УДК 519.816

UDC 519.816

08.00.13 - Математические и инструментальные методы экономики (экономические науки)

08.00.13 - Mathematical and instrumental methods of economics (economic sciences)

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЛЕКТИВНОГО ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

MODELING OF COLLECTIVE DECISION-MAKING

Ганичева Антонина Валериановна
к.ф.-м.н., доцент кафедры “Физико-математических дисциплин и информационных технологий”
SPIN-код: 9049-4545, AuthorID: 177856,
ORCID: 0000-0002-0224-8945
tgan55@yandex.ru
Тверская государственная сельскохозяйственная академия, ул. Василевского, дом 7, поселок Сахарово, Тверь, 17131, Россия

Ganicheva Antonina Valerianovna
Cand.Phys-Math.Sci., associate Professor of the Department of Physical and Mathematical Sciences and Information Technologies
tgan55@yandex.ru
Tver state agricultural academy,
Vasilevsky's street, settlement Saharovo, Tver, 171314, Russia

Ганичев Алексей Валерианович
доцент кафедры “Информатики и прикладной математики“
SPIN-код: 4747-0880, AuthorID: 178091
ORCID: 0000-0003-3389-7582
alexej.ganichev@yandex.ru
Тверской государственный технический университет, наб. Аф. Никитина, дом 22, Тверь, 170026, Россия

Ganichev Alexey Valerianovich
associate Professor of the Department of Computer Science and Applied Mathematics,
RSCI SPIN - code: 4747-0880, AuthorID: 178091
alexej.ganichev@yandex.ru
Tver State Technical University,
nab. A.Nikitina, 22, 170026, Tver, Russia

В работе предложена модель коллективного принятия решений группой экспертов. Целью данной работы является исследование качества коллективного решения но основе моделирования оценок дискретными законами распределения вероятностей при использовании критерия абсолютной ошибки групповой экспертизы. Оценивается согласованность общего решения группы экспертов. В качестве критерия согласованности решения используется сумма отклонений решений от среднего арифметического оценок. Построены модели группового оценивания объектов. Рассматриваются устойчивые дискретные законы распределения вероятностей: одномерный и многомерный законы Пуассона и биномиальный закон

The article proposes a model of collective decision-making by a group of experts. The purpose of this work is to study the quality of a collective decision on the basis of modeling estimates by discrete probability distribution laws using the criterion of the absolute error of a group examination. The consistency of the general decision of the group of experts is assessed. The sum of the deviations of the solutions from the arithmetic mean of the estimates is used as a criterion for the consistency of the solution. We have constructed models of group evaluation of objects and considered stable discrete laws of probability distribution: one-dimensional and multidimensional Poisson laws and binomial law

Ключевые слова: МОДЕЛЬ, ЭКСПЕРТ, РЕШЕНИЕ, ВЕРОЯТНОСТЬ, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ПОРОГ, ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА, АБСОЛЮТНАЯ ОШИБКА

Keywords: MODEL, EXPERT, SOLUTION, PROBABILITY, PROBABILITY DISTRIBUTION, THRESHOLD, DISCRETE RANDOM VARIABLE, ABSOLUTE ERROR

http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-174-007

Введение

Во всех сферах человеческой деятельности при оценке ситуаций и процессов приходится иметь дело с принятием коллективного решения. В ряде задач при многократном воспроизведении эксперимента определяется число значений данного показателя, когда он превосходят (не превосходят) заданного (известного) порогового уровня. Например, требуется принять коллективное решение относительно целесообразности дальнейшего выпуска данного вида продукции предприятия, если значения показателя - стоимости выпуска выше порога d. После принятия коллективного решения требуется оценить его качество с использованием критерия абсолютной ошибки. Для решения подобных задач удобно применять законы распределения дискретных случайных величин (ДСВ) [1].

Задача оценки качества коллективных оценок решалась преимущественно для значений непрерывных случайных величин [2]. Исследование качества тестовых заданий с использованием биномиального закона распределения рассмотрено в работах [3, 4], однако здесь используются другие критерии, а не абсолютная ошибка тестирования.

Целью данной работы является исследование качества коллективного решения но основе моделирования оценок законом распределения вероятностей Пуассона (одномерным и многомерным), а также биномиальным распределением.

1. Модель на основе закона распределения вероятностей Пуассона

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть ДСВ X представляет собой число оценок, не превосходящих данного порога, выставленных экспертами объекту оценивания. Формирование коллективной оценки будем рассматривать для типовых законов распределения ДСВ: пуассоновского, и биномиального распределений. Эти распределения выбраны для исследования качества коллективных дискретных оценок, т.к.

они обладают свойством устойчивости. Это обстоятельство позволяет получить аналитические оценки, избегая громоздких вычислений.

Пусть ДСВ имеет распределение Пуассона и n экспертов дали свои заключения в виде выборки (x_1, x_2,…,x_n). Поскольку выборка случайная, то каждый ее элемент можно рассматривать как случайную величину, имеющую пуассоновское распределение с параметром a_i $(i=\overline{1,n})$, равном $\lambda_i \cdot t$ где λ_i - плотность простейшего потока, t – время его наблюдения; λ_i может иметь, например, смысл плотности потока оценок i-го эксперта при n_i-кратном $(n_i \geq 1)$ оценивании им данного показателя. При этом $M[X_i]=D[X_i]=a_i$ $(i=\overline{1,n})$. Закон Пуассона устойчивый, поэтому $\sum_{i=1}^{n} X_i$ также имеет пуассоновское распределение с параметром (математическим ожиданием), равным $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Тогда случайная величина $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ распределена по закону Пуассона, при этом $M[\overline{x}]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

В этом случае, если X имеет распределение Пуассона и $M[X]=a$, то случайная величина $Y=X-\overline{x}$ также имеет этот же закон распределения, и $M[Y]=a-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = a_y$.

Пусть, для определенности, $a_y \geq 0$, в противном случае рассматриваем в качестве абсолютной ошибки величину $Y=\overline{x}-X$.

Таким образом, для определения качества коллективной оценки можно использовать вероятность β того, что ошибки экспертов при коллективном решении будут в заданных границах: $0 \leq y \leq c$, причем c - натуральное число, включая 0. Данная вероятность вычисляется по формуле:

$$\beta = P(0 \le y \le c) = \sum_{i=0}^{c} \frac{a_y^i}{i!} e^{-a_y}. \qquad (1)$$

Обобщением полученных результатов на многомерный случай является многомерное распределение Пуассона.

Для него вероятность того, что координаты случайного вектора $X = (X^{(1)}, ..., X^{(k)})$ примут фиксированные значения, соответственно, $X^{(1)} = x^{(1)},\ X^{(2)} = x^{(2)}, ..., X^{(k)} = x^{(k)}$, вычисляется по формуле:

$$P(X^{(1)} = x^{(1)}, ..., X^{(k)} = x^{(k)}) = e^{-\sum_{j=1}^{k} a^{(j)}} \prod_{j=1}^{k} \frac{(a^{(j)})^{x^{(j)}}}{x^{(j)}!}, \qquad (2)$$

где $a^{(j)} = \lambda^{(j)} \cdot t = M[x^{(j)}],\ (j = \overline{1,k}),\ \lambda^{(j)}$ - плотность потока, связанного с j-ой координатой, t – рассматриваемый промежуток времени.

Примером применения данного закона является описание ситуации, когда группа оценщиков проводит оценку исследуемого объекта за k периодов. Тогда вводится k-мерный вектор $Y = (Y^{(1)}, ..., Y^{(k)})$ абсолютных ошибок оценивания, где $Y^{(j)} = X^{(j)} - \overline{x}^{(j)},\ \overline{x}^{(j)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x^{(j)}$ и $M[Y^{(j)}] = a^{(j)} - \frac{1}{n} a_i^{(j)}\ \ (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,k})$. Причем каждая ошибка в силу устойчивости закона Пуассона будет иметь пуассоновский закон распределения.

В этом случае вероятность того, что ошибки экспертов при коллективном решении будут находиться в заданных границах, будет равна:

$$\beta = P(0 \le y^{(1)} \le c,\ 0 \le y^{(2)} \le c, ..., 0 \le y^{(k)} \le c) = \prod_{j=1}^{k} \sum_{x^{(j)}=0}^{c} \frac{(a^{(j)})^{x^{(j)}}}{x^{(j)}!} e^{-a^{(j)}}. \qquad (3)$$

Формула (1) является частным случаем формулы (3) при k=1.

2. Модель на основе биномиального закона распределения вероятностей

Допустим теперь, что случайная величина X имеет биномиальный закон распределения.

Предположим, что пороговое значение задано, вероятность появления оценки выше порога для i-го эксперта равна p_i, при этом p_i достаточно маленькая вероятность, например, $p_i = 0,01$. Тогда при $n_i \le \frac{10}{p_i}$ вероятность β будет вычисляться по формуле:

$$\beta = P(0 \le y \le c) = \sum_{i=0}^{c} \frac{(n_i p_i)^i}{i!} e^{-n_i p_i}, \qquad (3)$$

Здесь $a_{y_i} = n_i p_i$.

Биномиальное распределение является устойчивым. Поэтому $Y = \overline{x} - X$ будет иметь биномиальное распределение, если случайная величина X имеет биномиальный закон распределения. При этом, если параметры распределения для случайной величины X равны p и m_0, для случайной величины X_i - p и m_i, то для случайной величины Y – это будут p и $m = m_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i$. Тогда

$$\beta = P(0 \le y \le c) = \sum_{i=0}^{c} C_m^i \cdot p^i \cdot (1-p)^{m-i}. \qquad (4)$$

Аналогично можно получить соотношение для многомерного биномиального закона распределения вероятностей.

Заключение

В статье рассмотрен вопрос согласованности экспертных оценок по дискретным наблюдениям. В качестве критерия согласованности предлагается использовать сумму центрированных значений оценок.

Значение этого критерия характеризует абсолютную ошибку оценки. При полной согласованности мнений значение показателя равно нулю.

Разработанный в статье метод может найти применение при оценивании объекта группой независимых экспертов, например, определение качества тестирования в учебном процессе, проверка соответствия стандартам новой продукции, оценка персонала, инвестиционных проектов, экологической обстановке и т.д.

Литература

1. Трегубов Р.Б., Стремоухов М.В. Задача оценивания параметра биномиального распределения по ограниченному числу опытов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2015. № 2 (163). С. 93-106.
2. Печников Д.А. Модели управления процессом критериально-ориентированного тестирования при подготовке специалистов на флоте // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 663–673. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-663-673.
3. Воробьев О.Ю. Головков Л.С. Многомерные дискретные распределения // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2008. Т. 1. № 1. С. 68-77.
4. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Математическое моделирование оценки качества коллективного решения // Экономика. Информатика. 2020. Т. 47. № 3. С. 573-582.

References

1. Tregubov R.B., Stremouhov M.V. Zadacha ocenivaniya parametra binomial'nogo raspredeleniya po ogranichennomu chislu opytov // Izvestiya YUFU. Tekhnicheskie nauki. 2015. № 2 (163). S. 93-106.
2. Pechnikov D.A. Modeli upravleniya processom kriterial'no-orientirovannogo testirovaniya pri podgotovke specialistov na flote // Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova. 2017. T. 9. № 3. S. 663–673. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-663-673.
3. Vorob'ev O.YU. Golovkov L.S. Mnogomernye diskretnye raspredeleniya // ZHurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Matematika i fizika. 2008. T. 1. № 1. S. 68-77.
4. Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Matematicheskoe modelirovanie ocenki kachestva kollektivnogo resheniya // Ekonomika. Informatika. 2020. T. 47. № 3. S. 573-582.