

УДК 338.436.33
05.13.18 - Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ
(технические науки)

UDC 338.436.33

**УТОЧНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ
РЕГИСТРАЦИИ МИКРОДЕФЕКТОВ
МАТЕРИАЛА НА ОСНОВЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН
ДЕФОРМАЦИЙ В ВЯЗКОУПРУГИХ
СТЕРЖНЯХ¹**

**CLARIFICATION OF ACOUSTIC
METHODS REGISTRATION OF
MATERIAL MICRODEFECTS BASED ON
THE STUDY OF NONLINEAR
DEFORMATION WAVES IN
VISCOELASTIC RODS**

Аршинов Георгий Александрович, д. т. н.,
профессор
Кубанский государственный аграрный
университет, Краснодар, Россия

Arshinov Georgy Aleksandrovich
Dr.Sc.(Tech.), Prof.
Kuban State Agrarian University, Krasnodar,
Russia

Лойко Валерий Иванович, заслуженный деятель
науки РФ, д. т. н., профессор
Кубанский государственный аграрный
университет, Краснодар, Россия

Loyko Valery Ivanovich honored scientist of
the Russian Federation, Dr.Sci.Tech., professor
Kuban State Agrarian University, Krasnodar,
Russia

Аршинов Вадим Георгиевич, к. э. н., доцент
Кубанский институт информационной защиты,
Краснодар, Россия

Arshinov Vadim Georgyevich
Dr.Sc.(Econ.)
The Kuban institute of information protection,
Krasnodar, Russia

Лаптев Владимир Николаевич, к. т. н., доцент
Кубанский государственный аграрный
университет, Краснодар, Россия

Laptev Vladimir Nikolaevich, Dr.Sc.(Econ.)
Kuban State Agrarian University, Krasnodar,
Russia

Лаптев Сергей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент
Кубанский государственный аграрный
университет, Краснодар, Россия

Laptev Sergey Vladimirovich
Dr.Sc.(Econ.)
Kuban State Agrarian University, Krasnodar,
Russia

Строительные объекты содержат вязкоупругие
стержневые элементы конструкций, от
прочности которых зависит экономическая и
эксплуатационная надежность сооружений.
Если в материале стержней будут
присутствовать скрытые микродефекты, то в их
окрестности может развиваться аварийное
разрушение материала, приводящее к потере
несущей способности элементов конструкций.
Это часто сопровождается экономическим
ущербом, ухудшением экологии и в худшем
случае – человеческими жертвами.
Для уточнения результатов приложения методов
акустики, указывающих на наличие

Construction objects contain viscoelastic bar
structural elements, the strength of which
determines the economic and operational
reliability of structures.
If hidden microdefects are present in the
material of the rods, then in their vicinity an
emergency destruction of the material can
develop, leading to the loss of the bearing
capacity of structural elements. This is often
accompanied by economic damage,
environmental degradation and, in the worst
case, human loss.
To clarify the results of the application of
acoustics methods indicating the presence of

¹Статья выполнена по гранту РФФИ 19-010-00385 А «Повышение экономической и эксплуатационной надежности строительных и водо-, нефте-, газопроводных сооружений путем совершенствования неразрушающих акустических методов диагностики»

микротрещин, нужно предложить более строгие математические модели нелинейных волн деформаций в стержнях, относящихся к тонкостенным элементам конструкций.

microdefects, it is necessary to propose more rigorous mathematical models of nonlinear deformation waves in the rods related to thin-walled structural elements.

Ключевые слова: СТРОИТЕЛЬНЫЕ СООРУЖЕНИЯ, ЭКОНОМИЧЕСКАЯ И ЭКСПЛУАТАЦИОННАЯ НАДЕЖНОСТЬ, ВЯЗКОУПРУГИЕ СТЕРЖНИ, СКРЫТЫЕ МИКРОДЕФЕКТЫ, НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Key words: CONSTRUCTION FACILITIES, ECONOMIC AND OPERATIONAL RELIABILITY, VISCOELASTIC RODS, HIDDEN MICRODEFECTS, NONLINEAR DEFORMATION WAVES, EQUATIONS OF MOTION, EVOLUTIONARY EQUATIONS

Строительные объекты должны обладать экономической и эксплуатационной надежностью. Она непосредственно зависит от того, сохранят ли несущую способность вязкоупругие тонкостенные элементы конструкций – стержни, опоры, балки, широко применяемые в строительстве.

Необходимо учитывать, что прочностные свойства элементов конструкций существенно снижаются за счет того, что в материале есть микротрещины, поэтому возможна потеря несущей способности, приводящая к разрушению сооружений, а это сопровождается экономическими потерями и экологическими проблемами.

Необходимо совершенствовать методы акустики при диагностировании микротрещин с помощью более точных моделей деформационных волн в стержнях с учетом свойства нелинейной ползучести.

Сравнение экспериментально измеренной скорости волны деформации в стержнях методами нелинейной акустики с теоретически определенными величинами скоростей позволяет точнее прогнозировать наличие микротрещин материала.

Большое количество материалов проявляют свойство линейной упругости объемного деформирования, а вязкоупругая наследственность вызывается деформациями сдвига. В целях исследования деформационных волн в тонкостенных конструкциях, изготовленных из материалов с

такими физико-механическими свойствами, проведем анализ бесконечного стержня, когда на него не действуют внешние нагрузки.

В координатной системе задаем ось x , совпадающую с линией центров тяжести сечений стержня, и расположим оси y, z – в поперечном сечении. Определим следующими формулами перемещения точек стержня

$$u_1 = u(x, t); \quad u_2 = -\nu y u_x; \quad u_3 = -\nu z u_x \quad (1)$$

и воспользуемся тензором конечных деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}). \quad (2)$$

С учетом линейной упругости объемных деформаций наследственные вязкоупругие свойства материала стержня опишем с помощью соотношений линейной теории вязкоупругости вида:

$$s_{ij}(t) = 2\mu[e_{ij}(t) - \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} e_{ij}(\tau) d\tau] \\ \sigma(t) = K\theta(t) \quad (3)$$

Запишем ряд Тейлора по степеням $(t - \tau)$ для функции $f(\tau) = e_{ij}(\tau)$, заменим интегральный оператор в (3) дифференциальным

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda}\theta\delta_{ij} + 2\tilde{\mu}\varepsilon_{ij}. \quad (4)$$

Здесь $\tilde{\lambda} = \lambda - \frac{2\mu}{3}$, $2\tilde{\mu} = 2\mu(1 + \rho)$.

Компоненты девиатора деформаций зададим уравнениями

$$e_{11} = \frac{2(1+\nu)}{3}u_x + \frac{1}{3}(1-\nu^2)u_x^2 + \frac{\nu^2 r^2}{3}u_{xx}^2; \\ e_{22} = -\frac{1}{3}(1+\nu)u_x - \frac{1}{6}(1-\nu^2)u_x^2 - \frac{\nu^2 r^2}{6}u_{xx}^2;$$

(5)

$$e_{12} = -\frac{vy}{2}u_{xx} + \frac{v^2y}{2}u_x u_{xx}, \quad e_{13} = -\frac{vz}{2}u_{xx} + \frac{v^2z}{2}u_x u_{xx},$$

где $r^2 = z^2 + y^2$.

Определим вариации деформаций

$$\delta\varepsilon_{11} = \delta u_x + u_x \delta u_x + v^2 r^2 u_{xx} \delta u_{xx}; \quad \delta\varepsilon_{22} = \delta\varepsilon_{33} = (-v + v^2 u_x) \delta u_x;$$

$$\delta\varepsilon_{12} = -\frac{vy}{2} \delta u_{xx} + \frac{v^2y}{2} (u_{xx} \delta u_x + u_x \delta u_{xx});$$

$$\delta\varepsilon_{13} = -\frac{vz}{2} \delta u_{xx} + \frac{v^2z}{2} (u_{xx} \delta u_x + u_x \delta u_{xx}) \quad (6)$$

и используем операторное представление:

$$\delta\varepsilon_{11} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} - u_x \frac{\partial}{\partial x} + v^2 r^2 u_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \delta u;$$

$$\delta\varepsilon_{22} = \delta\varepsilon_{33} = \left[v \frac{\partial}{\partial x} - v^2 u_x \frac{\partial}{\partial x} \right] \delta u;$$

$$\delta\varepsilon_{12} = \left[-\frac{vy}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{v^2y}{2} u_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v^2y}{2} u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \delta u;$$

(7)

$$\delta\varepsilon_{13} = \left[-\frac{vz}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{v^2z}{2} u_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v^2z}{2} u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \delta u.$$

Вычислим вариацию внутренней энергии стержня с помощью формулы

$$\delta W = \sigma_{11} \delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{22} \delta\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12} \delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta\varepsilon_{13}$$

и применим вариационный принцип

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \{ \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i - \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \} dV = 0. \quad (8)$$

В результате получим уравнение движения стержня

$$\begin{aligned} & \rho(-u_{tt} + v^2 r^2 u_{ttxx}) + N_1 u_{xx} - \tilde{\mu} v^2 r^2 u_{xxxx} + N_2 u_x u_{xx} + \\ & + v^2 r^2 N_3 u_{xx} u_{xxx} - v^2 r^2 N_4 (u_x u_{xx})_{xx} + N_5 u_x^2 u_{xx} + \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} v^2 r^2 N_6 (u_x u_{xx}^2)_x - \frac{1}{2} v^2 r^2 N_7 (u_x^2 u_{xx})_{xx} - \\
& - \frac{1}{2} v^4 r^4 N_8 ((u_{xx})^3)_{xx} = 0,
\end{aligned}$$

где

$$N_1 = \tilde{\lambda}(1-2v)^2 + 2\tilde{\mu}(1+2v^2); \quad N_2 = 3(1-2v)(1+2v^2)\tilde{\lambda} + 6\tilde{\mu}(1-2v^3);$$

$$N_3 = (1-2v)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(1-v); \quad N_4 = \tilde{\lambda}(1-2v) + 2\tilde{\mu}(1-2v);$$

$$N_5 = \frac{3}{2}\tilde{\lambda}(1+2v^2)^2 + 3\tilde{\mu}(1-2v^4); \quad N_6 = (1+2v^2)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(1+v^2);$$

$$N_7 = (1+2v^2)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(1+v^2); \quad N_8 = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}, \quad r^2 = z^2 + y^2.$$

Преобразуем уравнение (9) к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{x}{L} - \frac{c}{L}t; \quad \tau = \varepsilon \frac{c}{L}t; \quad u^* = \frac{u}{A}.$$

(10)

Полагаем, что длина деформационной волны L намного больше ее амплитуды, ε – малая величина, а константы α, β и поперечный размер d стержня определяют отношение порядков

$$\frac{\alpha c}{\beta^2 L} = O(\varepsilon); \quad \frac{d}{L} = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

(11)

Применим асимптотический анализ к уравнению (9):

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots,$$

(12)

получим уравнение движения стержня в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho c^2}{E} [-u_{\xi\xi} + 2\varepsilon u_{\xi\tau} - \varepsilon^2 u_{\tau\tau} + \varepsilon v^2 I (u_{\xi\xi\xi\xi} - 2\varepsilon u_{\xi\xi\xi\tau} + \varepsilon^2 u_{\xi\xi\tau\tau})] + \\
& + (1 - \frac{\alpha a_0}{\beta}) u_{\xi\xi} - \frac{\varepsilon v^2 I}{2(1+v)} (1 - \frac{\alpha}{\beta}) u_{\xi\xi\xi\xi} + \varepsilon (3 - \frac{\alpha a_3}{\beta}) u_{\xi} u_{\xi\xi} +
\end{aligned}$$

$$+\frac{\alpha c}{\beta^2} \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \cdot \left[a_0 u_{\xi\xi} - \frac{\varepsilon v^2 I}{2(1+v)} u_{\xi\xi\xi\xi} + \varepsilon a_3 u_{\xi} u_{\xi\xi} \right] = 0.$$

С учетом (11) и выражения (12) получаем

$$\left[-\frac{\rho c^2}{E} + \left(1 - \frac{\alpha a_1}{\beta} \right) \right] u_{0\xi\xi} = 0.$$

(13)

В (13) $a_1 = \frac{2}{3}(1+v)$ и $u_{0\xi\xi} \neq 0$, поэтому скорость волны деформации в стержне

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho} \left[1 - \frac{2\alpha(1+v)}{3\beta} \right]}.$$

Из анализа первого приближения вытекает уравнение Кортевега де Вриза – Бюргера:

$$\psi_{\tau} + b_1 \psi \psi_{\xi} + b_2 \psi_{\xi\xi} + b_3 \psi_{\xi\xi\xi} = 0,$$

(15)

где

$$\begin{aligned} \psi &= u_{0\xi}; & b_1 &= \frac{E(3\beta - \alpha a_2)}{2\rho c^2 \beta}; & b_2 &= -\frac{E\alpha a_1}{2\rho c \beta^2 I \varepsilon}; \\ a_2 &= 2(1-v^2); & b_3 &= v^2 I \left[\frac{1}{2} - \frac{E(\beta - \alpha)}{4\rho c^2 \beta(1+v)} \right]. \end{aligned}$$

Н. А. Кудряшовым получено точное решение этого уравнения в виде

$$\psi = \frac{12b_2}{b_1} k_1^2 \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{k_1 \xi - \omega \tau}{2} \right) \right] + \frac{6}{5} \frac{b_3}{b_1} k_1 \left[1 + \operatorname{th} \left(\frac{k_1 \xi - \omega \tau}{2} \right) \right],$$

или после преобразования

$$\psi = -\frac{12b_2 k_1^2}{b_1} \operatorname{th}^2 \left(\frac{k_1 \xi - \omega \tau}{2} \right) + \frac{6b_3 k_1}{5b_1} \operatorname{th} \left(\frac{k_1 \xi - \omega \tau}{2} \right) + \frac{12b_2 k_1^2}{b_1} + \frac{6b_3 k_1}{5b_1};$$

$$k_1 = \pm \frac{b_3}{5b_2}; \quad \omega = \frac{6b_3^3}{125b_2^2}.$$

С помощью обозначений

$$c_1 = -\frac{12b_2k_1^2}{b_1}; \quad c_2 = \frac{6b_3k_1}{5b_1}; \quad c_3 = \frac{12b_2k_1^2}{b_1} + \frac{6b_3k_1}{5b_1}$$

получим следующее выражение:

$$\psi = c_1 \operatorname{th}^2\left(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{2}\right) + c_2 \operatorname{th}\left(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{2}\right) + c_3.$$

При $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ имеем $b_1 > 0$; $b_2 > 0$; $b_3 < 0$; $\omega < 0$.

Вычислим c_1, c_2, c_3 :

$$c_1 = -\frac{12b_3^2}{25b_1b_2}; \quad c_1 < 0; \quad c_2 = \pm \frac{6b_3^2}{25b_1b_2}, \quad c_2 \text{ имеет знак } k_1;$$

$$c_3 = \frac{12b_3^2}{25b_1b_2} \pm \frac{6b_3^2}{25b_1b_2} = \frac{6b_3^2}{25b_1b_2} (2 \pm 1), \quad c_3 > 0.$$

Выбирая верхний знак “+” и учитывая неравенства $b_3 < 0$ и $k_1 < 0$, получим функцию:

$$\psi = c_1 \operatorname{th}^2\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega|\tau}{2}\right) - c_2 \operatorname{th}\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega|\tau}{2}\right) + c_3,$$

где

$$c_3 = \frac{12b_2b_3^2}{25b_1b_2^2} + \frac{6b_3b_3}{25b_1b_2} = \frac{18b_3^2}{25b_1b_2}.$$

Применяя условие $\theta \rightarrow -\infty$, получим, что $\psi \rightarrow c_1 - c_2 + c_3$, где

$$\theta = |k_1|\xi - |\omega|\tau,$$

а

$$c_1 - c_2 + c_3 = -\frac{12b_3^2}{25b_1b_2^2} + \frac{6b_3^2}{25b_1b_2^2} + \frac{18b_3^2}{25b_1b_2^2} = \frac{12b_3^2}{25b_1b_2^2}.$$

$$\text{При } \theta \rightarrow +\infty \quad \psi \rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{12b_3^2}{25b_1b_2^2} - \frac{6b_3^2}{25b_1b_2^2} + \frac{18b_3^2}{25b_1b_2^2} = 0.$$

Производная имеет вид:

$$\psi'_{\theta} = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega\tau|}{2}\right)} \frac{24b_3^2}{25b_1b_2^2} \left(\operatorname{th}\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega\tau|}{2}\right) + \frac{1}{4}\right).$$

Полагая $\psi'_{\theta} = 0$, найдем критические точки функции. Тогда $\operatorname{th}\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega\tau|}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ и функция $\psi\left(\frac{\theta}{2}\right)$ достигает максимума в точке $\theta_{\text{кр}}$,

которая является корнем уравнения $\operatorname{th}\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4}$.

Максимум функции $\psi_{\text{max}}\left(\frac{\theta_{\text{кр}}}{2}\right) = \frac{3}{4} \frac{b_3^2}{b_1b_2^2}$. Определенное точное решение есть ударная деформационная волна растяжения ($\psi > 0$), распространяющаяся в стержне из линейно-вязкоупругого материала. Ее график показан на рисунке 1.

В размерных переменных

$$\theta = k_1\xi - \omega\tau = \frac{k_1}{L} \left(x - ct - \frac{\omega}{k_1} \varepsilon ct\right),$$

находим поправку к скорости волны деформации $\frac{\omega}{k_1} \varepsilon$.

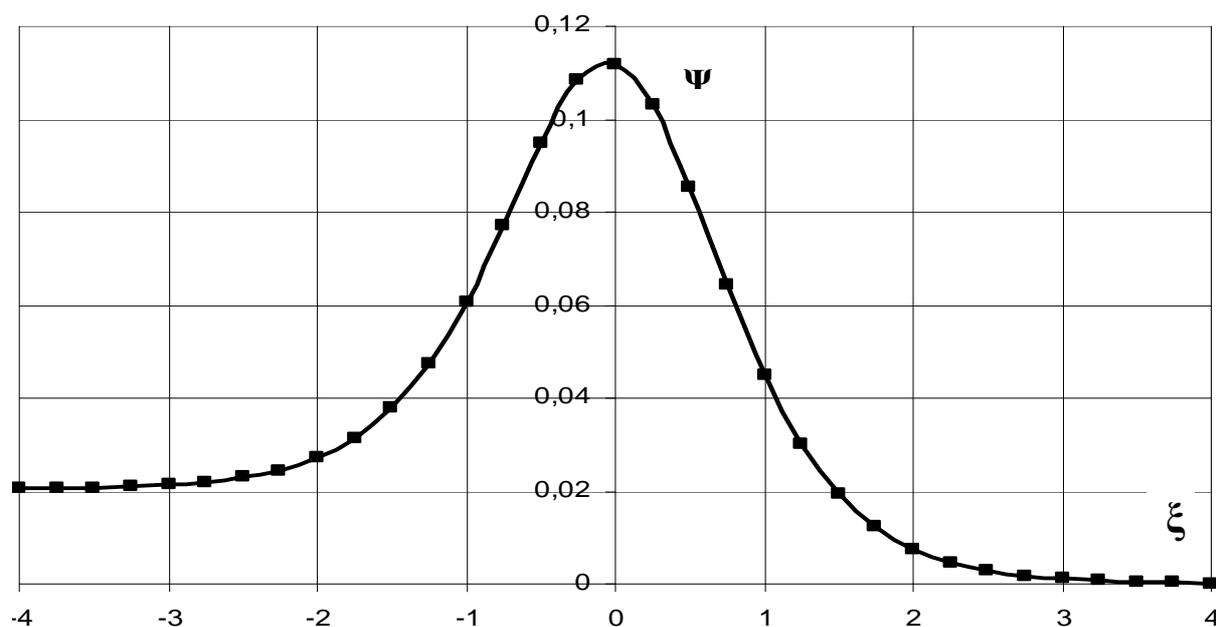


Рисунок 1 – Уединенная волна деформации в линейно-вязкоупругом стержне при линейно-упругих объемных деформациях

Перейдем к рассмотрению физически и геометрически нелинейного стержня, как и в линейном случае используя кинематические соотношения (1) для определения конечных деформаций стержня по формулам (2).

Учитывая, что объемные деформации линейно-упругие, применим уравнения состояния нелинейной наследственности в виде

$$\sigma_{ij}(t) = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - 2\mu \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} [1 + \gamma \varepsilon_u^2(\tau)] e_{ij}(\tau) d\tau,$$

(16)

Упростим исследование, заменяя интегральный оператор в законе деформирования (16) дифференциальным. Для этого разлагаем функцию $f(\tau) = [1 + \gamma \varepsilon_u^2(\tau)] e_{ij}(\tau)$ в ряд Тейлора по степеням $(t - \tau)$.

Сохраняя два слагаемых разложения, что соответствует большим значениям произведения $\beta \cdot t$, получим выражения

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda}\theta\delta_{ij} + 2\tilde{\mu}\varepsilon_{ij} + 2\gamma\mu\rho(\varepsilon_u^2 e_{ij}),$$

(17)

$$\text{где } \tilde{\lambda} = \lambda - \frac{2\mu}{3}p; \quad \tilde{\mu} = \mu(1+p); \quad p = \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Вычислим компоненты девиатора деформаций и их вариации соответственно по формулам (5), (6) и найдем вариацию внутренней энергии

$$\delta W = \sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\delta\varepsilon_{13}.$$

Линейная часть вариации δW определяется формулой

$$\delta W_{\text{л}} = \{-[\tilde{\lambda}(1-2\nu) + 2\tilde{\mu} - 2\nu((1-2\nu)\tilde{\lambda} - 2\mu\nu)]u_{xx} + 2\tilde{\mu} \frac{v^2 r^2}{2} u_{xxxx}\} \delta u.$$

а нелинейная –

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{н}} = & \{-B_1 u_x u_{xx} - v^2 r^2 (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) u_{xx} u_{xxx} - 2\mu\gamma\rho(\varepsilon_u^2 e_{11})_x - 2A_1 u_x u_{xx} - \\ & - \frac{3}{2} B_1 u_x^2 u_{xx} - \frac{v^2 r^2}{2} (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) (u_x u_{xx}^2)_x - 2\mu\gamma\rho(\varepsilon_u^2 e_{11} u_x)_x + \\ & + v^2 r^2 A_1 (u_x u_{xx})_{xx} + v^2 r^2 \frac{B_1}{2} (u_x^2 u_{xx})_{xx} + \frac{v^4 r^4}{2} (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) (u_{xx}^3)_{xx} + \\ & + v^2 r^2 2\mu\gamma\rho(\varepsilon_u^2 e_{11} u_{xx})_{xx} + 2[vB_2 u_x u_{xx} + v^3 r^2 \tilde{\lambda} u_{xx} u_{xxx} + 2\mu\nu\gamma\rho(\varepsilon_u^2 e_{22})_x - \\ & - 2v^2 A_2 u_x u_{xx} - \frac{3v^2}{2} B_2 u_x^2 u_{xx} - \frac{v^4 r^2}{2} \tilde{\lambda} (u_x u_{xx}^2)_x - 2v^2 \mu\gamma\rho(\varepsilon_u^2 e_{22} u_x)_x] - \\ & - 2\tilde{\mu} \frac{v^3 r^2}{2} (u_x u_{xx})_{xx} - 2\mu\gamma\rho\nu y (\varepsilon_u^2 e_{12})_{xx} + \tilde{\mu} v^3 r^2 2u_{xx} u_{xxx} - \\ & - 2\tilde{\mu} \frac{v^4 r^2}{2} (u_x u_{xx}^2)_x - 2\mu\gamma\rho v^2 y (\varepsilon_u^2 e_{12} u_{xx})_x - \mu v^3 r^2 (u_x u_{xx})_{xx} + \\ & + 2\tilde{\mu} \frac{v^4 r^2}{2} (u_x^2 u_{xx})_{xx} + 2\mu\gamma\rho v^2 y (\varepsilon_u^2 e_{12} u_x)_{xx} - 2\mu\gamma\rho v z (\varepsilon_u^2 e_{13})_{xx} - \\ & - 2\mu\gamma\rho v^2 z (\varepsilon_u^2 e_{13} u_{xx})_x + 2\mu\gamma\rho v^2 z (\varepsilon_u^2 e_{13} u_x)_{xx}\} \delta u, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{\lambda}(1-2\nu) + 2\tilde{\mu}; & B_1 &= (1+2\nu)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}; \\ A_2 &= (1-2\nu)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}\nu; & B_2 &= (1+2\nu^2)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}\nu^2. \end{aligned}$$

Полная вариация внутренней энергии

$$\begin{aligned}
\delta W = & \{-N_1 u_{xx} + \tilde{\mu} v^2 r^2 u_{xxxx} - N_2 u_x u_{xx} - v^2 r^2 N_3 u_{xx} u_{xxx} + \\
& + v^2 r^2 N_4 (u_x u_{xx})_{xx} - N_5 u_x^2 u_{xx} - \frac{v^2 r^2}{2} N_6 (u_x u_{xx}^2)_x + \frac{v^2 r^2}{2} N_7 (u_x^2 u_{xx})_{xx} + \\
& + \frac{v^4 r^4}{2} N_8 (u_{xx}^3)_{xx} - 2\mu\gamma\rho[(\varepsilon_u^2)_x (e_{11} - 4ve_{22} + e_{11}u_x + 2v^2 e_{22}u_x + \\
& + v^2 ye_{12}u_{xx} + v^2 ze_{13}u_{xx}) + \varepsilon_u^2 (e_{11} - 4ve_{22} + e_{11}u_x + 2v^2 e_{22}u_x + \\
& + v^2 ye_{12}u_{xx} + v^2 ze_{13}u_{xx})_x + \frac{\partial}{\partial x} ((\varepsilon_u^2)_x (vye_{12} + vze_{13} - v^2 r^2 e_{11}u_{xx} - \\
& - v^2 ye_{12}u_x - v^2 ze_{13}u_x) + \varepsilon_u^2 (vye_{12x} + vze_{13x} - v^2 r^2 (e_{11}u_{xx})_x - \\
& - v^2 y(e_{12}u_x)_x - v^2 z(e_{13}u_x)_x))] \} \delta u.
\end{aligned}$$

Подставим δW в формулу (8) и проинтегрируем по области поперечного сечения. Учитывая, что вариации δu – произвольны, получим уравнение движения стержня:

$$\begin{aligned}
\rho(-u_{tt} + v^2 r^2 u_{ttxx}) + N_1 u_{xx} - \tilde{\mu} v^2 I u_{xxxx} + N_2 u_x u_{xx} + v^2 r^2 N_3 u_{xx} u_{xxx} - \\
- v^2 r^2 N_4 (u_x u_{xx})_{xx} + N_5 u_x^2 u_{xx} + \\
\frac{1}{2} v^2 r^2 N_6 (u_x u_{xx}^2)_x - \frac{1}{2} v^2 r^2 N_7 (u_x^2 u_{xx})_{xx} - \\
- \frac{1}{2} v^4 r^4 N_8 (u_{xx}^3)_{xx} + 2\mu\gamma\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{3} (1 + u_x) (2(1 + v)u_x + (1 - v^2)u_x^2 - \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{1}{2} (1 - v^2)u_x^2) (2v^2 u_x - 4v) \right] Q + \left(\frac{1}{3} v^2 u_{xx}^2 (1 + u_x) - \frac{1}{6} v^2 u_{xx}^2 (2v^2 u_x - \right. \right. \\
\left. \left. - 4v) + \frac{1}{2} v^2 (v^2 u_x u_{xx}^2 - v u_{xx}^2) \right) \cdot Q \right\} + \\
\left[\left(-\frac{1}{3} v^2 u_{xx} (2(1 + v)u_x + (1 - v^2)u_x^2) + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{1}{2} (v - v^2 u_x) \cdot (v^2 u_x u_{xx} - v u_{xx}) \right) \cdot Q - \right. \\
\left. \frac{1}{2} v^4 r^4 N_8 (u_{xx}^3)_{xx} + 2\mu\gamma\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{3} (1 + u_x) + \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + \frac{1}{3} v^4 u_{xx}^3 Q \right]_{xx} \right\} \right\} = 0,
\end{aligned}$$

(18)

где

$$N_1 = \tilde{\lambda}(1-2\nu)^2 + 2\tilde{\mu}(1+2\nu^2); \quad N_2 = 3(1-2\nu)(1+2\nu^2)\tilde{\lambda} + 6\tilde{\mu}(1-2\nu^3);$$

$$N_3 = (1-2\nu)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(1-\nu); \quad N_4 = \tilde{\lambda}(1-2\nu) + 2\tilde{\mu}(1-2\nu);$$

$$N_5 = \frac{3}{2}\tilde{\lambda}(1+2\nu^2)^2 + 3\tilde{\mu}(1-2\nu^4); \quad N_6 = (1+2\nu^2)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(1+\nu^2);$$

$$N_7 = (1+2\nu^2)\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(1+\nu^2); \quad N_8 = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}.$$

$$Q = R_1 + R_2 + R_3; \quad R_1 = \frac{1}{3}[2(1+\nu)u_x + (1-\nu^2)u_x^2]^2; \quad R_3 = \frac{1}{3}\nu^4 u_{xx}^4;$$

$$R_2 = \frac{2}{3}\nu^2 u_{xx}^2 [2(1+\nu)u_x + (1-\nu^2)u_x^2]^2 + (\nu^2 u_x u_{xx} - \nu u_{xx})^2.$$

Исследуем (18) с помощью метода возмущения. Заменяем функцию u , используя асимптотическое разложение (12), в результате получим уравнение движения физически и геометрически нелинейного стержня:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho c^2}{E} [-u_{\xi\xi} + 2\epsilon u_{\xi\tau} - \epsilon^2 u_{\tau\tau} + \epsilon \nu^2 I (u_{\xi\xi\xi\xi} - 2\epsilon u_{\xi\xi\xi\tau} + \epsilon^2 u_{\xi\xi\tau\tau})] + \\ & + (1 - \frac{\alpha a_0}{\beta}) u_{\xi\xi} - \frac{\epsilon \nu^2 I}{2(1+\nu)} (1 - \frac{\alpha}{\beta}) u_{\xi\xi\xi\xi} + \epsilon (3 - \frac{\alpha a_3}{\beta}) u_{\xi} u_{\xi\xi} + \\ & + \frac{\alpha c}{\beta^2 I} (\epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}) \cdot [a_0 u_{\xi\xi} - \frac{\epsilon \nu^2 I}{2(1+\nu)} u_{\xi\xi\xi\xi} + \epsilon a_3 u_{\xi} u_{\xi\xi}] + \\ & + \epsilon^2 \gamma a_1 u_{\xi}^2 u_{\xi\xi}] = 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } a_0 = \frac{2(1+\nu)}{3}; \quad a_3 = \frac{-4\nu^3 - 2\nu^2 + 2\nu + 8}{3(1+\nu)}; \quad b = \frac{\nu^2 I}{2(1+\nu)}.$$

После преобразований в нулевом приближении приходим к формуле

$$[-\frac{\rho c^2}{E} + (1 - \frac{\alpha a_1}{\beta})] u_{0\xi\xi} = 0,$$

(19)

где E – модуль упругости материала стержня; $a_1 = \frac{2}{3}(1+\nu)$.

Так как в (19) $u_{0\xi\xi} \neq 0$, то скорость деформационной волны

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho} \left[1 - \frac{2\alpha}{3\beta} (1 + \nu) \right]}.$$

Исследуя первое приближение, выведем модифицированное уравнение Кортевега де Вриза – Бюргера:

$$\psi_\tau + b_1 \psi \psi_\xi - b_2 \psi^2 \psi_\xi + b_3 \psi_{\xi\xi} + b_4 \psi_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \psi &= u_{0\xi}; & b_1 &= m \left(3 - \frac{\alpha a_2}{\beta} \right); & m &= \frac{E}{2\rho c^2}; \\ b_2 &= \frac{m\alpha\gamma\epsilon a_3}{\beta}; & b_3 &= -\frac{m\alpha c a_1}{\beta^2 L \epsilon}; & b_4 &= m\nu^2 \left[\frac{1}{2m} - \frac{\beta - \alpha}{2\beta(1 + \nu)} \right]; \\ a_2 &= 2(1 - \nu^2); & a_3 &= \frac{8}{3}(1 + \nu^2)(1 + 2\nu). \end{aligned}$$

Точное решение уравнения (20) имеет вид:

$$\psi = \pm \frac{k_1}{n} \sqrt{\frac{6b_4}{b_2}} \operatorname{th} \left(\frac{k_1 \xi - \omega \tau}{n} \right) \mp \frac{b_3}{\sqrt{6b_2 b_4}} + \frac{b_1}{2b_2}, \quad (21)$$

где $\omega = \left(\frac{1}{4} \frac{b_1^2}{b_2} - \frac{1}{6} \frac{b_3^2}{b_4} \right) k_1 - \frac{2b_4}{n^2} k_1^3$; $n \in \mathbb{Z}$; k_1 – произвольный параметр.

График волны деформации представлен на рисунке 2.

Вычисляя поправку к скорости волны, получаем $\frac{\omega}{k_1} \epsilon$.

Для повышения экономической и эксплуатационной надежности проектируемых строительных сооружений совершенствованием акустической дефектоскопии разработаны эволюционные модели нелинейной волновой динамики стержней из материалов, обладающих свойством нелинейной ползучести, когда объемные деформации являются линейно-упругими.

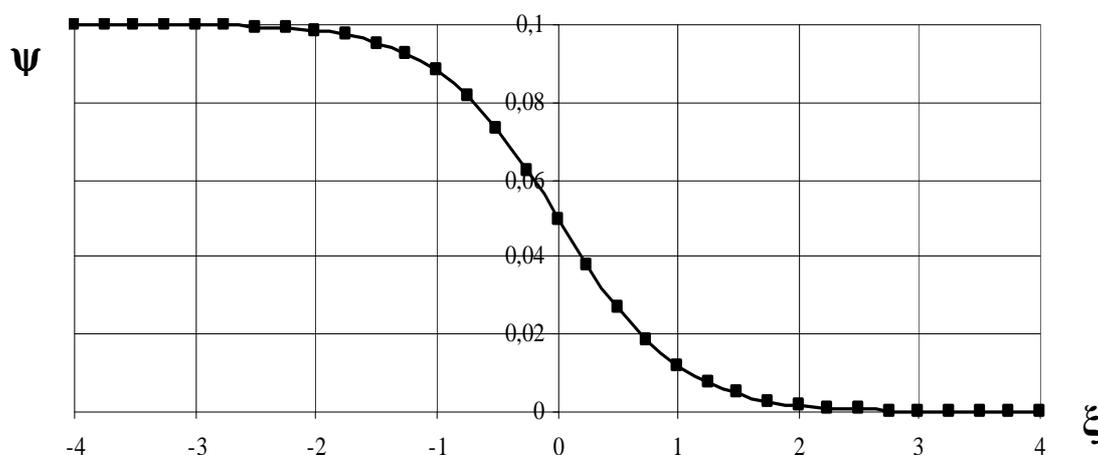


Рисунок 2 – Уединенная волна продольной деформации в нелинейно-вязкоупругом стержне при линейно-упругих объемных деформациях

В результате установлены зависимости между геометрическими, физическими и волновыми характеристиками процесса деформирования, позволяющие более строго вычислить значения скорости волны деформации в стержне.

Эффект компенсации нелинейности, дисперсии и диссипации способствует возникновению в стержнях уединенных деформационных волн. Их скорость растет с увеличением амплитуды волны.

Применение линейных моделей не позволяет даже качественно получить этот эффект. Уточненные соотношения между геометрическими, механическими и волновыми параметрами позволяют усовершенствовать методы акустики при регистрации микродефектов в материале стержней.

Список литературы

1. Нигул У. К. Нелинейная акустодинамика / У. К. Нигул. – Л.: Судостроение, 1981. – 321 с.
2. Москвитин В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов / В. В. Москвитин. – М.: Наука, 1972. – 327 с.
3. Илюшин А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Илюшин, Б. Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 312 с.

4. Кудряшов Н.А. Точные решения нелинейных волновых уравнений, встречающихся в механике // ПММ. – 1990. – Т.54. – Вып. 3. – С.450–453.

5. Лойко В. И. Математическое моделирование взаимовыгодных отношений производителей сырья и его переработчиков на основе нелинейной функции спроса / В. И. Лойко, Г. А. Аршинов, В. Г. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2015. – № 110. – С. 1691–1706.

6. Аршинов Г.А. Математическое моделирование совместимости экономических интересов перерабатывающих предприятий и производителей сырья / Г. А. Аршинов, В.Г. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2008. – №02(036). С. 212 – 218. – Шифр Информрегистра: 0420800012\0020, IDA [article ID]: 0360802013. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2008/02/pdf/13.pdf>, 0,438 у.п.л.

7. Аршинов Г.А. Управление отношениями между предприятиями переработки сырья и его производителями / Г. А. Аршинов, В. Г. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №05(079). С. 391 – 402. – IDA [article ID]: 0791205027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/27.pdf>, 0,75 у.п.л.

8. Аршинов Г.А. Нелинейная математическая модель управления процессом ценообразования продукции предприятия / Г. А. Аршинов, И. А. Мануйлов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №05(079). С. 369 – 378. – IDA [article ID]: 0791205025. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/25.pdf>, 0,625 у.п.л.

9. Лойко В. И. Математическое моделирование взаимовыгодных отношений производителей сырья и его переработчиков на основе нелинейной функции спроса / В. И. Лойко, Г. А. Аршинов, В. Г. Аршинов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №06(110). С. 1691 – 1706. – IDA [article ID]: 1101506110. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2015/06/pdf/110.pdf>, 1 у.п.л.

10. Причины, препятствующие созданию эффективных объединений предприятий молочного подкомплекса АПК / Г.А. Аршинов, В.И. Лойко, В. Г. Аршинов и др. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №09(123). С. 1422 – 1443. – IDA [article ID]: 1231609097. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/09/pdf/97.pdf>, 1,375 у.п.л.

11. Анализ современных форм интеграции сельскохозяйственных товаропроизводителей и перерабатывающих предприятий АПК / Г. А. Аршинов, В. И. Лойко, В. Г. Аршинов и др. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №09(123). С. 1392 – 1421. – IDA [article ID]: 1231609096. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/09/pdf/96.pdf>, 1,875 у.п.л.

12. Математическое моделирование отношений партнеров в современных формах интеграции сельскохозяйственных товаропроизводителей и перерабатывающих предприятий / Г. А. Аршинов, В. И. Лойко, В. Г. Аршинов и др. // Политематический

сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №06(130). С. 1137 – 1159. – IDA [article ID]: 1301706083. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/06/pdf/83.pdf>, 1,438 у.п.л.

13. Анализ условий образования эффективных объединений предприятий молочного подкомплекса АПК / Г.А. Аршинов, В.Г. Аршинов, В.Н. Лаптев, С.В. Лаптев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №08(132). С. 128 – 155. – IDA [article ID]: 1321708012. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/08/pdf/12.pdf>, 1,75 у.п.л.

Spisok literatury`

1. Nigul U. K. Nelinejnaya akustodinamika / U. K. Nigul. – L.: Sudostroenie, 1981. – 321 s.

2. Moskvitin V. V. Soprotivlenie vyazkouprugix materialov / V. V. Moskvitin. – M.: Nauka, 1972. – 327 s.

3. Plyushin A. A. Osnovy` matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti / A. A. Plyushin, B. E. Pobedrya. – M.: Nauka, 1970. – 312 s.

4. Kudryashov N.A. Tochny`e resheniya nelinejny`x volnovy`x uravnenij, vstrechayushhixsya v mexanike // PMM. – 1990. – Т.54. – Вы`п. 3. – S.450–453.

5. Lojko V. I. Matematicheskoe modelirovanie vzaimovy`godny`x otnoshenij proizvoditelej sy`r`ya i ego pererabotchikov na osnove nelinejnoj funkicii sprosa / V. I. Lojko, G. A. Arshinov, V. G. Arshinov // Politematicheskij setевой e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. – 2015. – № 110. – S. 1691–1706.

6. Arshinov G.A. Matematicheskoe modelirovanie sovmestimosti e`konomicheskix interesov pererabaty`vayushhix predpriyatij i proizvoditelej sy`r`ya / G. A. Arshinov, V.G. Arshinov // Politematicheskij setевой e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU) [E`lektronny`j resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2008. – №02(036). S. 212 – 218. – Shifr Informregistra: 0420800012\0020, IDA [article ID]: 0360802013. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2008/02/pdf/13.pdf>, 0,438 у.п.л.

7. Arshinov G.A. Upravlenie otnosheniyami mezhdru predpriyatiyami pererabotki sy`r`ya i ego proizvoditelyami / G. A. Arshinov, V. G. Arshinov // Politematicheskij setевой e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU) [E`lektronny`j resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №05(079). S. 391 – 402. – IDA [article ID]: 0791205027. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/27.pdf>, 0,75 у.п.л.

8. Arshinov G.A. Nelinejnaya matematicheskaya model` upravleniya processom cenoobrazovaniya produkcii predpriyatija / G. A. Arshinov, I. A. Manujlov // Politematicheskij setевой e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU) [E`lektronny`j resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №05(079). S. 369 – 378. – IDA [article ID]: 0791205025. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/25.pdf>, 0,625 у.п.л.

9. Lojko V. I. Matematicheskoe modelirovanie vzaimovy`godny`x otnoshenij proizvoditelej sy`r`ya i ego pererabotchikov na osnove nelinejnoj funkicii sprosa / V. I. Lojko, G. A. Arshinov, V. G. Arshinov // Politematicheskij setевой e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU) [E`lektronny`j resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №06(110). S. 1691 – 1706. – IDA [article ID]: 1101506110. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2015/06/pdf/110.pdf>, 1 у.п.л.

10. Prichiny, prepyatstvuyushhie sozdaniyu e`ffektivny`x ob`edinenij predpriyatij molochnogo podkompleksa APK / G.A. Arshinov, V.I. Lojko, V. G. Arshinov i dr. // Politematicheskij setевой e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU) [E`lektronny`j resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №09(123). S. 1422 – 1443. – IDA [article ID]: 1231609097. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/09/pdf/97.pdf>, 1,375 u.p.l.

11. Analiz sovremenny`x form integracii sel`skoxozyajstvenny`x tovaroproizvoditelej i pererabaty`vayushhix predpriyatij APK / G. A. Arshinov, V. I. Lojko, V. G. Arshinov i dr. // Politematicheskij setевой e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU) [E`lektronny`j resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №09(123). S. 1392 – 1421. – IDA [article ID]: 1231609096. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/09/pdf/96.pdf>, 1,875 u.p.l.

12. Matematicheskoe modelirovanie otnoshenij partnerov v sovremenny`x formax integracii sel`skoxozyajstvenny`x tovaroproizvoditelej i pererabaty`vayushhix predpriyatij / G. A. Arshinov, V. I. Lojko, V. G. Arshinov i dr. // Politematicheskij setевой e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU) [E`lektronny`j resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №06(130). S. 1137 – 1159. – IDA [article ID]: 1301706083. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/06/pdf/83.pdf>, 1,438 u.p.l.

13. Analiz uslovij obrazovaniya e`ffektivny`x ob`edinenij predpriyatij molochnogo podkompleksa APK / G.A. Arshinov, V.G. Arshinov, V.N. Laptev, S.V. Laptev // Politematicheskij setевой e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchny`j zhurnal KubGAU) [E`lektronny`j resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №08(132). S. 128 – 155. – IDA [article ID]: 1321708012. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/08/pdf/12.pdf>, 1,75 u.p.l.