

УДК 539.3:534:532.5

UDC 539.3:534:532.5

05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)

05.13.18 - Mathematical modeling, numerical methods and software packages (technical sciences)

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДИАГНОСТИКИ СКРЫТЫХ МИКРОДЕФЕКТОВ И ЭКСПЛУАТАЦИОННАЯ НАДЕЖНОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ¹

IMPROVEMENT OF ACOUSTIC DIAGNOSTIC METHODS FOR HIDDEN MICRODEFECTS AND OPERATIONAL RELIABILITY OF VISCOELASTIC STRUCTURAL ELEMENTS

Аршинов Георгий Александрович
д.т.н., профессор

Arshinov Georgiy Aleksandrovich
Dr.Sci.Tech., Professor

Лаптев Сергей Владимирович
к.ф.-м.н, доцент

Laptev Sergey Vladimirovich
Cand.Phys.-Math.Sci., associate professor

Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

Экономическая и эксплуатационная надежность строительных сооружений в значительной степени зависит от сохранения несущей способности тонкостенных конструкций, в частности, стержней с вязкоупругими свойствами. Присутствие в них невидимых микродефектов может приводить не только к уменьшению несущей способности, но и к разрушению сооружений. Для обнаружения микродефектов методами акустической диагностики необходимо знать зависимость скорости продольной волны деформации от реологических свойств материала конструкций. Такие зависимости можно выявить путем построения и анализа, математических моделей, описывающих вязкоупругие деформационные волны, формируемые в стержневых системах, изготовленных из материала с реологическими свойствами

The economic and operational reliability of building structures to a large extent depends on the preservation of the bearing capacity of thin-walled structures, in particular, rods with viscoelastic properties. The presence of invisible microdefects in them can lead not only to a decrease in the bearing capacity, but also to the destruction of structures. For the detection of microdefects by acoustic diagnostic methods, it is necessary to know the dependence of the longitudinal strain wave velocity on the rheological properties of the structural material. Such dependences can be revealed by the construction and analysis of mathematical models describing viscoelastic deformation waves formed in rod systems made of a material with rheological properties

Ключевые слова: СТРОИТЕЛЬНЫЕ СООРУЖЕНИЯ, ЭКОНОМИЧЕСКАЯ И ЭКСПЛУАТАЦИОННАЯ НАДЕЖНОСТЬ, ВЯЗКОУПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ, МИКРОДЕФЕКТЫ, ПРОЧНОСТЬ, АКУСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА, УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ, ВОЛНОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Keywords: CONSTRUCTION STRUCTURES, ECONOMIC AND OPERATIONAL RELIABILITY, VISCOELASTIC ROD, MICRODEFECTS, STRENGTH, ACOUSTIC DIAGNOSTICS, SOLID DEFORMATION WAVES, WAVE CHARACTERISTICS

DOI: <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-154-009>

Экономическая и эксплуатационная надежность строительных сооружений существенно зависит от прочности и сохранения несущей

¹Статья выполнена по гранту РФФИ 19-010-00385 А «Повышение экономической и эксплуатационной надежности строительных и водо-, нефте-, газопроводных сооружений путем совершенствования неразрушающих акустических методов диагностики»

способности широко применяемых в строительстве тонкостенных конструкций с реологическими свойствами.

Прочность и несущая способность тонкостенных элементах конструкций во многом определяются присутствием в них невидимых микродефектов в материале, которые могут возникнуть в процессе изготовления.

Выявить микродефекты можно, применяя методы нелинейной акустической диагностики, но для этого надо знать точные функциональные связи между реологическими свойствами среды, в которой формируются деформационные волны, и их скоростью перемещения.

Такие функциональные связи являются продуктом математического анализа волновой динамики деформирования материалов с наследственными свойствами. Некоторые аспекты этой задачи рассмотрены в работах [5–10]

Построим математическую модель продольной волны деформации, распространяющейся в свободном от внешних воздействий бесконечном стержне, изготовленном из материала с реологическими свойствами.

Выберем систему декартовых координат, показанных на рис. 1:

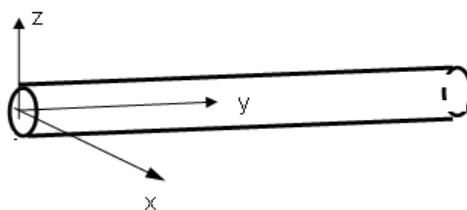


Рис. 1. Бесконечный стержень в декартовой системе координат

Смещения точек стержня определим функциями

$$u_1 = u(x, t); u_2 = -\nu u_x; u_3 = -\nu z u_x.$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – компоненты смещения по осям x, y, z ; t – время; ν – коэффициент Пуассона, функции u_2, u_3 описывают поперечные

смещения точек стержня, а буквенный индекс x – обозначение частной производной функций $u(x,t)$ по переменной x .

Применим тензор Грина для описания больших деформаций стержня:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}),$$

где индекс после запятой есть обозначение частной производной

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ от функции } u(x,t), \text{ а } x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z.$$

Зададим реологические свойства материала стержня уравнениями линейной наследственности вида

$$s_{ij}(t) = 2\mu[e_{ij}(t) - \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} e_{ij}(\tau) d\tau];$$

$$\sigma(t) = K[\theta(t) - \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} \theta(\tau) d\tau],$$

где s_{ij}, e_{ij} – значения компонент девиатора напряжений и девиатора

деформаций; $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}; \quad \theta = \varepsilon_{ii}; \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, а α, β –

реологические постоянные.

Для вывода уравнений движения стержня применим вариационный принцип возможных перемещений

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \{ \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i - \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \} dV = 0$$

и в результате приходим к уравнению движения стержня

$$\rho(-u_{tt} + v^2 r^2 u_{ttxx}) + LE\{ [u_{xx} + (2A_1 - 4vB_1 + 2)u_x u_{xx} - \frac{v^2 r^2}{4(1+v)} u_{xxxx}] +$$

$$+ z^2 (2A_2 - 3v^2 - 4vB_2 + \frac{v^3}{1+v}) u_{xx} u_{xxx} + r^2 (2A_2 - 6v^2 A_1 + 4v^2 B_2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3v^4}{2(1+v)} + \frac{v^3}{2(1+v)} u_x u_{xx} u_{xxx} + (3A_1 + 6vB_1) u_x^2 u_{xx} + \alpha_2 r^2 u_{xx}^4 - \\
 & - z^2 (v^2 + \frac{v^3}{2(1+v)}) u_x u_{xxxx} + r^2 (-2v^2 A_1 + 2v^2 B_2 - \frac{v^4}{2(1+v)}) u_{xx}^3 + \\
 & + r^2 (\frac{v^4}{4(1+v)} - A_1 v^2) - 6A_2 v^2 r^4 u_{xx} u_{xxx}^3 - 3A_2 v^2 r^4 u_{xx}^2 u_{xxxx} \} = 0.
 \end{aligned}$$

Используя безразмерные переменные вида

$$\xi = \frac{x}{L} - \frac{c}{L} t; \quad \tau = \varepsilon \frac{c}{L} t; \quad u^* = \frac{u}{A}; \quad x^* = \frac{x}{d}; \quad y^* = \frac{y}{d},$$

переходим к безразмерному уравнению движения вязкоупругого стержня

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho c^2}{E} (-u_{\xi\xi\xi} + 2\varepsilon u_{\xi\tau} + v^2 \frac{r^2}{L^2} u_{\xi\xi\xi\xi\xi}) + (1 - \frac{\alpha}{\beta}) u_{\xi\xi\xi} - \frac{\alpha c}{\beta^2 L} u_{\xi\xi\xi\xi} + \\
 & + 2(A_1 - 4vB_1 + 2)(1 - \frac{\alpha}{\beta}) \varepsilon u_{\xi} u_{\xi\xi} - \frac{v^2 r^2}{4(1+v)L^2} (1 - \frac{\alpha}{\beta}) u_{\xi\xi\xi\xi\xi} = 0.
 \end{aligned}$$

Исследуя полученное уравнение движения методом возмущений путем асимптотического разложения искомой функции, из нулевого приближения определяем скорость волны деформации $c = \sqrt{E(1-\alpha/\beta)/\rho}$ в зависимости от физико-механических констант материала стержня.

Из первого приближения асимптотического разложения получаем эволюционное уравнение Кортевега де Вриза – Бюргерса

$$\psi_{\tau} + b_1 \psi \psi_{\xi} + b_2 \psi_{\xi\xi\xi} + b_3 \psi_{\xi\xi} = 0, \tag{1}$$

где $\psi = u_{0\xi}$; $b_1 = 1 - \frac{\alpha}{\beta}$; $b_2 = \frac{vr^2 d^2}{2l^2 \varepsilon}$; $b_3 = -\frac{\alpha c}{\beta^2 l \varepsilon}$, причем $\frac{A}{L} = \varepsilon$ –

малый параметр, и имеет место отношение порядков $\frac{d}{L} \sim \sqrt{\varepsilon}$, из

которого вытекает, что $AL \sim d^2$.

Кроме того, введены в рассмотрение отношения порядков

$$\frac{\alpha c}{\beta^2 L} \sim \varepsilon; \gamma = \frac{1}{\varepsilon}. \text{ При } \frac{\alpha c}{\beta^2 L} \sim \varepsilon \text{ имеем } \frac{c}{\beta L} \sim \varepsilon.$$

Если

$$\frac{\alpha}{\beta} = O(1), \text{ то } \beta \sim \frac{c}{\varepsilon L} \sim \frac{c}{A} \sim \frac{c}{\sqrt{\varepsilon d}}, \text{ т. е. } \beta \sim \frac{c}{\sqrt{\varepsilon d}}.$$

Таким образом, для возникновения продольной уединенной волны деформации в стержне требуется выполнение условия $AL \sim d^2$, связывающего диаметр стержня с амплитудой и длиной волны.

Построим точное частное решение эволюционного уравнения (1) для продольной волны деформации в вязкоупругих тонкостенных элементах конструкций, применив формулу

$$\psi = \frac{12b_2}{b_1} k_1^2 [1 - \text{th}^2(\frac{k_1 \xi - \omega \tau}{2})] + \frac{6b_3}{5b_1} k_1 [1 + \text{th}(\frac{k_1 \xi - \omega \tau}{2})],$$

где

$$25k_1^2 = \frac{b_3^2}{b_2^2}; \quad \omega = b_2 k_1^3 + \frac{6b_3 k_1^2}{5} - \frac{1}{25} \frac{b_3^3}{b_2} k_1$$

или после преобразования

$$\psi = -\frac{12b_2 k_1^2}{b_1} \text{th}^2(\frac{k_1 \xi - \omega \tau}{2}) + \frac{6b_3 k_1}{5b_1} \text{th}(\frac{k_1 \xi - \omega \tau}{2}) + \frac{12b_2 k_1^2}{b_1} + \frac{6b_3 k_1}{5b_1}.$$

Здесь константы

$$k_1 = \pm \frac{b_3}{5b_2}; \quad \omega = \frac{6b_3^3}{125b_2^2}.$$

Используя обозначения

$$c_1 = -\frac{12b_2k_1^2}{b_1}; \quad c_2 = \frac{6b_3k_1}{5b_1}; \quad c_3 = \frac{12b_2k_1^2}{b_1} + \frac{6b_3k_1}{5b_1},$$

приходим к следующему выражению:

$$\psi = c_1 \operatorname{th}^2\left(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{2}\right) + c_2 \operatorname{th}\left(\frac{k_1\xi - \omega\tau}{2}\right) + c_3.$$

Учитывая, что $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, имеем $b_1 > 0$; $b_2 > 0$; $b_3 < 0$; $\omega < 0$.

Далее вычислим значения коэффициентов c_1, c_2, c_3 :

$$c_1 = -\frac{12b_3^2}{25b_1b_2}; \quad c_1 < 0; \quad c_2 = \pm \frac{6b_3^2}{25b_1b_2};$$

$$c_3 = \frac{12b_3^2}{25b_1b_2} \pm \frac{6b_3^2}{25b_1b_2} = \frac{6b_3^2}{25b_1b_2} (2 \pm 1), \quad c_3 > 0.$$

Здесь знак c_2 совпадает со знаком k_1 .

Выбирая в уравнениях знак “+” и учитывая неравенства $b_3 < 0$ и $k_1 < 0$, получаем выражение для точного частного решения эволюционного уравнения (1):

$$\psi = c_1 \operatorname{th}^2\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega|\tau}{2}\right) - c_2 \operatorname{th}\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega|\tau}{2}\right) + c_3, \quad (2)$$

где

$$c_3 = \frac{12b_2b_3^2}{25b_1b_2^2} + \frac{6b_3b_3}{25b_1b_2} = \frac{18b_3^2}{25b_1b_2}.$$

При $\theta \rightarrow -\infty$ $\psi \rightarrow c_1 - c_2 + c_3$, и $\theta = |k_1|\xi - |\omega|\tau$,

а сумма

$$c_1 - c_2 + c_3 = -\frac{12b_3^2}{25b_1b_2^2} + \frac{6b_3^2}{25b_1b_2^2} + \frac{18b_3^2}{25b_1b_2^2} = \frac{12b_3^2}{25b_1b_2^2}.$$

Если $\theta \rightarrow +\infty$, то

$$\psi \rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{12b_3^2}{25b_1b_2^2} - \frac{6b_3^2}{25b_1b_2^2} + \frac{18b_3^2}{25b_1b_2^2} = 0.$$

Вычислим первую производную функции ψ :

$$\psi'_\theta = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega\tau|}{2}\right)} \frac{24b_3^2}{25b_1b_2^2} \left(\operatorname{th}\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega\tau|}{2}\right) + \frac{1}{4}\right).$$

Из уравнения $\psi'_\theta = 0$ определим критические точки функции ψ .

При проведении преобразований установлено, что $\operatorname{th}\left(\frac{|k_1|\xi - |\omega\tau|}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, и значение функции $\psi\left(\frac{\theta}{2}\right)$ будет максимальным в

точке, равной величине $\theta_{\text{кр}}$, которая есть корень уравнения $\operatorname{th}\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4}$.

Максимум функции ψ

$$\psi_{\max}\left(\frac{\theta_{\text{кр}}}{2}\right) = \frac{c_1}{16} + \frac{c_2}{4} + c_3 \quad \text{или} \quad \psi_{\max}\left(\frac{\theta_{\text{кр}}}{2}\right) = \frac{3}{4} \frac{b_3^2}{b_1b_2^2}.$$

Это значит, что при указанных выше условиях точное частное решение (2) эволюционного уравнения (1) представляется в виде ударной волны деформации растяжения ($\psi > 0$) в линейно-вязкоупругом стержне (рис. 2).

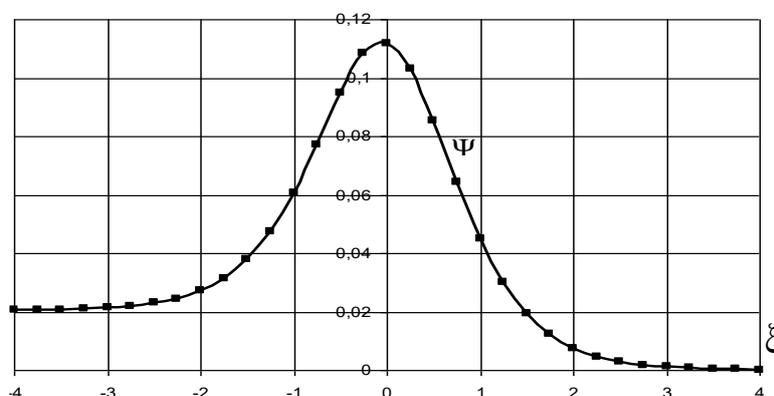


Рис. 2. Уединенная волна деформации в вязкоупругом стержне

Переходя от безразмерных переменных к размерным

$$\theta = k_1 \xi - \omega \tau = \frac{k_1}{L} \left(x - ct - \frac{\omega}{k_1} \varepsilon ct \right),$$

найдем поправку $\frac{\omega}{k_1} \varepsilon$ к скорости продольной волны деформации.

Полученная поправка существенно необходима для совершенствования акустических методов диагностики скрытых микродефектов материала конструкций, поскольку разрушение строительных сооружений возможно предотвратить, исключая использование элементов конструкций с невидимыми дефектами, и обеспечить устойчивость сооружений, заключающуюся в способности противостоять внешнему статическому и динамическому воздействию на отдельные конструктивные элементы и сооружение в целом.

Обеспечение прочности и сохранение несущей способности элементов конструкций и сооружений в целом в процессе эксплуатации позволит исключить человеческие жертвы и значительный экономический ущерб.

Литература

1. Кудряшов, Н. А. Точные решения нелинейных волновых уравнений, встречающихся в механике / Н. А. Кудряшов // ПММ. – 1990. – Т. 54. – Вып. 3. – С. 450–453.
2. Нигул, У. К. Нелинейная акустодинамика / У. К. Нигул. – Л.: Судостроение, 1981. – 321 с.
3. Москвитин, В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов / В. В. Москвитин. – М.: Наука, 1972 – 327 с.
4. Илюшин, А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Илюшин, Б. Е. Победра. – М.: Наука, 1970. – 312 с.
5. Аршинов Г.А., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде. Акустический журнал. 2000. Т. 46. № 1. С. 116-117.
6. Аршинов Г.А., Елисеев Н.И. Уединенные волны в физически линейных и нелинейных вязкоупругих стержнях. Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2003. № 1. С. 1-13.
7. Аршинов Г.А., Лойко В.И., Аршинов В.Г., Лаптев В.Н., Лаптев С.В. Анализ современных форм интеграции сельскохозяйственных товаропроизводителей и перерабатывающих предприятий АПК. Политематический сетевой электронный

научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2016. № 123. С. 1392-1421.

Аршинов Г.А., Лойко В.И., Аршинов В.Г., Лаптев В.Н., Лаптев С.В. Причины, препятствующие созданию эффективных объединений предприятий молочного подкомплекса АПК. Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2016. № 123. С. 1422-1443.

8. Лойко В.И., Аршинов Г.А., Аршинов В.Г. Математическое моделирование взаимовыгодных отношений производителей сырья и его переработчиков на основе нелинейной функции спроса. Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2015. № 110. С. 1691-1706.

9. Аршинов Г.А., Лаптев В.Н., Елисеев Н.И. Нелинейные уединенные ударно-волновые структуры в вязкоупругих стержнях. Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2003. № 2. С. 1-10.

10. Лаптев С.В. Нелинейные дисперсионные волны в вязкоупругих тонкостенных конструкциях. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Саратов, 2000.

References

1. Kudryashov, N. A. Tochny`e resheniya nelinejny`x volnovy`x uravnenij, vstrechayushhixsya v mexanike / N. A. Kudryashov // PMM. – 1990. – Т. 54. – Вы`р. 3. – S. 450–453.

2. Nigul, U. K. Nelinejnaya akustodinamika / U. K. Nigul. – L.: Sudostroenie, 1981. – 321 s.

3. Moskvitin, V. V. Soprotivlenie vyazkoupругix materialov / V. V. Moskvitin. – M.: Nauka, 1972 – 327 s.

4. Ilyushin, A. A. Osnovy` matematicheskoy teorii termovyazkoupругosti / A. A. Ilyushin, B. E. Pobedrya. – M.: Nauka, 1970. –312 s.

5. Arshinov G.A., Zemlyanuxin A.I., Mogilevich L.I. Dvumerny`e uedinenny`e volny` v nelinejnoj vyazkoupругoj deformiruemoj srede. Akusticheskij zhurnal. 2000. Т. 46. № 1. S. 116-117.

6. Arshinov G.A., Eliseev N.I. Uedinenny`e volny` v fizicheski linejny`x i nelinejny`x vyazkoupругix stержnyax. Politematicheskij setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2003. № 1. S. 1-13.

7. Arshinov G.A., Lojko V.I., Arshinov V.G., Laptev V.N., Laptev S.V. Analiz sovremenny`x form integracii sel`skoxozyajstvenny`x tovaroproizvoditelej i pererabaty`vayushhix predpriyatij APK. Politematicheskij setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2016. № 123. S. 1392-1421.

Arshinov G.A., Lojko V.I., Arshinov V.G., Laptev V.N., Laptev S.V. Prichiny`, prepyatstvuyushhie sozdaniyu e`ffektivny`x ob`edinenij predpriyatij molochnogo podkompleksa APK. Politematicheskij setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2016. № 123. S. 1422-1443.

8. Lojko V.I., Arshinov G.A., Arshinov V.G. Matematicheskoe modelirovanie vzaimovy`godny`x otnoshenij proizvoditelej sy`r`ya i ego pererabotchikov na osnove nelinejnoj funkcii sprosa. Politematicheskij setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2015. № 110. S. 1691-1706.

9. Arshinov G.A., Laptev V.N., Eliseev N.I. Nelinejny`e uedinenny`e udarno-volnovy`e struktury` v vyazkoupругix stержnyax. Politematicheskij setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2003. № 2. S. 1-10.

10. Laptev S.V. Nelinejny`e dispersionny`e volny` v vyazkouprugix tonkostenny`x konstrukciyax. Dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskix nauk. Saratov, 2000.