УДК 539.3:534:532.5

08.00.13 - Математические и инструментальные методы экономики (экономические науки)

ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ И ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ СООРУЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ[1]

Аршинов Георгий Александрович
д. т. н., профессор

Лаптев Сергей Владимирович,
к.ф.-м.н, доцент

Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

В строительных наземных, подземных сооружениях, машинах и механизмах во многих случаях используются стержневые элементы конструкций, изготовленные из вязкоупругих материалов. Одним из методов исследования прочностных характеристик стержней является экспериментальное измерение величины скорости распространения в них волн деформации и сравнение ее с теоретически точными значениями скорости, определенными с учетом реальных физико-механических свойств материала. Это сравнение позволяет анализировать присутствие микродефектов в стержнях. Для оценки экономической и эксплуатационной надежности строительных сооружений с помощью математического моделирования исследуются характеристики нелинейных волновых процессов в вязкоупругих стержнях, которые могут использоваться для совершенствования акустической диагностики микродефектов материала

Ключевые слова: СТРОИТЕЛЬНЫЕ СООРУЖЕНИЯ, ЭКОНОМИЧЕСКАЯ И ЭКСПЛУАТАЦИОННАЯ НАДЕЖНОСТЬ, ВЯЗКОУПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ, СКРЫТЫЕ МИКРОДЕФЕКТЫ, ПРОЧНОСТЬ, АКУСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА, ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ, ВОЛНОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

DOI: http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-153-011

UDC 539.3:534:532.5

Mathematical and instrumental methods of Economics

ASSESSMENT OF ECONOMIC AND OPERATIONAL RELIABILITY OF BUILDING STRUCTURES BASED ON THE STUDY OF WAVE CHARACTERISTICS OF NONLINEAR VISCOELASTIC ROD ELEMENTS OF STRUCTURES

Arshinov Georgy Aleksandrovich
Dr.Sci.Tech., professor

Laptev Sergey Vladimirovich
Cand.Phys.-Math.Sci.

Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

In on-land and underground structures, machines and mechanisms, in many cases, we use rod structural elements made of viscoelastic materials. One of the methods for studying the strength characteristics of rods is the experimental measurement of the velocity of propagation of deformation waves in them and comparing it with theoretically accurate values of the velocity, determined taking into account the real physical and mechanical properties of the material. This comparison allows us to analyze the presence of microdefects in the rods. To assess the economic and operational reliability of building structures using mathematical modeling, we study the characteristics of nonlinear wave processes in viscoelastic rods, which can be used to improve the acoustic diagnostics of material microdefects

Keywords: CONSTRUCTION STRUCTURES, ECONOMIC AND OPERATIONAL RELIABILITY, VISCOELASTIC ROD, HIDDEN MICRODEFECTS, STRENGTH, ACOUSTIC DIAGNOSTICS, DEFORMATION WAVES, WAVE CHARACTERISTICS

[1] Статья выполнена по гранту РФФИ 19-010-00385 А «Повышение экономической и эксплуатационной надежности строительных и водо-, нефте-, газопроводных сооружений путем совершенствования неразрушающих акустических методов диагностики».

Во многих строительных сооружениях используются несущие тонкостенные элементы конструкций в виде стержней, пластин, оболочек, выполненных из вязкоупругих материалов, прочность которых обеспечивает безаварийность работы конструкций при внешних силовых воздействиях.

Поэтому одной из актуальных научных проблем является повышение экономической и эксплуатационной надежности строительных и водо-, нефте-, газопроводных сооружений путем совершенствования неразрушающих акустических методов диагностики микродефектов на основе разработки и исследования математических моделей распространения нелинейных волн в тонкостенных вязкоупругих элементах конструкций – стержнях и цилиндрических оболочках с учетом реальных физических свойств материала и применения строгих методов механики деформируемого твердого тела.

Данный подход позволяет более точно определить значения волновых характеристик для неразрушающих исследуемый объект акустических методов диагностики скрытых микродефектов в материале конструкций, наличие которых может вызвать развитие аварийного разрушения сооружений при нагрузке.

Измерение величины скорости волн деформации в стержнях экспериментальными методами нелинейной акустической диагностики и сравнение ее с полученными теоретически обоснованными значениями скорости, определенными с учетом реальных физико-механических свойств материала, позволяют более точно установить присутствие микродефектов в стержнях.

Отклонение последней от теоретической может свидетельствовать о наличии в материале стержня невидимых микродефектов, в окрестности которых возможно развитие прогрессирующего разрушения материала несущих элементов конструкции.

Поэтому задача определения точных аналитических значений скорости перемещения волн деформации в стержнях, когда учитываются реальные физико-механические свойства материалов, является весьма актуальной.

Обоснованное определение точных значений скорости волнового процесса можно выполнить путем математического моделирования распространения нелинейных деформационных волн в стержнях с реологическими свойствами. Некоторые аспекты этой задачи рассмотрены в работах [4–10].

Рассматривается неограниченный стержень, на который не действуют внешние нагрузки. Вводится система декартовых координат с осью x, совпадающей с осью симметрии стержня, и осями y и z – в произвольном поперечном сечении (рис. 1).

Перемещения точек стержня задаются функциями

$$u_1 = u(x,t);\ u_2 = -\nu y u_x;\ u_3 = -\nu z u_x, \qquad (1)$$

где u_1, u_2, u_3 определяют смещения по осям координат x, y, z; t – момент времени, ν – коэффициент Пуассона, а нижние буквенные символы обозначают частные производные функций u(x,t) по соответствующим переменным.

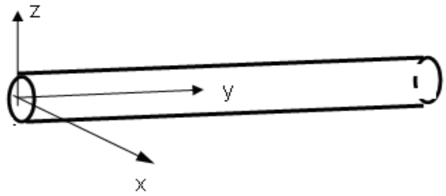

Рис. 1. Неограниченный стержень в декартовой координатной системе

Зададим конечные деформации в стержне тензором Грина:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}),$$

(2)

причем $u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$; $i, j = 1,2,3$, и $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$.

Реологические свойства материала стержня задаются с помощью линейных уравнений вязкоупругости:

$$s_{ij}(t) = 2\mu[e_{ij}(t) - \alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} e_{ij}(\tau)]d\tau;$$

$$\sigma(t) = K[\theta(t) - \alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} \theta(\tau)d\tau],$$

(3)

где s_{ij}, e_{ij} – компоненты девиаторов напряжений и деформаций; $\sigma = \dfrac{1}{3}\sigma_{ii}$; $\theta = \varepsilon_{ii}$; $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$; $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$; α, β – реологические постоянные материала, из которого изготовлен стержень.

Разлагая в ряд Тейлора по степеням $(t-\tau)$, сохраняя в разложении два члена и предполагая выполнение неравенства $\beta t >> 1$, получим приближенные выражения для компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = L(\lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}),$$

(4)

где $L = \dfrac{\alpha}{\beta^2}\dfrac{\partial}{\partial t} + (1 - \dfrac{\alpha}{\beta})$, действие $Lf = \dfrac{\alpha}{\beta^2} f_t + (1 - \dfrac{\alpha}{\beta})f$, а $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

Преобразуем зависимости, представленные в (4), к виду

$$\sigma_{11} = L\{Eu_x + \frac{1}{2}[((\lambda + 2\mu) + 2\nu^2\lambda)u_x^2 + (\lambda + 2\mu)\nu^2 r^2 u_{xx}^2]\}$$

$$\sigma_{22}=\sigma_{33}=L\{\frac{1}{2}[(2(\lambda+\mu)\nu^2+\lambda)u_x^2+\lambda\nu^2 r^2 u_{xx}^2]\};$$

$$\sigma_{12}=L[\mu y(-\nu u_{xx}+\nu^2 u_x u_{xx})];$$

$$\sigma_{13}=L[\mu z(-\nu u_{xx}+\nu^2 u_x u_{xx})].$$

В результате преобразований получаем соотношения

$$\sigma_{11}=L[E(u_x+A_1 u_x^2+A_2 r^2 u_{xx}^2)];$$

$$\sigma_{22}=\sigma_{33}=L[E(B_1 u_x^2+B_2 r^2 u_{xx}^2)];$$

$$\sigma_{12}=L[\frac{Ey}{2(1+\nu)}(-\nu u_{xx}+\nu^2 u_x u_{xx})];$$

$$\sigma_{13}=L[\frac{Ez}{2(1+\nu)}(-\nu u_{xx}+\nu^2 u_x u_{xx})].$$

В этих выражениях используются обозначения

$$A_1=a(2\nu^3-\nu+1);\quad B_1=a\nu(2\nu-2\nu^2+1);\quad A_2=a\nu^2(1-\nu);$$

$$B_2=a\nu^3;\quad a=\frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)};\quad r^2=z^2+y^2.$$

Для вывода уравнений движения стержня применим вариационный принцип

$$\delta J=\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_V\{\rho\dot{u}_i\delta\dot{u}_i-\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\}dV=0.$$

(5)

Определим вариации компонент деформаций:

$$\delta\varepsilon_{11}=\delta u_x+u_x\delta u_x+\nu^2 r^2 u_{xx}\delta u_{xx};\quad \delta\varepsilon_{22}=\delta\varepsilon_{33}=(-\nu+\nu^2 u_x)\delta u_x;$$

$$\delta\varepsilon_{12}=-\frac{\nu y}{2}\delta u_{xx}+\frac{\nu^2 y}{2}(u_{xx}\delta u_x+u_x\delta u_{xx});$$

$$\delta\varepsilon_{13}=-\frac{\nu z}{2}\delta u_{xx}+\frac{\nu^2 z}{2}(u_{xx}\delta u_x+u_x\delta u_{xx})$$

и запишем эти выражения, используя операторный вид:

$$\delta\varepsilon_{11}=[-\frac{\partial}{\partial x}-u_x\frac{\partial}{\partial x}+\nu^2r^2u_{xx}\frac{\partial^2}{\partial x^2}]\delta u;$$

$$\delta\varepsilon_{22}=\delta\varepsilon_{33}=[\nu\frac{\partial}{\partial x}-\nu^2u_x\frac{\partial}{\partial x}]\delta u;$$

$$\delta\varepsilon_{12}=[-\frac{\nu y}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\nu^2 y}{2}u_{xx}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\nu^2 y}{2}u_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}]\delta u;$$

$$\delta\varepsilon_{13}=[-\frac{\nu z}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\nu^2 z}{2}u_{xx}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\nu^2 z}{2}u_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}]\delta u.$$

Вычисляя вариацию внутренней энергии стержня

$$\delta w=L\{E[-(u_{xx}2A_1u_xu_{xx}+2A_2r^2u_{xx}u_{xxx}+2u_xu_{xx}+3A_1u_x^2u_{xx}+$$
$$+A_2r^2u_{xx}^4+2A_2r^2u_xu_{xx}u_{xxx})+\nu^2r^2(u_{xx}^2+u_xu_{xxx}+A_1u_{xxx}u_x^2+$$
$$+2A_1u_{xx}^2u_x+3A_2r^2u_{xx}^2u_{xxx})_x+2(2\nu B_1u_xu_{xx}+2\nu B_2r^2u_{xx}u_{xxx}-$$
$$-3\nu B_1u_x^2u_{xx}-\nu B_2r^2u_{xx}^3-2\nu^2r^2B_2u_xu_{xx}u_{xxx})+$$
$$+\frac{r^2\nu^2}{4(1+\nu)}((u_{xxxx}-(2\nu u_xu_{xx}-\nu^2u_xu_{xx})_{xx}-\nu(-u_{xx}^2+\nu u_xu_{xx}^2)_x)]\}\delta u.$$

и подставляя ее в (5), приходим к уравнению движения стержня:

$$\rho(-u_{tt}+\nu^2r^2u_{ttxx})+LE\{[u_{xx}+(2A_1-4\nu B_1+2)u_xu_{xx}-\frac{\nu^2r^2}{4(1+\nu)}u_{xxxx}]+$$
$$+z^2(2A_2-3\nu^2-4\nu B_2+\frac{\nu^3}{1+\nu})u_{xx}u_{xxx}+r^2(2A_2-6\nu^2A_1+4\nu^2B_2+$$
$$+\frac{3\nu^4}{2(1+\nu)}+\frac{\nu^3}{2(1+\nu)})u_xu_{xx}u_{xxx}+(3A_1+6\nu B_1)u_x^2u_{xx}+\alpha_2r^2u_{xx}^4-$$
$$-z^2(\nu^2+\frac{\nu^3}{2(1+\nu)})u_xu_{xxxx}+r^2(-2\nu^2A_1+2\nu^2B_2-\frac{\nu^4}{2(1+\nu)})u_{xx}^3+$$
$$+r^2(\frac{\nu^4}{4(1+\nu)}-A_1\nu^2)-6A_2\nu^2r^4u_{xx}u_{xxx}^3-3A_2\nu^2r^4u_{xx}^2u_{xxxx}\}=0.$$

Переходим к безразмерному уравнению движения путем введения безразмерных переменных

$$\xi = \frac{x}{L} - \frac{c}{L}t; \quad \tau = \varepsilon\frac{c}{L}t; \qquad u* = \frac{u}{A}; \qquad x^* = \frac{x}{d}; \qquad y^* = \frac{y}{d},$$

(6)

где A – амплитуда волны; L, d –длина волны и диаметр стержня; c – волновая скорость; $\varepsilon = \frac{A}{L}$ – малый параметр, определяющий нелинейность волнового процесса, т. е. длина волны L существенно больше амплитуды A; диаметр стержня и постоянные α, β удовлетворяют отношениям порядков

$$\frac{\alpha c}{\beta^2 L} = O(\varepsilon); \ \frac{d}{L} = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Отбрасывая слагаемые, порядок которых выше ε, получаем безразмерное уравнение движения стержня

$$\frac{\rho c^2}{E}(-u_{\xi\xi} + 2\varepsilon u_{\xi\tau} + \nu^2 \frac{r^2}{L^2} u_{\xi\xi\xi\xi}) + (1 - \frac{\alpha}{\beta})u_{\xi\xi} - \frac{\alpha c}{\beta^2 L} u_{\xi\xi\xi} +$$

$$+ 2(A_1 - 4\nu B_1 + 2)(1 - \frac{\alpha}{\beta})\varepsilon u_\xi u_{\xi\xi} - \frac{\nu^2 r^2}{4(1+\nu)L^2}(1 - \frac{\alpha}{\beta})u_{\xi\xi\xi\xi} = 0.$$

(7)

Методом возмущений исследуем (7), представляя $u(\xi, \tau)$ асимптотическим разложением

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots .$$

(8)

Подставляя (8) в (7) и учитывая соотношение порядков слагаемых, из нулевого приближения выводим уравнение

$$[-\frac{\rho c^2}{E} + (1 - \frac{\alpha}{\beta})]u_{0\xi\xi} = 0.$$

Значение $u_{0\xi\xi} \neq 0$, поэтому, приравнивая скобку к нулю, определим точную величину скорости продольной волны в вязкоупругом стержне:

$$c = \sqrt{E(1-\alpha/\beta)/\rho}.$$

Из первого приближения получаем уравнение Кортевега де Вриза – Бюргерса

$$\psi_\tau + b_1\psi\psi_\xi + b_2\psi_{\xi\xi\xi} + b_3\psi_{\xi\xi} = 0,$$

где $\psi = u_{0\xi}$; $b_1 = 1 - \dfrac{\alpha}{\beta}$; $b_2 = \dfrac{\nu r^2 d^2}{2l^2\varepsilon}$; $b_3 = -\dfrac{\alpha c}{\beta^2 l\varepsilon}$.

В результате асимптотического анализа определены теоретически более точные значения скорости распространения нелинейных волн деформации в вязкоупругих стержнях.

Полученные значения скорости можно использовать для совершенствования акустических методов диагностики скрытых микродефектов материала стержней, наличие которых может приводить к прогрессирующей потере несущей способности, т. е. к последовательному разрушению отдельных конструктивных элементов в виде цепной реакции от элемента к элементу и конструкции в целом.

Причиной возникновения начального локального повреждения конструктивных элементов здания в области микродефектов может быть любая из множества аварийных ситуаций, дефекты проектирования, строительства или реконструкции, не предусмотренных условиями нормальной эксплуатации здания или сооружения. Разрушение сооружений может привести к большим социальным, экологическим и экономическим потерям.

Таким образом, определение точных значений скорости распространения нелинейных волн деформации в вязкоупругих стержнях необходимо для оценки эксплуатационной и экономической надежности стержневых строительных элементов конструкций.

Литература

1. Нигул, У. К. Нелинейная акустодинамика / У. К. Нигул. – Л.: Судостроение, 1981. – 321 с.

2. Москвитин, В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов / В. В. Москвитин. – М.: Наука, 1972 – 327 с.

3. Илюшин, А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Илюшин, Б. Е. Победря. – М.: Наука, 1970. –312 с.

4. Аршинов Г.А., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде. Акустический журнал. 2000. Т. 46. № 1. С. 116-117.

5. Аршинов Г.А., Елисеев Н.И. Уединенные волны в физически линейных и нелинейных вязкоупругих стержнях. Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2003. № 1. С. 1-13.

6. Аршинов Г.А., Лойко В.И., Аршинов В.Г., Лаптев В.Н., Лаптев С.В. Анализ современных форм интеграции сельскохозяйственных товаропроизводителей и перерабатывающих предприятий АПК. Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2016. № 123. С. 1392-1421.

7. Аршинов Г.А., Лойко В.И., Аршинов В.Г., Лаптев В.Н., Лаптев С.В. Причины, препятствующие созданию эффективных объединений предприятий молочного подкомплекса АПК. Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2016. № 123. С. 1422-1443.

8. Лойко В.И., Аршинов Г.А., Аршинов В.Г. Математическое моделирование взаимовыгодных отношений производителей сырья и его переработчиков на основе нелинейной функции спроса. Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2015. № 110. С. 1691-1706.

9. Аршинов Г.А., Лаптев В.Н., Елисеев Н.И. Нелинейные уединенные ударно-волновые структуры в вязкоупругих стержнях. Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2003. № 2. С. 1-10.

10. Лаптев С.В. Нелинейные дисперсионные волны в вязкоупругих тонкостенных конструкциях. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Саратов, 2000.

References

1. Nigul, U. K. Nelinejnaya akustodinamika / U. K. Nigul. – L.: Sudostroenie, 1981. – 321 s.

2. Moskvitin, V. V. Soprotivlenie vyazkouprugih materialov / V. V. Moskvitin. – M.: Nauka, 1972 – 327 s.

3. Ilyushin, A. A. Osnovy matematicheskoj teorii termovyazkouprugosti / A. A. Ilyushin, B. E. Pobedrya. – M.: Nauka, 1970. –312 s.

4. Arshinov G.A., Zemlyanuhin A.I., Mogilevich L.I. Dvumernye uedinennye volny v nelinejnoj vyazkouprugoj deformiruemoj srede. Akusticheskij zhurnal. 2000. T. 46. № 1. S. 116-117.

5. Arshinov G.A., Eliseev N.I. Uedinennye volny v fizicheski linejnyh i nelinejnyh vyazkouprugih sterzhnyah. Politematicheskij setevoj elektronnyj nauchnyj zhurnal

Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2003. № 1. S. 1-13.

6. Arshinov G.A., Lojko V.I., Arshinov V.G., Laptev V.N., Laptev S.V. Analiz sovremennyh form integracii sel'skohozyajstvennyh tovaroproizvoditelej i pererabatyvayushchih predpriyatij APK. Politematicheskij setevoj elektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2016. № 123. S. 1392-1421.

7. Arshinov G.A., Lojko V.I., Arshinov V.G., Laptev V.N., Laptev S.V. Prichiny, prepyatstvuyushchie sozdaniyu effektivnyh ob"edinenij predpriyatij molochnogo podkompleksa APK. Politematicheskij setevoj elektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2016. № 123. S. 1422-1443.

8. Lojko V.I., Arshinov G.A., Arshinov V.G. Matematicheskoe modelirovanie vzaimovygodnyh otnoshenij proizvoditelej syr'ya i ego pererabotchikov na osnove nelinejnoj funkcii sprosa. Politematicheskij setevoj elektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2015. № 110. S. 1691-1706.

9. Arshinov G.A., Laptev V.N., Eliseev N.I. Nelinejnye uedinennye udarno-volnovye struktury v vyazkouprugih sterzhnyah. Politematicheskij setevoj elektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2003. № 2. S. 1-10.

10. Laptev S.V. Nelinejnye dispersionnye volny v vyazkouprugih tonkostennyh konstrukciyah. Dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskih nauk. Saratov, 2000.