следующий вид [27]:

- если $|Y| \le k(\alpha)$, то принимают нулевую гипотезу, если же $|Y| > k(\alpha)$, то отклоняют нулевую гипотезу и принимают альтернативную.

Здесь $k(\alpha)$ - коэффициент, зависящий от уровня значимости α. Его определяют из условия

$$P(|Y| > k(\alpha)) = \alpha.$$

Если верна нулевая гипотеза, то в случае $|Y| > k(\alpha)$ совершаем ошибку первого рода. Из (9) следует, что

$$P(|Y| > k(\alpha)) = P(Y < -k(\alpha)) + P(Y > k(\alpha)) = \Phi(-k(\alpha)) + 1 - \Phi(k(\alpha)) = 2 - 2\Phi(k(\alpha))$$

(при достаточно большом объеме выборки). Из двух последних равенств получаем, что

$$\alpha = 2 - 2\Phi(k(\alpha)),\ \Phi(k(\alpha)) = 1 - \frac{\alpha}{2},\ k(\alpha) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Если $\alpha = 0{,}05$, то $k(\alpha) = 1{,}96$.

Однако задачу проверки гипотез (7) достаточно часто рассматривают, когда вероятности p_0 и p_1 полностью известны. Пусть для определенности $p_1 > p_0$, т.е. рассматривают одностороннюю альтернативу. Тогда естественно использовать другое правило принятия решения:

- если $Y \le m(\alpha)$, то принимают нулевую гипотезу, если же $Y > m(\alpha)$, то отклоняют нулевую гипотезу и принимают альтернативную.

Здесь $m(\alpha)$ - коэффициент, зависящий от уровня значимости α. Его определяют из условия

$$P(Y > m(\alpha)) = \alpha .$$

Если верна нулевая гипотеза, то в случае $Y > m(\alpha)$ совершаем ошибку первого рода. Из (9) следует, что

$$P(Y > m(\alpha)) = 1 - \Phi(m(\alpha))$$

(при достаточно большом объеме выборки). Из двух последних равенств получаем, что

$$\alpha = 1 - \Phi(m(\alpha)),\ m(\alpha) = \Phi^{-1}(1 - \alpha).$$

Если $\alpha = 0{,}05$, то $m(\alpha) = 1{,}64$.

Перейдем к изучению мощности критерия. Она равна вероятности того, что при справедливости альтернативной гипотезы нулевая гипотеза отклоняется. Таким образом, при изучении критерия, соответствующего двухсторонней альтернативе, необходимо найти вероятность события $|Y| > k(\alpha)$ в предположении, что случайная величина Y имеет биномиальное распределение с параметром $p = p_1$ и объемом выборки n.

Справедливо тождество

$$Y = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} = \frac{X - np_1 + (np_1 - np_0)}{\sqrt{np_1(1 - p_1)}} \frac{\sqrt{np_1(1 - p_1)}}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}},$$

из которого следует

$$Y=\frac{\sqrt{p_1(1-p_1)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\frac{X-np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}+\sqrt{n}\frac{p_1-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}.$$

Рассмотрим случай $p_1>p_0$. Введем обозначения

$$A=A(p_o,p_1)=\frac{\sqrt{p_1(1-p_1)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}>0,\ \ B=B(p_o,p_1)=\frac{p_1-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}>0.$$

Тогда

$$Y=A(p_0,p_1)\frac{X-np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}+B(p_0,p_1)\sqrt{n}=A\frac{X-np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}+B\sqrt{n}.$$

Поскольку в предположении, что случайная величина Y имеет биномиальное распределение с параметром $p = p_1$, распределение центрированной и нормированной случайной величины

$$\frac{X-np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}$$

приближается при росте объема выборки к распределению случайной величины Z, имеющей стандартное нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, то распределение Y сближается с распределением $W=AZ+B\sqrt{n}$, что позволяет рассчитать мощность критерия.

Поскольку в случае двухсторонней альтернативы

$$P(|Y|>k(\alpha))=P(|AZ+B\sqrt{n}|>k(\alpha))=P(AZ+B\sqrt{n}<-k(\alpha))+P(AZ+B\sqrt{n}>k(\alpha)),$$

то мощность рассматриваемого критерия проверки статистических гипотез равна

$$P\left(Z<\frac{-k(\alpha)-B\sqrt{n}}{A}\right)+P\left(Z>\frac{k(\alpha)-B\sqrt{n}}{A}\right).$$

Поскольку Z, имеет стандартное нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, то мощность выражается через функцию Лапласа $\Phi(u)$ следующим образом:

$$f(A,B,n)=1+\Phi\left(\frac{-k(\alpha)-B\sqrt{n}}{A}\right)-\Phi\left(\frac{k(\alpha)-B\sqrt{n}}{A}\right). \quad (10)$$

Необходимый объем выборки находят из уравнения

$$f(A,B,n)=1-\beta. \quad (11)$$

Поскольку, как легко видеть,

$$\lim_{n\to+\infty} f(A,B,n)=1,$$

то для сколь угодно малой вероятности ошибки второго рода β (ее задают при постановке задачи определения необходимого объема выборки) решение задачи (11) существует. К сожалению, найти его можно лишь численными методами. Оценку сверху можно найти, отбросив второй член в (10), т.е. из уравнения

$$1-\Phi\left(\frac{k(\alpha)-B\sqrt{n}}{A}\right)=1-\beta. \quad (12)$$

Из (12) следует, что

$$\frac{k(\alpha)-B\sqrt{n}}{A}=\Phi^{-1}(\beta),\ n=\left(\frac{k(\alpha)-A\Phi^{-1}(\beta)}{B}\right)^2. \quad (13)$$

Как уже говорилось, уровень значимости α обычно принимают равным 0,05, тогда $k(\alpha)=1{,}96$.

В случае односторонней альтернативы

$$P(Y>m(\alpha))=P(AZ+B\sqrt{n}>m(\alpha)),$$

а потому (асимптотическая) соответствующего статистического критерия равна

$$P\left(Z>\frac{m(\alpha)-B\sqrt{n}}{A}\right)=1-\Phi\left(\frac{m(\alpha)-B\sqrt{n}}{A}\right)=1-\beta.$$

Следовательно, справедлив аналог формулы (13)

$$\frac{m(\alpha)-B\sqrt{n}}{A}=\Phi^{-1}(\beta),\ n=\left(\frac{m(\alpha)-A\Phi^{-1}(\beta)}{B}\right)^2$$

Рассмотрим пример. Пусть p_0 = 0,1 и p_1 = 0,5. Тогда в случае двухсторонней альтернативы

$$A = \frac{\sqrt{p_1(1-p_1)}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \frac{\sqrt{0{,}5\times 0.5}}{\sqrt{0{,}1\times 0{,}9}} = 1{,}67,\ \ B = \frac{p_1 - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = 1{,}33$$

и объем выборки (оценка сверху, т.е. заведомо достаточный объем) равен

$$n = \left(\frac{1{,}96 - 1{,}67\Phi^{-1}(\beta)}{1{,}33}\right)^2.$$

Если вероятность ошибки второго рода принять равной 0,01, то $\Phi^{-1}(0{,}01) = -2{,}33$ и

$$n = \left(\frac{1{,}96 + 1{,}67\times 2{,}33)}{1{,}33}\right)^2 = 19{,}36.$$

Поскольку объем выборки - натуральное число, то, округляя до ближайшего натурального числа сверху, получаем, что необходимый объем выборки - это 20.

В случае односторонней альтернативы надо заменить 1,96 на 1,64, а потому необходимый объем выборки равен

$$n = \left(\frac{1{,}64 + 1{,}67\times 2{,}33)}{1{,}33}\right)^2 = 19{,}14.$$

Округляя, получаем, как и в предыдущем случае, необходимый объем выборки, равный 20.

Необходимый объем выборки при проверке статистической гипотезы о математическом ожидании

В сформулированной выше задаче 2 заданы гипотезы

$$H_0\colon M(X) = a_0,\ \ H_1\colon M(X) = a_1\,.$$

По выборке $X_1, X_2, ..., X_n$ необходимо принять решение о том, какая из двух гипотез верна. Обычно принимают вероятностно-статистическую модель [23 - 25], согласно которой при справедливости нулевой гипотезы H_0 элементы выборки имеют функцию распределения $F(x)$ с дисперсией σ_0, а при справедливости альтернативной гипотезы H_1 - некоторую другую функцию распределения $G(x)$ с дисперсией σ_1. Если же для определения значения контролируемого параметра в обоих случаях используют одно и то же средство измерения, то полагают, что $\sigma_0 = \sigma_1$, а функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ отличаются только сдвигом. Для математической строгости предполагается, что существуют первые три центральные момента, а потому при справедливости обеих гипотез справедлива Центральная предельная теорема теории вероятностей (как следствие теоремы Ляпунова).

Статистика критерия для проверки нулевой гипотезы согласно [27] имеет вид

$$Y = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - a_0}{s}$$

Согласно Центральной предельной теореме теории вероятностей распределение статистики Y сходится при росте объема выборки к стандартному нормальному распределению с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, а потому при двусторонней альтернативе решающее правило, соответствующее уровню значимости α, таково:

- если $|Y| \le k(\alpha)$, то принимают нулевую гипотезу, если же $|Y| > k(\alpha)$, то отклоняют нулевую гипотезу и принимают альтернативную.

Здесь, как и в предыдущем разделе,

$$k(\alpha) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

С целью изучения мощности рассмотрим распределение Y при справедливости альтернативной гипотезы H_1: $M(X) = a_1$. Имеем:

$$Y = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - a_1 + (a_1 - a_0)}{s} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - a_1}{s} + \sqrt{n}\,\frac{(a_1 - a_0)}{s}. \qquad (14)$$

Распределение первого слагаемого в (14) сходится к стандартному нормальному, для второго справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 - a_0}{s} = \frac{a_1 - a_0}{\sigma_1} = B. \qquad (15)$$

Следовательно, распределение Y сближается с распределением случайной величины $W = Z + B\sqrt{n}$, где Z имеет стандартное нормальное распределение. Это позволяет рассчитать мощность критерия. Она равна (в асимптотике)

$$P(|Y|> k(\alpha)) = P(|Z + B\sqrt{n})|> k(\alpha)) = P(Z > k(\alpha) - B\sqrt{n}) + P(Z < -k(\alpha) - B\sqrt{n}) =$$
$$= 1 - \Phi(k(\alpha) - B\sqrt{n}) + \Phi(-k(\alpha) - B\sqrt{n}) = g(B,n).$$

Аналогично предыдущему разделу необходимый объем выборки по заданной мощности критерия находят из уравнения

$$g(B,n) = 1 - \beta.$$

Справедливы и рассуждения, приведенные в конце предыдущего раздела. Если математические ожидания или дисперсии, соответствующие рассматриваемым гипотезам, неизвестны, то при достаточно большом объеме выборки их можно заменить соответствующими состоятельными оценками [27].

Рассмотренное выше решающее правило соответствует двусторонней альтернативе - отклонение значения математического ожидания может быть как в большую, так и в меньшую сторону. Рассмотрим другую постановку - пусть заранее известно, что a_0 меньше, чем a_1, т.е. отклонение может быть только в большую сторону. Внесем соответствующие изменения в цепь рассуждений.

Решающее правило, соответствующее уровню значимости α, таково: если $Y \le q(\alpha)$, то принимают нулевую гипотезу, если же $Y > q(\alpha)$, то отклоняют нулевую гипотезу и принимают альтернативную. Здесь при справедливости нулевой гипотезы

$$P(Y > q(\alpha)) = 1 - P(Y \le q(\alpha)) = \alpha.$$

В соответствии с Центральной предельной теоремой

$$1 - \Phi(q(\alpha)) = \alpha,\ \Phi(q(\alpha)) = 1 - \alpha,\ q(\alpha) = \Phi^{-1}(1-\alpha).$$

Для наиболее распространенного значения уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ имеем $q(0{,}05) = \Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}64$.

В соответствии с (14) и (15) найдем мощность критерия. При справедливости альтернативной гипотезы и достаточно большом объеме выборки

$$P(Y > q(\alpha)) = P(Z + B\sqrt{n} > q(\alpha)) = P(Z > q(\alpha) - B\sqrt{n}) == 1 - \Phi(q(\alpha) - B\sqrt{n}).$$

Необходимый объем выборки по заданной мощности критерия находят из уравнения

$$1 - \Phi(q(\alpha) - B\sqrt{n}) = 1 - \beta. \tag{16}$$

Из (16) следует, что

$$\Phi(q(\alpha) - B\sqrt{n}) = \beta,\ q(\alpha) - B\sqrt{n} = \Phi^{-1}(\beta),\ n = \left(\frac{q(\alpha) - \Phi^{-1}(\beta)}{B}\right)^2.$$

Если принять, что уровень значимости равным 0,05, а вероятность ошибки второго рода равной 0,01, то $\Phi^{-1}(0{,}01) = -2{,}33$ и

$$n = \left(\frac{1{,}96 + 2{,}33}{B}\right)^2 = \frac{18{,}4}{B^2} = \frac{18{,}4\sigma_1^2}{(a_1 - a_0)^2}. \tag{17}$$

Рассмотрим численный пример. Пусть разность математических ожиданий a_1 - a_0 равна 1,0, а среднее квадратическое отклонение при справедливости альтернативной гипотезы σ_1 равно 1,5. Тогда B = 1,0/1,5 = 0,67 и по формуле (17) находим n = 41,4. Поскольку объем выборки - натуральное число, то, округляя до ближайшего натурального числа сверху, получаем, что необходимый объем выборки - это 42.

Необходимый объем выборки на основе статистики интервальных данных

В предыдущих разделах приведен ряд методов расчета необходимого объема выборки на основе задания ширины доверительного интервала, уровня значимости, мощности критерия. Выбор конкретных значений этих характеристик проводится при постановке задачи и потому во многом субъективен. Поэтому интересен и полезен метод на основе статистики интервальных данных, в котором привлекаются соображения метрологии.

Если известна точность проводимых измерений, то ответить на вопрос о необходимом объеме выборки позволяет статистика интервальных данных [27, гл. 12]. Она исходит из принципа уравнивания погрешностей, согласно которому статистическая погрешность должна равняться метрологической. Статистика интервальных данных разработана в рамках новой парадигмы математических методов исследования [29].

В различных задачах математической статистики обычно исходят из базового понятия выборки $X_1, X_2,..., X_n$ и рассматривают значения тех или иных функций $f(X_1, X_2,..., X_n)$ от элементов выборки. В статистике интервальных данных в явной форме учитываются неизбежные погрешности измерений. Их наличие приводит к тому, что обрабатывать приходится не элементы выборки X_i, а их искаженные значения Y_i, i = 1, 2, ... , n, а потому статистические выводы приходится делать не на основе $f(X_1, X_2,..., X_n)$, а на основе искаженного значения $f(Y_1,Y_2,...,Y_n)$. Здесь $Y_i = X_i + \varepsilon_i,\ i = 1,2,\ldots,n,$ где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2,..., \varepsilon_n)$ - вектор погрешностей.

Важен частный случай, когда $|\varepsilon_i| \leq \Delta,\ i = 1,2,\ldots,n$. Тогда используют запись $X_i \pm \Delta$. Она означает, что неизвестное нам реальное значение элемента выборки лежит в (замкнутом) интервале $[X_i - \Delta,\ X_i + \Delta]$. Элементами выборки являются не числа X_i, i = 1, 2, ... , n, а интервалы $[a_i,\ b_i],\ i = 1,2,\ldots,n$, где $a_i = X_i - \Delta,\ b_i = X_i + \Delta$. Методам обработки подобных интервальных данных посвящена статистика интервальных данных [27, гл.12] - сравнительно новая область современной прикладной математической статистики (она развивается с 1980-х годов, в то время как классическая математическая статистика сформировалась к середине XX в.).

Для изучения свойств методов анализа статистических данных большое значение имеет базовое для статистики интервальных данных понятие нотны

$$N_f(X_1, X_2,..., X_n) = \sup_{\{\varepsilon\}} | f(X_1, X_2,..., X_n) - f(Y_1, Y_2,..., Y_n) |,$$

где супремум берется по множеству всех возможных погрешностей $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2,..., \varepsilon_n)$.

Если все погрешности удовлетворяют ограничению $|\varepsilon_i| \le \Delta$ и максимально возможная погрешность Δ мала, то для достаточно гладкой функции $f(X_1, X_2,..., X_n)$ (достаточно наличие у этой функции вторых непрерывных частных производных) с точностью до бесконечно малых более высокого порядка справедливо равенство

$$N_f(X_1, X_2,\ldots,X_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(X_1, X_2,\ldots,X_n)}{\partial X_i} \right| \right) \Delta. \qquad (18)$$

В терминах метрологии $f(X_1, X_2,..., X_n)$ - это косвенное измерение на основе прямых измерений X_i, $i = 1,2,\ldots,n$. Погрешность косвенного измерения равна $N_f(X_1, X_2,\ldots,X_n)$, другими словами, результат косвенного измерения имеет вид $f(X_1, X_2,\ldots,X_n) \pm N_f(X_1, X_2,\ldots,X_n)$.

Формула (18) позволяет находить погрешность косвенного измерения. При решении задач статистического анализа данных обычно можно доказать, что существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(X_1, X_2,\ldots,X_n)}{\partial X_i} \right| \right) = C,$$

где C - некоторая положительная константа, своя для каждой рассматриваемой задачи. Тогда при достаточно больших объемах выборки n нотна равна $C\Delta$. Следовательно, погрешность вычисления статистики $f(X_1, X_2,..., X_n)$ не стремится к 0. Отсюда следует, что в статистике интервальных данных не существует состоятельных оценок (в терминах классической математической статистики).

При использовании распространенных статистических методов рассматриваемая статистика $f(X_1, X_2,..., X_n)$ в большинстве случаев является асимптотически нормальной, т.е. существуют константы a и σ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\,\frac{f(X_1, X_2,\ldots,X_n)-a}{\sigma} < x\right) = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$, как и в предыдущих рассуждениях настоящей статьи, является функцией стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. В рассматриваемых случаях, как правило, выполнены предельные соотношения для моментов

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\big(Mf(X_1, X_2,\ldots,X_n)-a\big)=0,\ \ \lim_{n\to+\infty} nDf(X_1, X_2,\ldots,X_n)=\sigma^2.$$

В соответствии с этими соотношениями в классической математической статистике средний квадрат ошибки рассматриваемой статистической оценки таков:

$$M\big(f(X_1, X_2,\ldots,X_n)-a\big)^2 \underset{n\to+\infty}{=} \big(Mf(X_1, X_2,\ldots,X_n)-a\big)^2 + Df(X_1, X_2,\ldots,X_n) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad (19)$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка.

В статистике интервальных данных, в которой мы учитываем наличие погрешностей наблюдений, вместо формулы (19) обычно получаем другое выражение для квадрата ошибки

$$\sup_{\{\varepsilon\}} M\big(f(X_1, X_2,\ldots,X_n)-a\big)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + N_f^2(X_1, X_2,\ldots,X_n) + o\left(\Delta^2+\frac{1}{n}\right) \qquad (20)$$

где супремум берется по множеству всех возможных погрешностей $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_n)$. Первое слагаемое в правой части (20) соответствует статистической погрешности, второе - метрологической.

Согласно (12) при росте объема выборки средний квадрат ошибки не стремится к 0, как в классической математической статистике, но всегда остается больше некоторой положительной константы (квадрата нотны). Следовательно, нерационально безгранично увеличивать объем выборки. В соответствии с теорией устойчивости экономико-математических методов и моделей [30] используем здесь принцип уравнивания погрешностей, согласно которому целесообразно уравнять величины погрешностей различной природы. Применительно к (20) принцип уравнивания погрешностей приводит к соотношению

$$\frac{\sigma^2}{n} = N_f^2(X_1, X_2,..., X_n). \tag{21}$$

Формула (21) позволяет найти необходимый объем выборки. Он равен:

$$n = \frac{\sigma^2}{N_f^2(X_1, X_2,...,X_n)}. \tag{22}$$

Для практического применения формулы (22) надо заменить теоретические значения дисперсии σ^2 рассматриваемой статистики $f(X_1, X_2,..., X_n)$ и квадрата ее нотны $N_f^2(X_1, X_2,...,X_n)$ на их оценки по выборочным данным. Алгоритмы расчетов разработаны для решения различных задач прикладной статистики - для оценивания характеристик и параметров распределений, проверки гипотез, линейного регрессионного анализа. дискриминантного анализа, кластер-анализа, а также для оценки погрешностей характеристик финансовых потоков инвестиционных проектов [27]. В статистике интервальных данных формула (22) задает "рациональный объем выборки". Этот термин используется в том же смысле, что и термин "необходимый объем выборки" в настоящей статье.

В качестве примера рассчитаем необходимый объем выборки для оценивания по выборке $X_1, X_2,..., X_n$ математического ожидания ее элементов с помощью выборочного среднего арифметического. В этом случае

$$f(X_1, X_2,...,X_n) = \overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial f(X_1, X_2,...,X_n)}{\partial X_i} = \frac{1}{n},$$

то согласно формуле (18) нотна выборочного среднего арифметического равна

$$N_f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_i} \right| \right) \Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \right) \Delta = \Delta$$

Согласно Центральной предельной теореме теории вероятностей

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\sqrt{n}\, \frac{\overline{X} - a}{\sigma} < x \right) = \Phi(x),\ a = M(X_i),\ \sigma = \sqrt{D(X_i)},\ i = 1.2.\ldots,n\,.$$

Следовательно, необходимый объем выборки равен

$$n = \frac{\sigma^2}{N_f^2(X_1, X_2, \ldots, X_n)} = \frac{\sigma^2}{\Delta^2}\,. \tag{23}$$

Например, если $\sigma = 1,\ \Delta = \frac{1}{6}$ (т.е. среднее квадратическое отклонение результата измерения в 6 раз превосходит точность измерения), то необходимый объем выборки равен 36.

Если точность измерения увеличивается, т.е. Δ уменьшается, то согласно (23) необходимый объем выборки увеличивается. И, наоборот, при применении средства измерения с малой точностью (т.е. с большим Δ) достаточно использовать небольшой объем выборки.

Если используемая в формуле (23) теоретическая дисперсия σ^2 неизвестна, то ее следует оценить либо по результатам предыдущих исследований того же явления или процесса, либо с помощью выборочной дисперсии, найденной по результатам анализа пробной выборки небольшого объема.

Заключение

При планировании исследований, связанных со сбором и анализом статистических данных, часто возникает вопрос о том, какой объем выборки следует использовать. В настоящей статье получены правила расчета необходимого объема выборки на примере изучения значений вероятностей и математических ожиданий случайной величины.

Для каждой из этих статистических задач в рамках классической математической статистики рассмотрены два подхода. В первом из них рассматриваются задачи статистического оценивания с заданной точностью, под которой понимается полуширина доверительного интервала. Во втором речь идет о проверке статистических гипотез, о выборе между нулевой и альтернативной гипотезами, исходя из заданных значимости и мощности статистического критерия.

Если известна точность проводимых измерений, то ответить на вопрос о необходимом объеме выборки позволяет статистика интервальных данных. Рассмотрен общий подход на основе принципа уравнивания показателей статистических и метрологических погрешностей. В качестве примера применения этого подхода проанализировано оценивание математического ожидания.

В дальнейших исследованиях целесообразно изучить скорость сходимости в полученных асимптотических выражениях, другими словами, рассмотреть конечные объемы выборок с целью перейти от теории больших выборок к теории малых выборок.

Литература

1. Ларина Т.Н. Обоснование необходимого объема выборки при исследовании качества жизни сельского населения России // Интернет-журнал Науковедение. 2015. Т.7, №1(26). С. 21.

2. Попов А.М. Устойчивость метода проверки гипотезы о равенстве средних двух выборок // Наука и бизнес: пути развития. 2017. № 6(72). С. 22-24.

3. Прокопчина С.В. Определение необходимого объема выборочных данных для создания шкалы с динамическими ограничениями // Экономика и управление: проблемы, решения. 2018. Т. 4. № 6. С. 109-114.

4. Левин Д.М., Стефан Д., Кребиль Т.С., Беренсон М.Л. Статистика для менеджеров с использованием Microsoft Excel, 4-е изд. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. — 1312 с.

5. Алескандровская Л.Н., Солонников Ю.И. Планирование объема статистических испытаний // Труды ФГУП "НПЦАП". Системы и приборы управления. 2009. № 4. С. 33-36.

6. Фейгенбаум Ю. М. Минимально необходимый объем обработки полетной информации для оценки типовых условий эксплуатации и нагруженности экземпляра самолета // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2012. № 175. С. 25-29.

7. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л., Вестяк В.А. Алгоритмы планирования усталостных испытаний авиационных материалов // Программные продукты и системы.

2014. № 4. С. 205-210.

8. Шлеенко А.В., Волкова С.Н., Сивак Е.Е. Оптимизация выборки для постановки научного эксперимента технологического процесса строительства // БСТ: Бюллетень строительной техники. 2018. № 11(1011). С. 46-48.

9. Макарова М.Н., Шекунова Е.В., Рыбакова А.В., Макаров В.Г. Объем выборки лабораторных животных для экспериментальных исследований // Фармация. 2018. Т.67, № 2. С. 3-8.

10. Кошевой О.С., Карпова М.К. Определение объема выборочной совокупности при проведении региональных социологических исследований // Известия ВУЗов. Поволжский регион. Общественные науки. 2011. №2. С. 98-104.

11. Савченко В.В. Определение объема контрольной выборки в условиях априорной неопределенности по принципу гарантированного результата // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 2015. № 1(198). С. 74-78.

12. Мотренко А.П. Оценка необходимого объема выборки пациентов при прогнозировании сердечно-сосудистых заболеваний // Машинное обучение и анализ данных. 2012. Т. 1. № 3. С. 354-366.

13. Реброва О.Ю., Гусев А.В. Расчет объема выборки для клинических испытаний систем поддержки принятия врачебных решений с бинарным откликом // Современные технологии в медицине. 2022. Т. 14. № 3. С. 6-14.

14. Наркевич А.Н., Виноградов К.А. Методы определения минимально необходимого объема выборки в медицинских исследованиях // Социальные аспекты здоровья населения. 2019. Т. 65, № 6. № 10.

15. Гржибовский А.М., Горбатова М.А., Наркевич А.Н., Виноградов К.А. Объем выборки для корреляционного анализа // Морская медицина. 2020. Т. 6. № 1. С. 101-106.

16. Гржибовский А.М., Горбатова М.А., Наркевич А.Н., Виноградов К.А. Необходимый объем выборки для сравнения средних арифметических в двух независимых группах // Морская медицина. 2020. Т. 6. № 2. С. 106-113.

17. Гржибовский А.М., Горбатова М.А., Наркевич А.Н., Виноградов К.А. Необходимый объем выборки для сравнения долей в двух независимых группах // Морская медицина. 2020. Т. 6. № 3. С. 76-83.

18. Тихова Г.П. Планируем клиническое исследование. Вопрос №1: Как определить необходимый объем выборки? // Регионарная анестезия и лечение острой боли. 2014. Т.8. № 3. С. 57-63.

19. Тихова Г.П. Планируем клиническое исследование. Вопрос № I: как определить необходимый объем выборки? // Здравоохранение (Минск). 2016. № 9. С. 47-53.

20. Шпитонков М.И. Моделирование размера выборки в клинических испытаниях для бинарных данных // Исследование операций (модели, системы, решения). 2018. №4(13). С. 28-35.

21. Шпитонков М.И. Моделирование размера выборки в клинических испытаниях в случае типа "лучше" // Исследование операций (модели, системы, решения). 2019. Т. 5. С. 38-47.

22. Ветров Л.Г., Кузнецова А.А., Сунчалина А.Л. Прикладная статистика: методические указания к выполнению лабораторных работ – М: Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2017. – 52 с.

23. Орлов А. И. Контроллинг статистических методов // Контроллинг. 2022. № 4(86). - С. 2-11.

24. Орлов А.И. Контроллинг экономико-математических методов // Научный

журнал КубГАУ. 2023. № 190. С. 70 – 80.

25. Орлов А.И. О требованиях к статистическим методам анализа данных (обобщающая статья) // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2023. Т.89. №11. С. 98-106.

26. Орлов А.И. Вероятность и прикладная статистика: основные факты: справочник. — М.: КноРус, 2023. - 190 с.

27. Орлов А.И. Прикладной статистический анализ. — М.: Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 812 с.

28. Орлов А.И. Искусственный интеллект: статистические методы анализа данных. — М.: Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 843 с.

29. Орлов А.И. О новой парадигме математических методов исследования // Научный журнал КубГАУ. 2016. №122. - С. 807–832.

30. Орлов А.И. Устойчивые экономико-математические методы и модели. — М.: Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 337 с.

References

1. Larina T.N. Obosnovanie neobhodimogo ob"ema vyborki pri issledovanii kachestva zhizni sel'skogo naseleniya Rossii // Internet-zhurnal Naukovedenie. 2015. T.7, №1(26). S. 21.

2. Popov A.M. Ustojchivost' metoda proverki gipotezy o ravenstve srednih dvuh vyborok // Nauka i biznes: puti razvitiya. 2017. № 6(72). S. 22-24.

3. Prokopchina S.V. Opredelenie neobhodimogo ob"ema vyborochnyh dannyh dlya sozdaniya shkaly s dinamicheskimi ogranicheniyami // Ekonomika i upravlenie: problemy, resheniya. 2018. T. 4. № 6. S. 109-114.

4. Levin D.M., Stefan D., Krebil' T.S., Berenson M.L. Statistika dlya menedzherov s ispol'zovaniem Microsoft Excel, 4-e izd. — M.: Izdatel'skij dom «Vil'yams», 2004. — 1312 s.

5. Aleskandrovskaya L.N., Solonnikov YU.I. Planirovanie ob"ema statisticheskih ispytanij // Trudy FGUP "NPCAP". Sistemy i pribory upravleniya. 2009. № 4. S. 33-36.

6. Fejgenbaum YU. M. Minimal'no neobhodimyj ob"em obrabotki poletnoj informacii dlya ocenki tipovyh uslovij ekspluatacii i nagruzhennosti ekzemplyara samoleta // Nauchnyj vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta grazhdanskoj aviacii. 2012. № 175. S. 25-29.

7. Agamirov L.V., Agamirov V.L., Vestyak V.A. Algoritmy planirovaniya ustalostnyh ispytanij aviacionnyh materialov // Programmnye produkty i sistemy. 2014. № 4. S. 205-210.

8. SHleenko A.V., Volkova S.N., Sivak E.E. Optimizaciya vyborki dlya postanovki nauchnogo eksperimenta tekhnologicheskogo processa stroitel'stva // BST: Byulleten' stroitel'noj tekhniki. 2018. № 11(1011). S. 46-48.

9. Makarova M.N., SHekunova E.V., Rybakova A.V., Makarov V.G. Ob"em vyborki laboratornyh zhivotnyh dlya eksperimental'nyh issledovanij // Farmaciya. 2018. T.67, № 2. S. 3-8.

10. Koshevoj O.S., Karpova M.K. Opredelenie ob"ema vyborochnoj sovokupnosti pri provedenii regional'nyh sociologicheskih issledovanij // Izvestiya VUZov. Povolzhskij region. Obshchestvennye nauki. 2011. №2. S. 98-104.

11. Savchenko V.V. Opredelenie ob"ema kontrol'noj vyborki v usloviyah apriornoj neopredelennosti po principu garantirovannogo rezul'tata // Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekonomika. Informatika. 2015. № 1(198). S. 74-78.

12. Motrenko A.P. Ocenka neobhodimogo ob"ema vyborki pacientov pri prognozirovanii serdechno-sosudistyh zabolevanij // Mashinnoe obuchenie i analiz dannyh.

2012. T. 1. № 3. S. 354-366.

13. Rebrova O.YU., Gusev A.V. Raschet ob"ema vyborki dlya klinicheskih ispytanij sistem podderzhki prinyatiya vrachebnyh reshenij s binarnym otklikom // Sovremennye tekhnologii v medicine. 2022. T. 14. № 3. S. 6-14.

14. Narkevich A.N., Vinogradov K.A. Metody opredeleniya minimal'no neobhodimogo ob"ema vyborki v medicinskih issledovaniyah // Social'nye aspekty zdorov'ya naseleniya. 2019. T. 65, № 6. № 10.

15. Grzhibovskij A.M., Gorbatova M.A., Narkevich A.N., Vinogradov K.A. Ob"em vyborki dlya korrelyacionnogo analiza // Morskaya medicina. 2020. T. 6. № 1. S. 101-106.

16. Grzhibovskij A.M., Gorbatova M.A., Narkevich A.N., Vinogradov K.A. Neobhodimyj ob"em vyborki dlya sravneniya srednih arifmeticheskih v dvuh nezavisimyh gruppah // Morskaya medicina. 2020. T. 6. № 2. S. 106-113.

17. Grzhibovskij A.M., Gorbatova M.A., Narkevich A.N., Vinogradov K.A. Neobhodimyj ob"em vyborki dlya sravneniya dolej v dvuh nezavisimyh gruppah // Morskaya medicina. 2020. T. 6. № 3. S. 76-83.

18. Tihova G.P. Planiruem klinicheskoe issledovanie. Vopros №1: Kak opredelit' neobhodimyj ob"em vyborki? // Regionarnaya anesteziya i lechenie ostroj boli. 2014. T.8. № 3. S. 57-63.

19. Tihova G.P. Planiruem klinicheskoe issledovanie. Vopros № I: kak opredelit' neobhodimyj ob"em vyborki? // Zdravoohranenie (Minsk). 2016. № 9. S. 47-53.

20. SHpitonkov M.I. Modelirovanie razmera vyborki v klinicheskih ispytaniyah dlya binarnyh dannyh // Issledovanie operacij (modeli, sistemy, resheniya). 2018. №4(13). S. 28-35.

21. SHpitonkov M.I. Modelirovanie razmera vyborki v klinicheskih ispytaniyah v sluchae tipa "luchshe" // Issledovanie operacij (modeli, sistemy, resheniya). 2019. T. 5. S. 38-47.

22. Vetrov L.G., Kuznecova A.A., Sunchalina A.L. Prikladnaya statistika: metodicheskie ukazaniya k vypolneniyu laboratornyh rabot – M: Moskovskij gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet im. N.E. Baumana, 2017. – 52 s.

23. Orlov A. I. Kontrolling statisticheskih metodov // Kontrolling. 2022. № 4(86). - S. 2-11.

24. Orlov A.I. Kontrolling ekonomiko-matematicheskih metodov // Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2023. № 190. S. 70 – 80.

25. Orlov A.I. O trebovaniyah k statisticheskim metodam analiza dannyh (obobshchayushchaya stat'ya) // Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov. 2023. T.89. №11. S. 98-106.

26. Orlov A.I. Veroyatnost' i prikladnaya statistika: osnovnye fakty: spravochnik. — M.: KnoRus, 2023. - 190 s.

27. Orlov A.I. Prikladnoj statisticheskij analiz. — M.: Aj Pi Ar Media, 2022. — 812 c.

28. Orlov A.I. Iskusstvennyj intellekt: statisticheskie metody analiza dannyh. — M.: Aj Pi Ar Media, 2022. — 843 c.

29. Orlov A.I. O novoj paradigme matematicheskih metodov issledovaniya // Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2016. №122. - S. 807–832.

30. Orlov A.I. Ustojchivye ekonomiko-matematicheskie metody i modeli. — M.: Aj Pi Ar Media, 2022. — 337 c.