

УДК 338.436.33

UDC 338.436.33

05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)

05.13.18-Mathematical modeling, numerical methods and software packages (technical sciences)

**ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ ПОВЫШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ И ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ НАДЕЖНОСТИ ТРУБОПРОВОДОВ<sup>1</sup>**

**RESEARCH OF WAYS TO INCREASE ECONOMIC EFFICIENCY AND OPERATIONAL RELIABILITY OF PIPELINES**

Аршинов Георгий Александрович  
д.т.н., профессор

Arshinov Georgy Aleksandrovich  
Dr.Sci.Tech., professor

*Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т.Трубилина, Краснодар, Россия*

*Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia*

Лаптев Сергей Владимирович  
к.ф.-м.н., доцент

Laptev Sergey Vladimirovich  
Cand.Econ.Sci., associate professor

*Кубанский государственный аграрный университет им.И.Т.Трубилина, Краснодар, Россия*

*Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia*

Трубопроводы, применяемые в практике, должны обладать надежностью для обеспечения безаварийной работы в период эксплуатации. Наличие микроповреждений в материале трубопроводов ведет к понижению их прочности. В окрестности микроповреждений возможно развитие разрушения материала, приводящего к выходу из строя трубопровода и, как следствие, к экономическому ущербу. Совершенствование акустических способов выявления микроповреждений в реологических материалах трубопроводов можно осуществить путем разработки математически уточненных моделей деформационных волн в цилиндрических оболочках, моделирующих элементы трубопроводных систем

The pipelines used in practice must be reliable to ensure trouble-free operation during the period of operation. The presence of microdamages in the material of pipelines leads to a decrease in their strength. In the vicinity of microdamages, the development of material destruction is possible, leading to the failure of the pipeline and, as a consequence, to economic damage. Improvement of acoustic methods for detecting microdamages in rheological materials of pipelines can be carried out by developing mathematically refined models of deformation waves in cylindrical shells that simulate elements of pipeline systems

Ключевые слова: ТРУБОПРОВОДЫ, НАДЕЖНОСТЬ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ, МИКРОДЕФЕКТЫ, АКУСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА, НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, ВОЛНОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ, НАСЛЕДСТВЕННОСТЬ, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Keywords: PIPELINES, RELIABILITY, CYLINDRICAL SHELLS, MICRODEFECTS, ACOUSTIC DIAGNOSTICS, NONLINEAR WAVES, WAVE CHARACTERISTICS. HERITAGE, EQUATIONS OF MOTION

DOI: <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-171-022>

В качестве модели элементов трубопроводной системы будем

<sup>1</sup>Статья выполнена по гранту РФФИ 19-010-00385 А «Повышение экономической и эксплуатационной надежности строительных и водо-, нефте-, газопроводных сооружений путем совершенствования неразрушающих акустических методов диагностики»

считать цилиндрическую оболочку, изготовленную из материала с нелинейными реологическими свойствами. Для обеспечения безаварийной работы таких элементов трубопроводов под нагрузкой и повышения их эксплуатационной надежности необходимо улучшать неразрушающие акустические методы выявления микрповреждений в материале путем математического моделирования распространения деформационных волн в цилиндрических оболочках, учитывая их нелинейные свойства и применяя строгие методы математического моделирования.

Требуется теоретически вычислить значения волновых параметров материала оболочки. Экспериментальный замер скорости деформационной волны в цилиндрической оболочке, которая моделирует элемент трубопровода, методами нелинейной акустики и сравнение ее с расчетными значениями скорости, установленными с помощью математических моделей, можно точнее фиксировать наличие микрповреждений, в окрестности которых может развиваться разрушение трубопровода под воздействием внешних сил.

Поэтому задача определения более точных значений скорости волны деформаций в цилиндрической оболочке с привлечением моделей деформирования, учитывающих свойства ползучести материала, является актуальной.

Экономическая и эксплуатационная надежность трубопроводных сооружений зависит от их прочности, которая может снижаться за счет существования микрповреждений в конструкции. Уменьшение прочности может вызвать потерю несущей способности, разрушение сооружения, сопровождающееся экономическим ущербом, ухудшением экологии.

В основу повышения надежности трубопроводов положено совершенствование акустического обнаружения микрповреждений материала по уточненным волновым характеристикам, полученным путем математического моделирования нелинейных деформационных волн в

вязкоупругих цилиндрических оболочках.

Исследуем продольные деформационные волны в бесконечных цилиндрических оболочках, имеющих толщину  $h$  и радиус  $R$ . Выберем цилиндрическую систему координат, в которой ось  $x$  - образующая срединной поверхности, ось  $y$  - касательная к осевому сечению оболочки,  $z$  - нормаль. Пусть на оболочку не действуют внешние силы (рис.1). Воспользуемся гипотезой Кирхгофа - Лява, пренебрегая инерцией вращения.

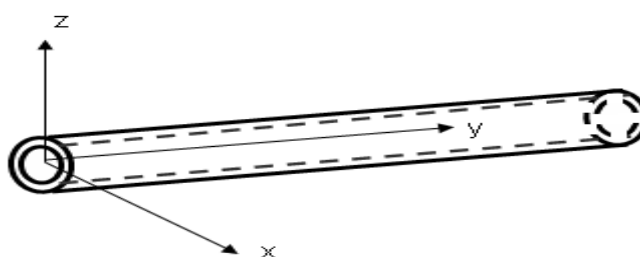


Рис. 1. Система координат для цилиндрической оболочки

Компоненты конечных деформаций определим с помощью формул:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^z &= U_x + \frac{1}{2}[(U_x - zW_{xx})^2 + (V_x - zW_{yy})^2 + W_x^2] - zW_{xx}; \\ \epsilon_y^z &= V_y - K_y W + \frac{1}{2}[(U_y - zW_{xy})^2 + (V_y - zW_{yy})^2 + W_y^2] - zW_{yy}; \quad (1) \\ \gamma^z &= U_y + V_x + (U_x - zW_{xx})(U_y - zW_{xy}) + (V_x - zW_{xy}) \times \\ &\times (V_y - zW_{yy}) + W_x W_y - 2zW_{xy}, \end{aligned}$$

где  $U, V, W$  - компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности в соответствии с координатными осями  $x, y, z$ . Индекс  $z$  соответствует деформации в слое оболочки, расположенном на расстоянии  $z$  от срединной поверхности; кривизна оболочки определяется параметром  $K_y = \frac{1}{R}$ .

В основу описания физических свойств материала оболочки положим уравнения линейной теории вязкоупругости при линейно-

упругих объемных деформациях:

$$\sigma_x^z = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) - 2\mu\alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} (1 + a\epsilon_u^2) e_x d\tau;$$

$$\sigma_y^z = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) - 2\mu\alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} (1 + a\epsilon_u^2) e_y d\tau;$$

(2)

$$\tau = \mu \left[ \gamma - \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} (1 + a\epsilon_u^2) \gamma d\tau \right],$$

$e_x = \epsilon_x - \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y)$ ;  $e_y = \epsilon_y - \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y)$  – девиаторные компоненты деформаций.

$\epsilon_u^2 = \frac{4}{3}(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 - \epsilon_x\epsilon_y + \frac{3}{4}\gamma^2)$  – интенсивность деформаций в квадрате.

Заменим интегральные операторы в (2) дифференциальными, используя разложение функций  $e_x$ ;  $e_y$ ;  $\gamma$  в ряды Тейлора со степенями  $(t-\tau)$ . Положим, что  $\beta t \gg 1$ , т.е. память материала оболочки быстро затухающая.

Сохраним в рядах Тейлора два слагаемых, опустим индекс  $z$ , получим следующие выражения связи между компонентами напряжений и деформаций:

$$\sigma_x = \left( \frac{E}{1-\nu^2} + \frac{2}{3}p \right) \epsilon_x + \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{p}{3} \right) \epsilon_y + a p (\epsilon_u^2 e_x);$$

$$\sigma_y = \left( \frac{E}{1-\nu^2} + \frac{2}{3}p \right) \epsilon_y + \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{p}{3} \right) \epsilon_x + a p (\epsilon_u^2 e_y);$$

(3)

$$\tau = \left( \frac{E}{2(1+\nu)} + \frac{p}{2} \right) \gamma + a \frac{p}{2} (\epsilon_u^2 \gamma).$$

Обозначим  $N = \frac{E}{1-\nu^2} + \frac{2p}{3}$ ;  $K = \frac{E}{2(1+\nu)} + \frac{p}{2}$ ;  $L = \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{p}{3} \right)$  и

учитывая (1) в формулах (3), имеем:

$$\sigma_x = N[U_x + \frac{1}{2}(U_x^2 - 2zU_x W_{xx} + z^2 W_{xx}^2 + V_x^2 - 2zV_x W_{xy} + z^2 W_{xy}^2 + W_x^2) - zW_{xx}] + L[V_y + \frac{1}{2}(U_y^2 - 2zU_y W_{xy} + z^2 W_{xy}^2 + V_y^2 - 2zV_y W_{yy} + z^2 W_{yy}^2 + W_y^2) - zW_{yy}] + ap(\epsilon_u^2 e_x);$$

$$\sigma_y = N[V_y - K_y W + \frac{1}{2}(U_y^2 - 2zU_y W_{xy} + z^2 W_{xy}^2 + V_y^2 - 2zV_y W_{yy} + z^2 W_{yy}^2 + W_y^2) - zW_{yy}] + L[U_x + \frac{1}{2}(U_x^2 - 2zU_x W_{xx} + z^2 W_{xx}^2 + V_x^2 - 2zV_x W_{xy} + z^2 W_{xy}^2 + W_x^2) - zW_{xx}] + ap(\epsilon_u^2 e_y);$$

$$\tau = K[U_y + V_x - 2zW_{xy} + U_x U_y - z(U_x W_{xy} + U_y W_{xx}) + z^2 W_{xx} W_{xy} + V_x V_y - z(V_x W_{yy} + V_y W_{xy}) + z^2 W_{xy} W_{yy} + W_x W_y] + a \frac{p}{2} (\epsilon_u^2 \gamma);$$

По формулам для усилий и моментов в элементе цилиндрической оболочки

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz; \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz; \quad T = \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz;$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz; \quad H = \int_{-h/2}^{h/2} \tau z dz.$$

получим компоненты усилий

$$N_x = N\{h[U_x + \frac{1}{2}(U_x^2 + V_x^2 + W_x^2)] + \frac{h^3}{24}(W_{xx}^2 + W_{xy}^2)\} + L\{h[V_y + \frac{1}{2}(U_y^2 + V_y^2 + W_y^2)] + \frac{h^3}{24}(W_{xy}^2 + W_{yy}^2)\} + ap \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_u^2 e_x dz;$$

$$N_y = N\{h[V_y - K_y W + \frac{1}{2}(U_y^2 + V_y^2 + W_y^2)] + \frac{h^3}{24}(W_{xy}^2 + W_{yy}^2)\} + L\{h[U_x + \frac{1}{2}(U_x^2 + V_x^2 + W_x^2)] + \frac{h^3}{24}(W_{xx}^2 + W_{xy}^2)\} + ap \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_u^2 e_y dz;$$

$$T = K\{h[U_y + V_x + U_x U_y + V_x V_y + W_x W_y] + \frac{h^3}{12}(W_{xx} W_{xy} + W_{xy} W_{yy})\} + a \frac{p}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_u^2 \gamma dz$$

и моментов сил

$$M_x = -\frac{h^3}{12} \{N(2U_x U_{xx} + 2V_x W_{xy} + W_{xx}) + L(2U_y W_{xy} + 2V_y W_{yy} + W_{yy})\} + a p \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_u^2 e_x z dz;$$

$$M_y = -\frac{h^3}{12} \{N(2U_y W_{xy} + 2V_y W_{yy} + W_{yy}) + L(2U_x U_{xx} + 2V_x W_{xy} + W_{xx})\} + a p \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_u^2 e_y z dz;$$

$$H = -\frac{h^3}{12} K(2W_{xy} + U_x W_{xy} + U_y W_{xx} + V_x W_{yy} + V_y W_{xy}) + a \frac{p}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_u^2 \gamma dz.$$

Интенсивность деформаций  $\epsilon_u^2 \approx \frac{4}{3}(A - Bz + Dz^2),$

где

$$A = U_x^2 + V_y^2 - U_x V_y + \frac{3}{4}(U_y^2 + 2U_y V_x + V_x^2);$$

$$B = 2U_x W_{xx} + 2V_y W_{yy} + U_x W_{yy} + V_y W_{xx} + \frac{3}{2}W_{xy}(U_y + V_x)$$

;

$$D = W_{xx}^2 + W_{yy}^2 + W_{xx} W_{yy} + 3W_{xy}^2.$$

Вычислим произведения

$$\epsilon_u^2 e_x \approx \frac{1}{3} \epsilon_u^2 (2U_x - 2zW_{xx} - V_y + zW_{yy});$$

$$\varepsilon_u^2 e_y \approx \frac{1}{3} \varepsilon_u^2 (2V_y - 2zW_{yy} - U_x + zW_{xx}),$$

$$\varepsilon_u^2 \gamma \approx \varepsilon_u^2 (U_y + V_x - 2zW_{xy})$$

и интегралы

$$\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_u^2 e_x dz = \frac{4}{9} \{hA(2U_x - V_y) + \frac{h^3}{12} [B(2W_{xx} - W_{yy}) + D(2U_x - V_y)]\};$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_u^2 e_y dz = \frac{4}{9} \{hA(2V_y - U_x) + \frac{h^3}{12} [B(2W_{yy} - W_{xx}) + D(2V_y - U_x)]\}$$

;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_u^2 \gamma dz = \frac{4}{3} \{hA(U_y + V_x) + \frac{h^3}{12} [2BW_{xy} + D(U_y + V_x)]\};$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_u^2 e_x z dz = \frac{4}{9} \left\{ \frac{h^3}{12} [A(2W_{yy} - 2W_{xx}) - B(2U_x - V_y)] + \frac{h^5}{80} (D(W_{yy} - 2W_{xx})) \right\}$$

;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_u^2 e_y z dz = \frac{4}{9} \left\{ \frac{h^3}{12} [A(2W_{xx} - 2W_{yy}) - B(2V_y - U_x)] + \frac{h^5}{80} (D(W_{xx} - 2W_{yy})) \right\}$$

;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_u^2 \gamma z dz = \frac{4}{3} \left\{ \frac{h^3}{12} [-2AW_{xy} - B(U_y + V_x)] - \frac{h^5}{40} DW_{xy} \right\}.$$

Введем обозначения:

$$d = U_x + \frac{1}{2}(U_x^2 + V_x^2 + W_x^2); \quad b = V_y + \frac{1}{2}(U_y^2 + V_y^2 + W_y^2);$$

$$c = U_y + V_x + U_x U_y + V_x V_y + W_x W_y;$$

$$m = 2U_x U_{xx} + 2V_x W_{xy} + W_{xx}; \quad n = 2U_y W_{xy} + 2V_y W_{yy} + W_{yy};$$

$$q = 2W_{xy} + U_x W_{xy} + U_y W_{xx} + V_x W_{yy} + V_y W_{xy}.$$

Получим компоненты усилий:

$$\begin{aligned}
 N_x &= N\left\{hd + \frac{h^3}{24}(W_{xx}^2 + W_{xy}^2)\right\} + L\left\{hb + \frac{h^3}{24}(W_{xy}^2 + W_{yy}^2)\right\} + \\
 &+ \frac{4}{9}ap\left\{hA(2U_x - V_y) + \frac{h^3}{12}[B(2W_{xx} - W_{yy}) + D(2U_x - V_y)]\right\}; \\
 N_y &= N\left\{hb + \frac{h^3}{24}(W_{xy}^2 + W_{yy}^2)\right\} + L\left\{hd + \frac{h^3}{24}(W_{xx}^2 + W_{xy}^2)\right\} + \\
 &+ \frac{4}{9}ap\left\{hA(2V_y - U_x) + \frac{h^3}{12}[B(2W_{yy} - W_{xx}) + D(2V_y - U_x)]\right\}; \\
 T &= K\left\{hc + \frac{h^3}{12}(W_{xx}W_{xy} + W_{xy}W_{yy})\right\} + \frac{4}{3}ap\left\{hA(U_y + V_x) + \right. \\
 &\left. + \frac{h^3}{12}[2BW_{xy} + D(U_y + V_x)]\right\}
 \end{aligned}$$

и моментов сил

$$\begin{aligned}
 M_x &= -\frac{h^3}{12}\{Nm + Ln\} + \frac{4}{9}ap\left\{\frac{h^3}{12}[A(W_{yy} - 2W_{xx}) - B(2U_x - V_y)] + \right. \\
 &\left. + \frac{h^5}{80}D(W_{yy} - 2W_{xx})\right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= -\frac{h^3}{12}\{Nn + Lm\} + \frac{4}{9}ap\left\{\frac{h^3}{12}[A(W_{xx} - 2W_{yy}) - B(2V_y - U_x)] + \right. \\
 &\left. + \frac{h^5}{80}D(W_{xx} - 2W_{yy})\right\};
 \end{aligned}$$

$$H = -\frac{h^3}{12}Kl + \frac{4}{3}ap\left\{\frac{h^3}{12}[-2AW_{xy} - B(U_y + V_x)] - \frac{h^5}{40}DW_{xy}\right\}.$$

После подстановки значений усилий и моментов в уравнения движения

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0;$$



$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + K_y N_y + \frac{\partial}{\partial x} (N_x \frac{\partial W}{\partial x} + T \frac{\partial W}{\partial y}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} (T \frac{\partial W}{\partial x} + N_y \frac{\partial W}{\partial y}) - \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

при сохранении членов первого и второго порядка малости получим уравнения движения цилиндрической оболочки в перемещениях:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ N \left[ d + \frac{h^2}{24} (W_{xx}^2 + W_{xy}^2) \right] + L \left[ b + \frac{h^2}{24} (W_{xy}^2 + W_{yy}^2) \right] \right\} + \frac{4}{9} ap \left[ A_1 (2U_x - V_y) + \frac{h^2}{12} (B(2W_{xx} - W_{yy}) + D(2U_x - V_y)) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ K \left[ c + \frac{h^2}{12} (W_{xx} W_{xy} + W_{xy} W_{yy}) \right] + \frac{4}{3} ap \left[ A(U_y + V_x) + \frac{h^2}{12} (2BW_{xy} + D(U_y + V_x)) \right] \right\} - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ K \left[ c + \frac{h^2}{12} (W_{xx} W_{xy} + W_{xy} W_{yy}) \right] + \frac{4}{3} ap \left[ A(U_y + V_x) + \frac{h^2}{12} (2BW_{xy} + D(U_y + V_x)) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ N \left[ b + \frac{h^2}{24} (W_{xy}^2 + W_{yy}^2) \right] + L \left[ d + \frac{h^2}{24} (W_{xx}^2 + W_{xy}^2) \right] + \frac{4}{9} ap \left[ A(2V_y - U_x) + \frac{h^2}{12} (B(2W_{yy} - W_{xx}) + D(2V_y - U_x)) \right] \right\} - \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ -\frac{h^2}{12} (Nm + Ln) + \frac{4}{9} ap \left[ \frac{h^2}{12} (A(W_{yy} - 2W_{xx}) - B(2U_x - V_y)) + \frac{h^4}{80} D(W_{yy} - 2W_{xx}) \right] \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ -\frac{h^3}{12} (Nn + Lm) + \frac{4}{9} ap \frac{h^2}{12} (A(W_{xx} -$$

$$\begin{aligned}
 & -2W_{yy}) - B(2V_y - U_x)) + \frac{h^4}{80} D(W_{xx} - 2W_{yy})] \} + \\
 & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ -\frac{h^2}{12} Kq + \frac{4}{3} ap \left[ \frac{h^2}{12} (-2A_1 W_{xy} - B(U_y + U_x)) - \right. \right. \\
 & - \frac{h^4}{40} DW_{xy} ] \} + \frac{1}{R} \{ N[b + \frac{h^2}{24} (W_{xy}^2 + W_{yy}^2)] + L[d + \frac{h^2}{24} (W_{xx}^2 + W_{xy}^2)] + \\
 & + \frac{4}{9} ap[A_1(2V_y - U_x) + \frac{h^2}{12} (B(2W_{yy} - W_{xx}) + D(2V_y - U_x))] \} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \{ [N[d + \frac{h^2}{24} (W_{xx}^2 + W_{xy}^2)] + L[b \\
 & + \frac{h^2}{24} (W_{xy}^2 + W_{yy}^2)] + \frac{4}{9} ap[A(2U_x - \\
 & - V_y) + \frac{h^2}{12} (B(2W_{xx} - W_{yy}) + D(2U_x - V_y))] W_x + [K[c + \\
 & + \frac{h^2}{12} (W_{xx} W_{xy} + W_{xy} W_{yy})] + \frac{4}{3} ap[A(U_y + V_x) + \\
 & + \frac{h^2}{12} (2bW_{xy} + D(U_y + V_x))] W_y \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ [K[c + \frac{h^2}{12} (W_{xx} W_{xy} + W_{xy} W_{yy})] + \\
 & + \frac{4}{3} ap[A(U_y + V_x) + \frac{h^2}{12} (2bW_{xy} + D(U_y + V_x))] W_x + \\
 & + [N[b + \frac{h^2}{24} (W_{xy}^2 + W_{yy}^2)] + L[d + \frac{h^2}{24} (W_{xx}^2 + W_{xy}^2)] + \frac{4}{9} ap[A(2V_y - \\
 & - U_x) + \frac{h^2}{12} (B(2W_{yy} - W_{xx}) + D(2V_y - U_x))] W_y \} - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 . \quad (6)
 \end{aligned}$$

Упростим систему уравнений (4) – (6) асимптотическими методами, сводя ее исследование к анализу эволюционного уравнения. Приведем (4) – (6) к безразмерным переменным

$$U = AU^*; \quad V = AV^*; \quad W = hW^*; \quad x = Lx^*; \quad y = Ry^*,$$

где  $A$  – амплитудная характеристика волны,  $R$  – радиус кривизны оболочки,  $L$  – длина волны.

Пусть толщина оболочки  $h$  мала по сравнению с радиусом  $R$ . Введем малые безразмерные параметры:

$$\varepsilon = \frac{A}{L}; \delta_1 = \frac{\sqrt{hR}}{L}; \quad \delta_2 = \frac{h}{R}; \quad \delta_3 = \frac{A}{R}.$$

Положим  $\delta_1, \delta_2$  эквивалентными малому параметру  $\varepsilon$ , тогда параметр  $\delta_3$  будет эквивалентен  $\sqrt{\varepsilon}$ . Воспользуемся заменой переменных

$$\xi = x^* - \frac{c_1}{L}t; \quad \eta = \varepsilon y^*; \quad \tau = \varepsilon \frac{c_1}{L}t,$$

считая  $c_1$  неизвестной величиной.

Введем асимптотическое разложение для функций  $U^*$ ,  $V^*$ ,  $W^*$ , отбрасывая звездочки:

$$U = U_0 + \varepsilon U_1 + \dots; \quad V = \sqrt{\varepsilon}(V_0 + \varepsilon V_1 + \dots); \quad W = W_0 + \varepsilon W_1 + \dots$$

Пусть параметр  $\frac{\alpha c_1}{\beta^2 L}$  эквивалентен  $\varepsilon$ , тогда в нулевом приближении имеем систему уравнений:

$$E\left(\frac{\alpha_1}{6} - \nu\right) \frac{h}{R\varepsilon} W_{0\xi} = 0;$$

(7)

$$\left[\frac{1}{2}E(1 - \nu - \alpha_1) - \rho(1 - \nu^2)c_1^2\right]V_{0\xi\xi} + E\left[\frac{A}{\sqrt{\varepsilon}R}\left(\frac{1 + \nu}{2} - \frac{\alpha_1}{3}\right)U_{0\xi\eta} + \frac{hL}{R^2\sqrt{\varepsilon}}\left(\frac{\alpha_1}{3} - 1\right)W_{0\eta}\right] = 0;$$

(8)

$$\frac{h}{R\varepsilon} W_0 = \nu_1 U_{0\xi},$$

(9)

где  $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\beta(1 + \nu)}$ ;  $\nu_1 = \frac{3}{2} \frac{2\nu - \alpha_1}{3 - \alpha_1}$ .

С учетом (9) из (7) определяем скорость волны деформации

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{\alpha_2}{(1-v^2)}}, \quad (10)$$

здесь 
$$\alpha_2 = 1 - \frac{\alpha_1}{3} + \frac{3}{2} \left( \frac{\alpha_1}{6} - v \right) \frac{2v - \alpha_1}{3 - \alpha_1}.$$

В первом приближении имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & v_1 \left( v - \frac{\alpha_1}{6} \right) U_{1\xi\xi} - \frac{h}{R\varepsilon} \left( v - \frac{\alpha_1}{6} \right) W_{1\xi\xi} + \\ & + \frac{LA}{2R^2} \left( 1 - v - \frac{\alpha_1}{2} \right) U_{0\eta\eta} + \frac{A}{2R\sqrt{\varepsilon}} \left( 1 + v - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_1}{3} \right) V_{0\xi\eta} + \left( 1 - \frac{\alpha_1}{3} \right) U_{0\xi} U_{0\xi\xi} + \frac{\alpha_1 c_1}{2\beta L\varepsilon} \left( \frac{2}{3} - \frac{hv_1}{3R\varepsilon} \right) U_{0\xi\xi\xi} - \\ & - \frac{13\alpha_1 a}{6} U_{0\xi}^2 U_{0\xi\xi} + \frac{2\rho(1-v^2)c_1^2}{E} U_{0\xi\tau} = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{AL}{R^2} \left( 1 - \frac{\alpha_1}{3} \right) V_{0\eta\eta} + \frac{1}{2} \left( 1 - v - \alpha_1 - \alpha_2 \right) V_{1\xi\xi} + \frac{A}{\sqrt{\varepsilon}R} \left( \frac{1+v}{2} - \frac{\alpha_1}{3} \right) U_{1\xi\eta} + \\ & + \frac{hL}{R^2\sqrt{\varepsilon}} \left( \frac{\alpha_1}{3} - 1 \right) W_{1\eta} + \frac{\alpha_1 c_1}{2\beta\varepsilon L} \left( V_{0\xi\xi\xi} + \frac{2A}{3R\sqrt{\varepsilon}} U_{0\xi\xi\eta} - \frac{2}{3} \frac{hl}{R^2\sqrt{\varepsilon}} W_{0\xi\eta} \right) - \\ & - \frac{\rho(1-v^2)}{E} V_{1\xi\xi} + \frac{2\rho(1-v^2)}{E} V_{0\xi\tau} = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & v_1 U_{1\xi} - \frac{h}{R\varepsilon} W_1 + \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{A}{R\sqrt{\varepsilon}} \frac{\alpha_1}{2} \right) V_{0\eta} + \left( \frac{v}{2} - \frac{\alpha_1}{12} \right) U_{0\xi}^2 + \\ & + \frac{\rho(1-v^2)c_1^2 Rh}{EL^2\varepsilon^2} W_{0\xi\xi} + \frac{\alpha_1 c_1}{2\beta\varepsilon L} \left( \frac{2}{3} \frac{h}{R\varepsilon} W_{0\xi} + \frac{1}{3} U_{0\xi\xi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее уравнение (11) умножаем на  $\left( v - \frac{\alpha_1}{6} \right)$ , дифференцируем его по

$\xi$  с учетом того, что  $V_{0\xi} = \frac{U_{0\eta}}{A_2}$ , где

$$A_2 = \frac{\alpha_2 - \frac{1}{2}(1 - \nu - \alpha_1)}{\frac{A}{\sqrt{\epsilon R}} \left( \frac{1 + \nu}{2} - \frac{\alpha_1}{3} \right) + \frac{1\sqrt{\epsilon\nu_1}}{R} \left( \frac{\alpha_1}{3} - 1 \right)}.$$

Вычтем из уравнения, полученного из (13), уравнение (11), приходим к эволюционному уравнению, описывающего уединенные волны деформации в цилиндрической оболочке:

$$(\psi_\tau + b_1\psi\psi_\xi - b_2\psi^2\psi_\xi + b_3\psi_{\xi\xi} + b_4\psi_{\xi\xi\xi})_\xi = b_5\psi_{\eta\eta}, \quad (14)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \psi &= U_{0\xi}; \quad b_1 = \frac{1}{2\alpha_2} \left[ 1 - \frac{\alpha_1}{3} - \left( \nu - \frac{\alpha_1}{6} \right)^2 \right]; \quad b_2 = \frac{13\alpha_1 a}{12\alpha_2}; \\ b_3 &= \frac{\alpha_1 c_1}{4\alpha_2 \beta \epsilon L} \left[ \left( \frac{\alpha_1}{6} - \nu \right) \left( \frac{2h\nu_1}{3R\epsilon} + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} - \frac{h\nu_1}{3R\epsilon} \right]; \quad b_4 = \frac{Rh\nu_1}{2L^2\epsilon^2} \left( \frac{\alpha_1}{6} - \nu \right); \\ b_5 &= \frac{1}{A_2} \left( \frac{\alpha_1}{6} - \nu \right) \left( 1 + \frac{A\alpha_1}{3R\sqrt{\epsilon}} \right) + \frac{LA}{2R^2} \left( 1 - \nu - \frac{\alpha_1}{2} \right) + \frac{A(1 + \nu - \frac{\alpha_1}{3})}{4R\alpha_2 A_2 \sqrt{\epsilon}} \end{aligned}$$

Построим точное решение уравнения (14), используя зависимость

$$\psi = \frac{\psi_0}{F} + \psi_1, \quad (15)$$

где  $\psi_0, \psi_1, F$  – неизвестные функции.

Подставляя (15) в уравнение (14), получим выражения:

$$\psi_0 = \pm \sqrt{\frac{6b_4}{b_2}} F_\xi, \quad \psi_1 = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6b_4}{b_2}} \frac{F_{\xi\xi}}{F_\xi} \mp \frac{b_3}{\sqrt{6b_2 b_4}} + \frac{b_1}{2b_2}. \quad (16)$$

где функция  $\psi_1$  удовлетворяет уравнению (14).

В результате

$$\psi_0 = \pm \sqrt{\frac{6b_4}{b_2}} \frac{F_\xi}{F} + \psi_1. \quad (17)$$

Подставляя в (17) функцию  $F = 1 + e^{\frac{2(k_1\xi + k_2\eta - \omega\tau)}{n}}$ , получим точное решение уравнения (14) в виде:

$$\psi = \pm \frac{k_1}{n} \sqrt{\frac{6b_4}{b_2}} \operatorname{th}\left(\frac{k_1\xi + k_2\eta - \omega\tau}{n}\right) \mp \frac{b_3}{\sqrt{6b_2b_4}} + \frac{b_1}{2b_2}, \quad (18)$$

где  $\omega = \left(\frac{1}{4} \frac{b_1^2}{b_2} - \frac{1}{6} \frac{b_3^2}{b_4}\right)k_1 - \frac{2b_4}{n^2}k_1^3 - \frac{b_5k_2^2}{k_1}$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $k_1, k_2$  –

произвольные константы.

Переход к размерным переменным дает поправку  $\frac{\omega}{k_1}\varepsilon$  к скорости распространения волны для нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочки.

Диаграмма решения (18) представлена на рис. 1.

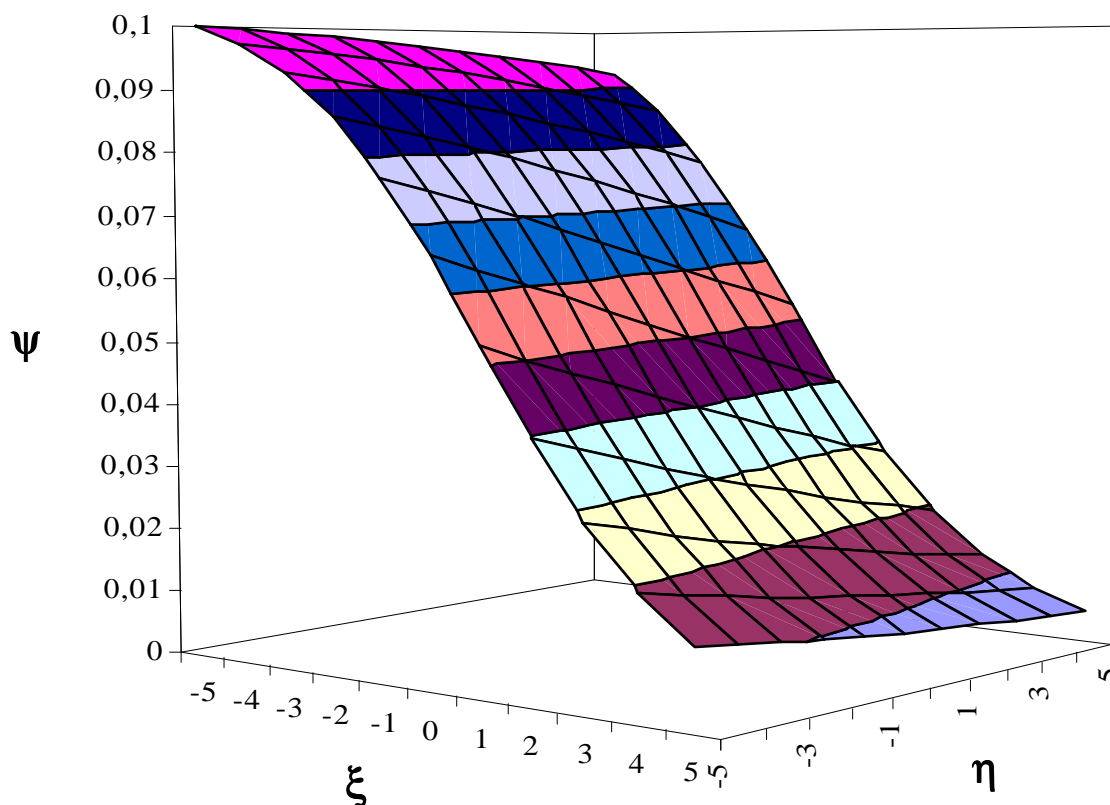


Рис. 1. Ударная волна деформации в нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке

Одним из путей повышения надежности проектируемых трубопроводных сооружений является совершенствование акустической диагностики невидимых микрповреждений материала с помощью математического моделирования нелинейных эволюционных волн деформации в вязкоупругой цилиндрической оболочке, моделирующей элементы трубопроводных систем.

Получены зависимости между параметрами волнового процесса деформирования. Представлено уточнение значения скорости продольной волны деформации в оболочке, позволяющее повысить надежность выявления невидимых микрповреждений материала. В итоге предотвращается применение в практике строительства трубопроводных систем дефектных изделий, т.е. повышается экономическая и эксплуатационная надежность сооружаемых трубопроводов.

### Список литературы

1. Аршинов Г. А. Продольные нелинейные волны в вязкоупругих стержнях, пластинах и цилиндрических оболочках / Г. А. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2003. – №02(002). С. 1–15. – IDA [article ID]: 0020302001. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2003/02/pdf/01.pdf>, 0,938 у.п.л.
2. Аршинов Г. А. Нелинейные уединенные ударно-волновые структуры в вязкоупругих стержнях / Г. А. Аршинов, В. Н. Лаптев, Н.И. Елисеев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2003. – № 02(002). С. 42–51. – IDA [article ID]: 0020302006. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2003/02/pdf/06.pdf>, 0,625 у.п.л.
3. Аршинов Г. А. Оценка экономической и эксплуатационной надежности строительных сооружений на основе исследования волновых характеристик нелинейных вязкоупругих стержневых элементов конструкций / Г. А. Аршинов, С. В. Лаптев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – Краснодар : КубГАУ, 2019. – № 153. – С. 113–122.
4. Аршинов Г. А. Совершенствование акустических методов диагностики скрытых микродефектов и эксплуатационная надежность вязкоупругих элементов конструкций / Г. А. Аршинов, С. В. Лаптев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – Краснодар : КубГАУ, 2019. – № 154. – С. 84–93.

**References**

1. Arshinov G. A. Prodol`ny`e nelinejny`e volny` v vyazkouprugix sterzhnyax, plastinax i cilindricheskix obolochkax / G. A. Arshinov // Politematicheskij setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU) [E`lektronny`j resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2003. – №02(002). S. 1–15. – IDA [article ID]: 0020302001. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2003/02/pdf/01.pdf>, 0,938 u.p.l.
2. Arshinov G. A. Nelinejny`e uedinenny`e udarno-volnovy`e struktury` v vyazkouprugix sterzhnyax / G. A. Arshinov, V. N. Laptev, N.I. Eliseev // Politematicheskij setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU) [E`lektronny`j resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2003. – № 02(002). S. 42–51. – IDA [article ID]: 0020302006. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2003/02/pdf/06.pdf>, 0,625 u.p.l.
3. Arshinov G. A. Ocenka e`konomicheskoy i e`kspluacionnoj nadezhnosti stroitel`ny`x sooruzhenij na osnove issledovaniya volnovy`x xarakteristik nelinejny`x vyazkouprugix sterzhnevuy`x e`lementov konstrukcij / G. A. Arshinov, S. V. Laptev // Politematicheskij setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. – Krasnodar : KubGAU, 2019. – № 153. – S. 113–122.
4. Arshinov G. A. Sovershenstvovanie akusticheskix metodov diagnostiki skry`ty`x mikrodefektov i e`kspluacionnaya nadezhnost` vyazkouprugix e`lementov konstrukcij / G. A. Arshinov, S. V. Laptev // Politematicheskij setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. – Krasnodar : KubGAU, 2019. – № 154. – S. 84–93.