УДК 622.011.43

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Аршинов Г.А. – канд. физ.-мат. наук

Кубанский государственный аграрный университет

Математическая модель продольных колебаний построена на основе вывода и анализа эволюционных уравнений для линейно-вязкоупругого стержня.

Бесконечный стержень, свободный от внешних объемных и поверхностных воздействий, отнесен к системе координат. Ось x расположена вдоль оси стержня, а оси y и z – в одном из поперечных сечений.

Перемещения точек стержня аппроксимируются с помощью функций

$$u_1 = u(x,t), u_2 = -\nu y u_x, u_3 = -\nu z u_x, \tag{1}$$

где u_1, u_2, u_3 – соответственно перемещения по осям x, y, z; t – время, ν – коэффициент Пуассона.

Буквенные индексы переменных функции (1) определяют частную производную от функции по указанной переменной, т. е.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{и т.д.}$$

Конечные деформации стержня задаются тензором Грина

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}), \tag{2}$$

а физико-механические свойства – уравнениями линейной вязкоупругости:

$$s_{ij}(t) = 2\mu[e_{ij}(t) - \alpha \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} e_{ij}(\tau)]d\tau$$
$$\sigma(t) = K[\theta(t) - \alpha \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} \theta(\tau) d\tau] \quad , \qquad (3)$$

где s_{ij}, e_{ij} – соответственно компоненты девиаторов напряжений и деформаций; $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ – среднее напряжение, $\theta = \varepsilon_{ii}$ – объемное расширение, $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ – модуль объемной деформации, $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – параметр Ламе; α, β - константы, определяющие реологические свойства стержня; Е – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

При условии $\beta t >> 1$ интегральные операторы в уравнениях (3) заменяются дифференциальным разложением функции $e_{ij}(\tau)$, $\theta(\tau)$ в ряд Тейлора по степеням $(t-\tau)$ с сохранением двух слагаемых. В результате получаются приближенные формулы для компонент напряжений

$$\sigma_{ij} = L(\lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}), \qquad (4)$$

где введен оператор L, определяемый равенством $L = \dfrac{\alpha}{\beta^2}\dfrac{\partial}{\partial t} + (1 - \dfrac{\alpha}{\beta})$ и действующий на функцию $f(t)$ по правилу $Lf = \dfrac{\alpha}{\beta^2} f_t + (1 - \dfrac{\alpha}{\beta}) f$, а

$\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – параметр Ламе.

В развернутом виде:

$$\sigma_{11} = L[E(u_x + A_1 u_x^2 + A_2 r^2 u_{xx}^2)];$$
$$y_{22} = y_{33} = L[\,E\,(B_1 u_x^2 + B_2 r^2 u_{xx}^2)];$$

$$у_{12} = L\left[\frac{Eу}{2(1+н)}\left(-нu_{xx} + н^2 u_x u_{xx}\right)\right];$$

$$у_{13} = L\left[\frac{Ez}{2(1+н)}\left(-н\, u_{xx} + н^2 u_x u_{xx}\right)\right],$$

где

$$A_1 = a\left(2\nu^3 - \nu + 1\right), \qquad B_1 = a\nu\left(2\nu - 2\nu^2 + 1\right), \;\; A_2 = a\nu^2\left(1-\nu\right),$$

$$B_2 = a\nu^3, \qquad a = \frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad r^2 = z^2 + y^2.$$

Уравнения движения стержня выводятся из принципа виртуальных работ:

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \{\rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i - \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\} dV = 0, \tag{5}$$

где точкой обозначена производная по t, ρ – плотность материала стержня, $\delta\varepsilon_{ij}$ – вариации деформаций, δu_i – вариации перемещений, а тройной интеграл вычисляется по объему стержня.

С учетом (1), (2), (4) определяется вариация внутренней энергии стержня

$$\delta w = L\{E[-(u_{xx} 2A_1 u_x u_{xx} + 2A_2 r^2 u_{xx} u_{xxx} + 2u_x u_{xx} + 3A_1 u_x^2 u_{xx} +$$

$$+ A_2 r^2 u_{xx}^4 + 2A_2 r^2 u_x u_{xx} u_{xxx}) + \nu^2 r^2 \left(u_{xx}^2 + u_x u_{xxx} + A_1 u_{xxx} u_x^2 +\right.$$

$$\left.+ 2A_1 u_{xx}^2 u_x + 3A_2 r^2 u_{xx}^2 u_{xxx}\right)_x + 2\left(2\nu B_1 u_x u_{xx} + 2\nu B_2 r^2 u_{xx} u_{xxx} -\right.$$

$$\left.- 3\nu B_1 u_x^2 u_{xx} - \nu B_2 r^2 u_{xx}^3 - 2\nu^2 r^2 B_2 u_x u_{xx} u_{xxx}\right) +$$

$$+ \frac{r^2\nu^2}{4(1+\nu)}\left(u_{xxxx} - \left(2\nu u_x u_{xx} - \nu^2 u_x u_{xx}\right)_{xx} - \nu\left(-u_{xx}^2 + \nu u_x u_{xx}^2\right)_x\right)\;]\;\}\delta u.$$

Уравнение движения стержня получается из (5) после подстановки в него значения вариации внутренней энергии

$$\rho\left(-u_{tt} + \nu^2 r^2 u_{ttxx}\right) + LE\left\{\left[u_{xx} + (2A_1 - 4\nu B_1 + 2)u_x u_{xx} - \frac{\nu^2 r^2}{4(1+\nu)} u_{xxxx}\right] +\right.$$

$$+z^2\left(2A_2-3\nu^2-4\nu B_2+\frac{\nu^3}{1+\nu}\right)u_{xx}u_{xxx}+r^2\Big(2A_2-6\nu^2A_1+4\nu^2B_2+$$

$$+\frac{3\nu^4}{2(1+\nu)}+\frac{\nu^3}{2(1+\nu)}\Big)u_x u_{xx}u_{xxx}+(3A_1+6\nu B_1)u_x^2u_{xx}+\alpha_2r^2u_{xx}^4-$$

$$-z^2\left(\nu^2+\frac{\nu^3}{2(1+\nu)}\right)u_xu_{xxxx}+r^2\left(-2\nu^2A_1+2\nu^2B_2-\frac{\nu^4}{2(1+\nu)}\right)u_{xx}^3+$$

$$+r^2\left(\frac{\nu^4}{4(1+\nu)}-A_1\nu^2\right)-6A_2\nu^2r^4u_{xx}u_{xxx}^3-3A_2\nu^2r^4u_{xx}^2u_{xxxx}\Big\}=0$$

и преобразуется к безразмерным переменным

$$\xi=\frac{x}{l}-\frac{c}{l}t,\ \tau=\varepsilon\frac{c}{l}t,\ u*=\frac{u}{A},\ x^*=\frac{x}{d},\ y^*=\frac{y}{d},$$

где A – амплитудный параметр возмущения, l, d – соответственно характерные длина волны и поперечный размер стержня, c – скорость волны, $\varepsilon=\frac{A}{l}$ – характеристика нелинейности волнового процесса.

Допустим, что $\varepsilon=\frac{A}{l}$ – малый параметр, т.е. характерная длина волны l значительно превосходит амплитудный параметр A, а поперечный размер стержня и реологические постоянные $\alpha,\beta,$ определяют отношения порядков

$$\frac{\alpha c}{\beta^2 l}=O(\varepsilon),\qquad \frac{d}{l}=O(\sqrt{\varepsilon}).$$

В результате сохранения членами порядка не выше ε получается безразмерное уравнение движения стержня:

$$\frac{\rho c^2}{E}\left(-u_{\xi\xi}+2\varepsilon u_{\xi\tau}+\nu^2\frac{r^2}{l^2}u_{\xi\xi\xi\xi}\right)+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)u_{\xi\xi}-\frac{\alpha c}{\beta^2 l}u_{\xi\xi\xi}+$$

$$+2(A_1-4\nu B_1+2)\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\varepsilon u_\xi u_{\xi\xi}-\frac{\nu^2r^2}{4(1+\nu)l^2}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)u_{\xi\xi\xi\xi}=0. \quad (6)$$

Для анализа уравнения (6) применяется метод возмущений. Функция $u(\xi,\tau)$ представляется в виде асимптотического разложения

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \mathbf{K}. \qquad (7)$$

После подстановки (7) в уравнение (6) и с учетом введенных соотношений порядков в нулевом приближении запишем:

$$\left[-\frac{\rho c^2}{E} + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right] u_{0\xi\xi} = 0.$$

Согласно условию $u_{0\xi\xi} \neq 0$, из последнего уравнения определяется скорость распространения продольной волны в линейно-вязкоупругом стержне:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}(1 - \frac{\alpha}{\beta})}. \qquad (8)$$

Из формулы (8) при $\alpha = 0$, т. е. отсутствии свойства вязкости, вытекает известная формула для скорости распространения продольной волны в линейно-упругом стержне: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Для разрешимости уравнения относительно неизвестной функции u_1 в разложении (7), полученном из первого приближения, необходимо, чтобы u_0 удовлетворяло известному уравнению Кортевега де Вриза – Бюргерса:

$$\psi_\tau + b_1 \psi \psi_\xi + b_2 \psi_{\xi\xi\xi} + b_3 \psi_{\xi\xi} = 0, \qquad (9)$$

где

$$\psi = u_{0\xi},\ b_1 = 1 - \frac{\alpha}{\beta},\ b_2 = \frac{\nu r^2 d^2}{2 l^2 \varepsilon},\ b_3 = -\frac{\alpha c}{\beta^2 l \varepsilon}.$$

Точное решение уравнения (9) можно представить:

$$\psi = c_1 \mathrm{th}^2(\frac{k_1 \xi - \omega\tau}{2}) + c_2 \mathrm{th}(\frac{k_1 \xi - \omega\tau}{2}) + c_3,$$

где

$k_1 = \pm\frac{b_3}{5b_2}$, $\quad щ = \frac{6b_3^3}{125b_2^2}$, $\quad c_1 = -\frac{12b_3^2}{25b_1b_2}$, $\quad c_1 < 0$, $\quad c_2 = \pm\frac{6b_3^2}{25b_1b_2}$, $\quad c_2$ имеет знак k_1, $\quad c_3 = \frac{12b_3^2}{25b_1b_2} \pm \frac{6b_3^2}{25b_1b_2} = \frac{6b_3^2}{25b_1b_2}(2 \pm 1)$, $c_3 > 0$.

При $\frac{б}{в} < 1$ запишем неравенства вида $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ $b_3 < 0$, $щ < 0$.

Если в уравнениях выбран верхний знак "+", то с учетом $b_3 < 0$ и $k_1 < 0$ уравнение примет вид:

$$\psi = c_1 \mathrm{th}^2 (\frac{|k_1|\xi - |\omega|\tau}{2}) - c_2 \mathrm{th}(\frac{|k_1|\xi - |\omega|\tau}{2}) + c_3,$$

где
$$c_3 = \frac{12 b_2 b_3^2}{25 b_1 b_2^2} + \frac{6 b_3 b_3}{25 b_1 b_2} = \frac{18 b_3^2}{25 b_1 b_2}.$$

Из условия $\theta \to -\infty$ следует, что $ш \to c_1 - c_2 + c_3$,

где $\theta = |k_1|\xi - |\omega|\tau$, а $c_1 - c_2 + c_3 = \frac{12 b_3^2}{25 b_1 b_2^2}$.

При $и \to +\infty$ $\quad ш \to c_1 + c_2 + c_3 = 0$.

Производная $\psi'_\theta = -\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\frac{|k_1|\xi - |\omega\tau|}{2})} \frac{24b_3^2}{25b_1b_2^2}(\mathrm{th}(\frac{|k_1|\xi - |\omega\tau|}{2}) + \frac{1}{4})$.

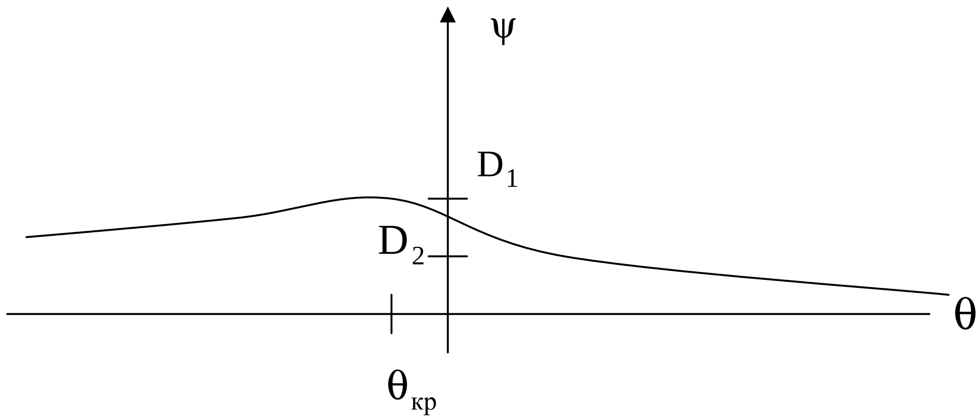
Критические точки функции определяются уравнением

$$\mathrm{th}(\frac{|k_1|\xi - |\omega\tau|}{2}) = -\frac{1}{4},$$

и функция $\psi(\frac{\theta}{2})$ будет максимальна в точке, определенной значением $\theta_{кр}$, являющимся корнем уравнения $\mathrm{th}\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4}$.

Тогда максимальное значение функции

$$\psi_{max}\left(\frac{\theta_{кр}}{2}\right) = \frac{3}{4}\frac{b_3^2}{b_1 b_2^2}.$$



Зависимость деформаций от перемещений

Зависимость деформации от перемещения качественно представлена на рисунке, где введены обозначения:

$$D_1 = \psi_{max}\left(\frac{\theta_{кр}}{2}\right) = \frac{3}{4}\frac{b_3^2}{b_1 b_2^2}, D_2 = c_3 = \frac{18 b_3^2}{25 b_1 b_2^2}.$$

При переходе к размерным переменным вычисляется поправка к скорости распространения волны, равная $\frac{\omega}{k_1}\varepsilon$.