

УДК 532.526.4

UDC 532.526.4

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

**ВИХРЕВЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В
АТМОСФЕРАХ ПЛАНЕТ И НА СОЛНЦЕ****VORTEX TURBULENT FLOWS IN
ATMOSPHERES OF PLANETS AND ON THE
SUN**Трунев Александр Петрович
К.ф.-м.н., Ph.D.Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.*Consulting, Likalo, LLC, Торонто, Канада**Consulting, Likalo, LLC, Toronto, Canada*

В настоящей работе рассматриваются два типа вихревых течений – циклоны и антициклоны в Северном и Южном полушариях. Для численного моделирования турбулентных течений этих типов используется модель планетарного пограничного слоя, развитая автором. Целью исследования является проверка гипотез о влиянии силы Кориолиса на формирование циклонов и антициклонов в северных и южных широтах. Первая гипотеза о направлении циркуляции в циклонах была проверена в случае осесимметричных радиально сходящихся и вертикально восходящих турбулентных потоков при натуральном соотношении параметров Кориолиса и вязкости. Из полученных данных численных экспериментов следует, что течение в северных широтах циркулирует против часовой стрелки, а в южных – по часовой стрелке, в полном соответствии с данными наблюдений. Таким образом, мы показали, что в турбулентном радиально сходящемся потоке под влиянием силы Кориолиса формируется циклоническое течение. Вторая гипотеза о формировании антициклонов была проверена в случае радиально расходящихся и вертикально нисходящих турбулентных потоков. В результате численных экспериментов установлено, что в этом случае течение в северных широтах циркулирует по часовой стрелке, а в южных – против часовой стрелки, что соответствует данными наблюдений для антициклонов. Для проверки влияния скорости движения центра циклона (антициклона) на циркуляцию была разработана нестационарная 3D модель турбулентного течения. В рамках этой модели исследованы течения в циклонах и антициклонах, движущихся с постоянной скоростью, а также в сдвиговом течении. Некоторые типы петлевых протуберанцев на Солнце объясняются наличием вихревого турбулентного течения, начинающегося в недрах Солнца и охватывающего хромосферу

In this work, we consider two types of vortex currents-cyclones and anticyclones in the Northern and Southern Hemispheres. Numerical modeling of turbulent flows of these types uses the model of the planetary boundary layer developed by the author. The purpose of the study is to test hypotheses about the influence of the Coriolis force on the formation of cyclones and anticyclones in the northern and southern latitudes. The first hypothesis on the direction of circulation in cyclones was verified in the case of axisymmetric radially converging and vertically rising turbulent flows with a natural Coriolis parameter and viscosity. From the obtained data of numerical experiments, it follows that the current in the northern latitudes circulates in a counter clockwise direction, and in the south - in a clockwise direction, in full accordance with the observational data. Thus, we have shown that a cyclonic flow is formed in a turbulent radially converging flow under the influence of the Coriolis force. The second hypothesis on the formation of anticyclones was verified in the case of radially divergent and vertically descending turbulent flows. Because of numerical experiments, it was established that in this case, the current in the northern latitudes circulates clockwise, and in the south - in a counter clockwise direction, which corresponds to observations for anticyclones. To test the effect of the cyclone (anticyclone) center velocity on circulation, a nonstationary 3D model of turbulent flow was developed. Within the framework of this model, flows in cyclones and anticyclones moving at a constant speed, as well as in shear flow, are studied. Some types of loop protuberances on the Sun are explained by the presence of a vortex turbulent flow starting in the bowels of the Sun and encompassing the chromosphere

Ключевые слова: АНТИЦИКЛОН, ДИНАМИКА
АТМОСФЕРЫ, ПЛАНЕТАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ
СЛОЙ, ТУРБУЛЕНТНОСТЬ, ЦИКЛОН

Keywords: ANTICYCLONE, ATMOSPHERE
DYNAMICS, PLANETARY BONDARY LAYER,
TURBULENCE, CYCLONE

Doi: 10.21515/1990-4665-134-109

Введение

Атмосферные течения на Земле, на Марсе, Юпитере, Сатурне, Уране и Нептуне характеризуются турбулентностью и сложной вихревой структурой, что обусловлено значительной угловой скоростью вращения этих планет.

На нашей планете атмосферные вихри большого масштаба существуют в форме циклонов и антициклонов. Циклоны имеют области пониженного давления в центре, обладают циркуляцией воздуха по часовой стрелке в Южном полушарии и против часовой стрелки в Северном. Антициклоны, напротив, имеют область повышенного давления и циркуляцию воздуха по и против часовой стрелки в Северном и Южном полушариях соответственно. Такая поляризация указывает на влияние силы Кориолиса, что подтверждается численными расчетами, выполненными в настоящей работе.

Циклоническое течение наблюдается на северном полюсе Сатурна, вокруг которого, в районе 75°N (РС) широты (78°N РГ), существует крупномасштабное гексагональное течение, с характерными масштабами скорости и длины - 120 м/с и 14500 км соответственно [1-2].

Гигантский антициклон - Большое красное пятно на Юпитере, имеет характерные масштабы скорости и длины - 150 м/с, 14000 км с юга на север и 24000-40000 км с запада на восток, наблюдается уже более 350 лет [3-6].

В работах [7-8] мы установили, что есть два механизма, ведущих к формированию гексагонального течения на северном полюсе Сатурна и Большого красного пятна на Юпитере соответственно. В первом случае происходит усиление слабого геострофического течения в турбулентном пограничном слое с большим градиентом турбулентной вязкости. Во втором случае выявлен механизм формирования вихревого течения, связанный с усилением малого по амплитуде зонального течения неоднородного по меридиональной координате в планетарном пограничном слое с градиентом

сдвиговой турбулентной вязкости и при наличии объемной турбулентной вязкости.

В работах [7-15] мы рассмотрели некоторые вопросы моделирования неізотермических потоков в планетарном пограничном слое с учетом градиента давления, ускорения потока, силы плавучести и силы Кориолиса.

В настоящей работе предложена модель формирования циклонов и антициклонов в турбулентном потоке под влиянием силы Кориолиса. Целью исследования является проверка гипотез о влиянии силы Кориолиса на формирование циклонов и антициклонов в северных и южных широтах. Первая гипотеза о направлении циркуляции в циклонах была проверена в случае осесимметричных радиально сходящихся и вертикально восходящих турбулентных потоков при натуральном соотношении параметров Кориолиса и вязкости. Из полученных данных численных экспериментов следует, что течение в северных широтах циркулирует против часовой стрелки, а в южных – по часовой стрелке, в полном соответствии с данными наблюдений. Таким образом, мы показали, что в турбулентном радиально сходящемся потоке под влиянием силы Кориолиса формируется циклоническое течение. Вторая гипотеза о формировании антициклонов была проверена в случае радиально расходящихся и вертикально нисходящих турбулентных потоков. В результате численных экспериментов установлено, что в этом случае течение в северных широтах циркулирует по часовой стрелке, а в южных – против часовой стрелки, что соответствует данными наблюдений для антициклонов. Для проверки влияния скорости движения центра циклона (антициклона) на циркуляцию была развита нестационарная 3D модель турбулентного течения. В рамках этой модели исследованы течения в циклонах и антициклонах, движущихся с постоянной скоростью, а также в сдвиговом течении.

Моделирования турбулентных течений в планетарном пограничном слое

Рассмотрим систему уравнений, описывающую неизотермическое атмосферное течение несжимаемого газа с учетом силы плавучести и силы Кориолиса, имеем [7-12]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2[\boldsymbol{\Omega} \mathbf{u}] + \frac{\nabla P}{\rho_0} &= \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\rho - \rho_0) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{Pr} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi &= \frac{\nu}{Sc} \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено: $\mathbf{u} = (u, v, w)$ - вектор скорость потока; $\boldsymbol{\Omega}$ - вектор угловой скорости вращения планеты; ρ - плотность; ν - кинематическая вязкость; P - давление за вычетом гидростатического атмосферного давления; \mathbf{g} - вектор ускорения свободного падения; ρ_0 - равновесная плотность; T - температура, Pr - число Прандтля; ϕ - массовая концентрация примеси; $Sc = \nu / D$ - число Шмидта; D - коэффициент молекулярной диффузии.

Гидростатическое уравнение и стандартное приближение Буссенеска для возмущений плотности заданы в виде

$$\nabla p_0 = \mathbf{g} \rho_0 (p_0, T_0), \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T - T_0) \quad (2)$$

Здесь $\beta = -\rho^{-1} (\partial \rho / \partial T)_p$ - коэффициент расширения, $\beta = 1/T$ для идеального газа.

Определим систему декартовых координат таким образом, чтобы ось Z была направлена против направления вектора ускорения свободного падения. Рельеф обтекаемой поверхности описывается уравнением $z = r(x, y)$. Граничные условия для параметров течения зададим на обтекаемой поверхности и на границе пограничного слоя следующим образом:

$$\begin{aligned} z = r(x, y): \quad \mathbf{u} = 0, \quad T = T_g, \quad \phi = \phi_g \\ z = H: \quad \mathbf{u} = U_0(1, 0, 0), \quad T = T_0, \quad \phi = \phi_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь T_g - температура подстилающей поверхности, ϕ_g - концентрация примеси на поверхности, H - высота пограничного слоя, U_0 - скорость течения на высоте $z = H$, T_0, ϕ_0 - температура и концентрация примеси на высоте $z = H$ соответственно.

По координатам x, y зададим периодические граничные условия. Считаем, что в начальный момент скорость течения, температура и концентрация примеси описываются линейными функциями, имеем

$$t = 0: \quad \mathbf{u} = U_0 z / H, \quad T = T_g + (T_0 - T_g) z / H, \quad \phi = \phi_g + (\phi_0 - \phi_g) z / H \quad (4)$$

Решения задачи (1), (4) для различных турбулентных течений были получены в наших работах [9-12] и других. Практически при любой функции распределения шероховатости $z = r(x, y)$ течение довольно быстро переходит в турбулентный режим с установлением логарифмического профиля скорости, температуры и концентрации примеси.

Обратимся к методу решения проблемы турбулентной диффузии, который был предложен в наших работах [9-12]. Основная идея заключается во введении в уравнения (1) случайных параметров. Например, в пограничном слое можно представить вектор скорости течения $\mathbf{u} = (u, v, w)$ в форме $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$, где $h = h(x, y, t)$ - поверхность, описывающая динамическую шероховатость.

Такую поверхность можно характеризовать случайными параметрами h, h_x, h_y, h_t , которые имеют смысл высоты, скорости движения элемента и наклонов поверхности. Обозначим функцию распределения этих параметров $f_s = f_s(h, h_x, h_y, h_t)$.

Предположим, что $\eta = z / h = const$ и рассмотрим достаточно представительную область течения объемом $dV = L_x L_y dz$, где L_x, L_y - типичные масштабы течения в направлениях x, y соответственно – рис.1. Рассмотрим подобласть течения dV_s , которая принадлежит рассматриваемой области течения dV , и в которой случайные параметры h, h_t, h_x, h_y изменяются в интервалах $(h; h + dh)$, $(h_t; h_t + dh_t)$, $(h_x; h_x + dh_x)$, $(h_y; h_y + dh_y)$.

В общем случае подобласть dV_s является многосвязной областью, объем которой задается уравнением

$$dV_s = dV f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t.$$

Случайная амплитуда скорости может быть определена путем суммирования выражения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z/h(x, y, t), t)$ в объеме dV_s :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_s} \frac{1}{\delta V} \int \mathbf{u}(x, y, \eta, t) dx dy dz \quad (5)$$

Здесь δV - произвольный объем, вложенный в $dV = L_x L_y dz$ и содержащий dV_s . Статистический момент порядка m случайной функции $\tilde{\mathbf{u}}(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t)$ определяется следующим образом

$$\bar{\tilde{\mathbf{u}}}^m(z, t) = \int \tilde{\mathbf{u}}^m(\eta, t, h, h_x, h_y, h_t) f_s(h, h_x, h_y, h_t) dh dh_x dh_y dh_t \quad (6)$$

В результате применения указанных преобразований система уравнений (1) принимает вид [11-12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= 0 \quad (7) \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{N}}{\rho_0 h} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} + 2[\mathbf{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}] &= \frac{\nu}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} - \\ &- \frac{\nu n^2 \eta}{h^2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \eta} + \frac{\nu \mathbf{N}}{h^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} (\tilde{\rho} - \rho_0) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} &= \frac{\nu}{Pr h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{Pr h^2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\tilde{W}}{h} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} = \frac{\nu}{Sch^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + n^2 \eta^2) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} - \frac{\nu n^2 \eta}{Sch^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta}$$

Здесь $\tilde{W} = \tilde{w} - \eta \Phi$, $\Phi = h_t + h_x \tilde{u} + h_y \tilde{v}$, $\tilde{P} = \tilde{p} + \theta$, $n = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$, $\mathbf{N} = (-\eta h_x, -\eta h_y, 1)$.

Отметим, что фигурирующая в уравнениях (7) турбулентная вязкость пропорциональна квадрату расстояния до шероховатой стенки. Система уравнений (7) имеет установившееся решение в форме логарифмического профиля, как для скорости, так и для температуры и концентрации [9-12].

Модель турбулентной объемной вязкости

В задаче о формировании вихревых турбулентных течений типа Большого красного пятна на Юпитере большую роль играет турбулентная объемная вязкость [8, 13]. Анализ системы уравнений (7) показывает, что уравнение неразрывности в турбулентном потоке принимает вид как для сжимаемой среды, хотя в исходной системе уравнений Навье-Стокса (1) предполагается течение несжимаемого газа. Это позволяет связать давление и дивергенцию скорости в виде [7-8,13-15]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha \omega_0 \frac{P - P_0}{\rho c_s^2} = -\frac{P - P_0}{\mu_T} \quad (8)$$

Здесь α, ω_0, P_0 – некоторые параметры, которые могут быть определены для потока в целом, $\mu_T = \rho c_s^2 / \alpha \omega_0$ - параметр, характеризующий вязкость в турбулентном потоке, c_s – скорость звука.

Уравнение (8) было выведено в нашей работе [13] из общих физических соображений. Покажем, что в турбулентном пограничном слое уравнение (8) выполняется в модели (7) при некоторых предположениях. Действительно, запишем уравнения, выражающие дивергенцию скорости и давление в турбулентном потоке – см. уравнения (2.11), (2.11, а) в [12], имеем

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \eta} + \Phi = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} = \frac{2\nu\rho_0}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{gh}{N^2} (\tilde{\rho} - \rho_0) - \frac{h\rho_0}{N^2} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} \quad (10)$$

В стационарном пограничном слое и в отсутствии сил плавучести уравнение (10) можно проинтегрировать, в результате получим

$$\tilde{P} - P_0 = \frac{2\nu\rho_0}{h} \Phi \quad (11)$$

Используя уравнение (9), приведем (11) к виду

$$\tilde{P} - P_0 = -\frac{2\nu\rho_0}{h} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \eta} \quad (12)$$

В объеме течения при усреднении параметров согласно (6) сохраняется линейная связь

$$\overline{\tilde{W}} = \overline{\tilde{w}} - \eta \overline{\Phi} \quad (13)$$

Наконец, полагая $\overline{\Phi} = 0$ и учитывая, что в обсуждаемом случае $\partial \overline{\tilde{w}} / \partial z = \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}}$, находим

$$P - P_0 = -\mu_T \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (14)$$

Мы, таким образом, установили, что параметр μ_T пропорционален динамической вязкости атмосферного газа. Используя уравнение (14), можно переформулировать модель Навье-Стокса (1) в виде, удобном для численного интегрирования. Для этого запишем второе уравнение (1) в общей форме

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x_i)$ – вектор объемных сил. Вычислим дивергенцию от обеих частей уравнения (15), тогда, используя (14) с постоянными параметрами μ_T, P_0 получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P = \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (16)$$

Здесь по повторяющимся индексам $i, k = 1, 2, 3$ осуществляется суммирование, $\nu_T = (\mu_T + \mu) / \rho_0$ - параметр турбулентной диффузии поля давления, $\mu = \rho_0 \nu$ - динамическая вязкость. Таким образом, мы можем записать уравнения Навье-Стокса (1) в виде системы уравнений параболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \nu \nabla^2 u_i + f_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P &= \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{\nu}{Pr} \nabla^2 T \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi &= \frac{\nu}{Sc} \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что параметры турбулентной диффузии и вязкости возникают в системе (17) в силу уравнения (14). Система уравнений (17) может быть использована для моделирования неустановившихся турбулентных течений [7-8, 13-15].

Другой вариант преобразованной системы уравнений Навье-Стокса может быть получен путем прямой подстановки выражения давления (14) в уравнение (15), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P_0}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{u})) + \mathbf{f} \quad (18)$$

Здесь параметры P_0, μ_T следует считать заданными функциями координат и времени. Отметим, что в модели (18) турбулентность проявляется через механизм второй или объемной вязкости, а не через сдвиговые напряжения, как в стандартных моделях турбулентности, включая модель (7).

Модель циклонического течения

Для моделирования циклонов в земной атмосфере используем уравнение (18), которое модифицируем с учетом (7). Предполагая наличие осевой симметрии, имеем в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\phi^2}{r} - f_c u_\phi = \\
 & \nu \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\nu u_r}{r^2} + \nu \frac{\partial}{\partial z} (1 + z^2/h^2) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\nu z}{h^2} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \nu_2 \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\
 & \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{u_r u_\phi}{r} + f_c u_r = \\
 & \nu \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{\nu u_\phi}{r^2} + \nu \frac{\partial}{\partial z} (1 + z^2/h^2) \frac{\partial u_\phi}{\partial z} - \frac{\nu z}{h^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \\
 & \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \\
 & \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\nu u_z}{r^2} + \nu \frac{\partial}{\partial z} (1 + z^2/h^2) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\nu z}{h^2} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu_2 \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \mathbf{u})
 \end{aligned} \tag{19}$$

Параметр Кориолиса зависит от угла широты по формуле $f_c = 2\Omega \sin \varphi$. Система уравнений (19) решалась численно методом установления в прямоугольной области $R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq z \leq L$. Начальные данные и граничные условия зададим, используя частные решения системы уравнений (7), описывающие течение в пограничном слое [9, 11], имеем

$$\begin{aligned}
 & u_r(0, r, z) = g(t)u_0 \operatorname{Arsh}(z/h), \quad u_\phi(0, r, z) = 0, \quad u_z(0, r, z) = g(t)\kappa z; \\
 & u_r(t, R_1, z) = g(t)u_0 \operatorname{Arsh}(z/h), \quad \partial_r u_\phi(t, R_1, z) = 0, \quad u_z(t, R_1, z) = g(t)\kappa z; \\
 & u_r(t, R_2, z) = g(t)u_0 \operatorname{Arsh}(z/h), \quad \partial_r u_\phi(t, R_2, z) = 0, \quad u_z(t, R_2, z) = g(t)\kappa z; \\
 & u_r(t, r, 0) = 0, \quad u_\phi(t, r, 0) = 0, \quad u_z(t, r, 0) = 0; \\
 & u_r(t, r, L) = g(t)u_0 \operatorname{Arsh}(L/h), \quad \partial_z u_\phi(t, r, L) = 0, \quad u_z(t, r, L) = g(t)\kappa L; \\
 & g(t) = 1 - \exp(-t/\tau).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь τ - время установления, которое ниже принято за единицу, $\tau = 1$. На рис. 1-2 представлены линии тока течения, сформировавшегося за время $t = 50$ в Северном и Южном полушариях соответственно. Параметры модели: $L = 10, R_1 = 0.01, R_2 = 10, f_c = \pm 5 \cdot 10^{-5}, h = 0.1, u_0 = -0.1, \kappa = 0.0862, \nu = 1.51 \cdot 10^{-5}; \nu_1 = 10$.

Число Рейнольдса изменяется в процессе решения задачи и достигает значения $Re = 5 \cdot 10^6$.

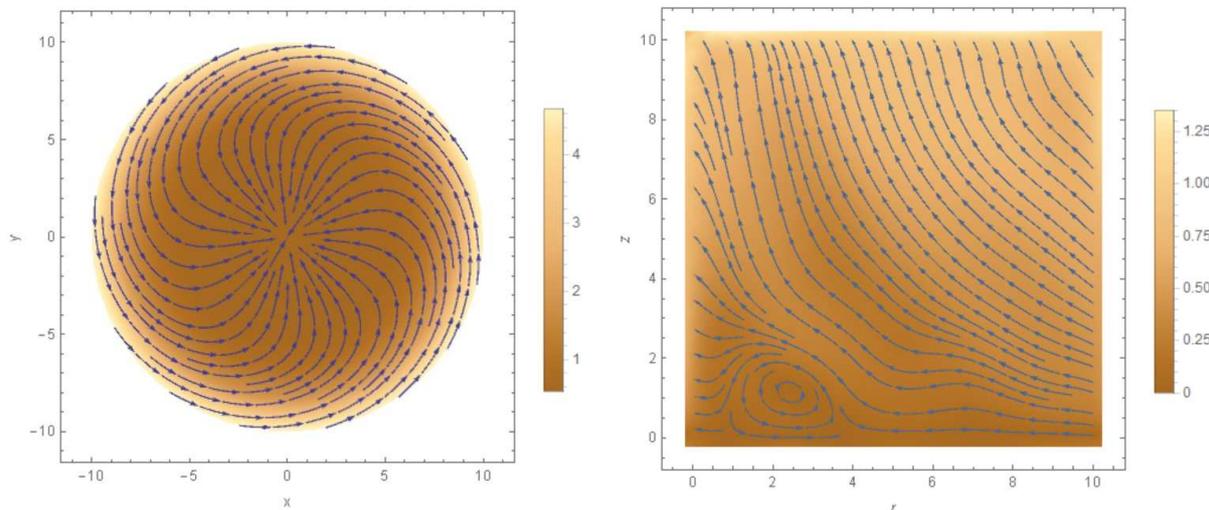


Рис. 1. Линии тока циклонического течения в северных широтах: слева – в сечении $z = L$; справа – в плоскости (r, z) .

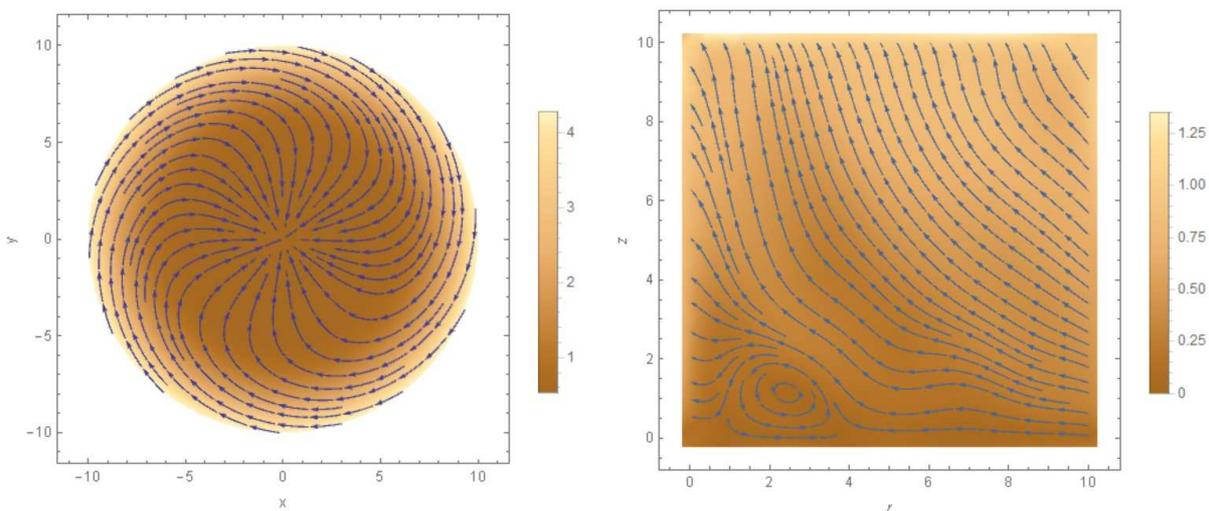


Рис. 2. Линии тока циклонического течения в южных широтах: слева – в сечении $z = L$; справа – в плоскости (r, z) .

Из приведенных на рис. 1-2 данных следует, что течение в северных широтах циркулирует против часовой стрелки, а в южных – по часовой

стрелке, в полном соответствии с данными наблюдений. Таким образом, мы показали, что в турбулентном радиально сходящемся потоке под влиянием силы Кориолиса формируется циклоническое течение.

Рассмотрим обобщение модели (19) на случай движения центра циклона с некоторой заданной скоростью. Учитывая зависимости параметров течения от полярного угла, находим

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi^2}{r} - f_c u_\phi = v \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} - \\
 & \frac{v u_r}{r^2} + v \frac{\partial}{\partial z} (1 + z^2/h^2) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{v z}{h^2} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{2v}{r^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + v_2 \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\
 & \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\phi}{r} + f_c u_r = v \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} - \\
 & \frac{v u_\phi}{r^2} + v \frac{\partial}{\partial z} (1 + z^2/h^2) \frac{\partial u_\phi}{\partial z} - \frac{v z}{h^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{2v}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{v_2}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \tag{21} \\
 & \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} = v \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{v u_z}{r^2} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \phi^2} + \\
 & v \frac{\partial}{\partial z} (1 + z^2/h^2) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{v z}{h^2} \frac{\partial u_z}{\partial z} + v_2 \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\
 & \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}
 \end{aligned}$$

Система уравнений (21) решалась численно в области $R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq z \leq L, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Начальные данные и граничные условия зададим аналогично (20), с учетом скорости движения циклона, имеем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{u}(0, r, \phi, z) = 0; \\
 & u_r(t, R_1, \phi, z) = g u_0 \operatorname{Arsh}(z/h), \quad u_\phi(t, R_1, \phi, z) = 0, \quad u_z(t, R_1, \phi, z) = g(t) \kappa z; \\
 & u_r(t, R_2, z) = g u_0 (1 + u_1 \cos \phi) \operatorname{Arsh}(z/h), \quad u_\phi(t, R_2, \phi, z) = g u_0 u_1 \sin \phi \operatorname{Arsh}(z/h), \\
 & u_z(t, R_2, \phi, z) = g(t) (1 + u_1 \cos \phi) \kappa z; \\
 & u_r(t, r, \phi, 0) = 0, \quad u_\phi(t, r, \phi, 0) = 0, \quad u_z(t, r, \phi, 0) = 0; \\
 & u_r(t, r, \phi, L) = g(t) u_0 \operatorname{Arsh}(L/h), \quad \partial_z u_\phi(t, r, \phi, L) = 0, \quad u_z(t, r, \phi, L) = g(t) \kappa L; \\
 & u_r(t, r, 0, z) = u_r(t, r, 2\pi, z), \quad u_\phi(t, r, 0, z) = u_\phi(t, r, 2\pi, z), \quad u_z(t, r, 0, z) = u_z(t, r, 2\pi, z); \\
 & g(t) = 1 - \exp(-t/\tau).
 \end{aligned} \tag{22}$$

На рис. 3-5 представлены линии тока и компоненты скорости течения, сформировавшегося за время $t = 1$ в Северном полушарии.

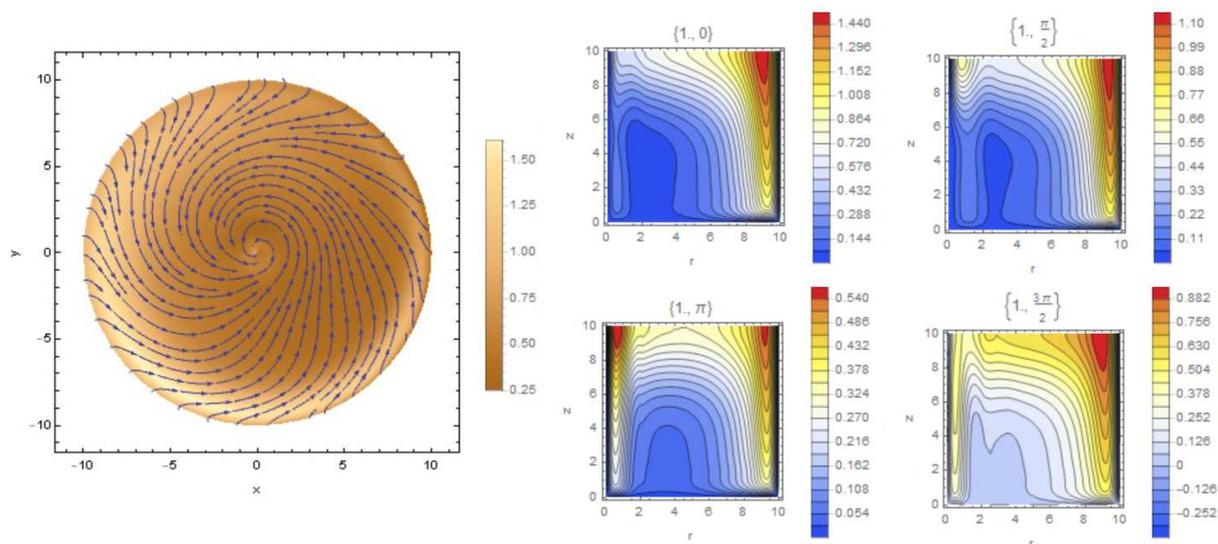


Рис. 3. Линии тока циклонического течения в северных широтах (слева) в сечении $z = 0.8L$ и распределение азимутальной компоненты скорости (справа) в плоскости (r, z) в сечениях $\phi = 0; \pi/2; \pi; 3\pi/2$.

Параметры модели:

$$L = 10, R_1 = 0.01, R_2 = 10, f_c = 2, h = 0.0132, u_0 = -0.1, \kappa = 0.0862, \nu = 1.51 \cdot 10^{-5};$$

$$\nu_1 = 10, u_1 = 0.5, \tau = 0.1$$

Здесь мы существенно увеличили параметр Кориолиса, на порядок понизили время установления и параметр шероховатости для сокращения времени счета. Число Рейнольдса изменяется в процессе решения задачи и достигает значения $Re = 1.5 \cdot 10^6$.

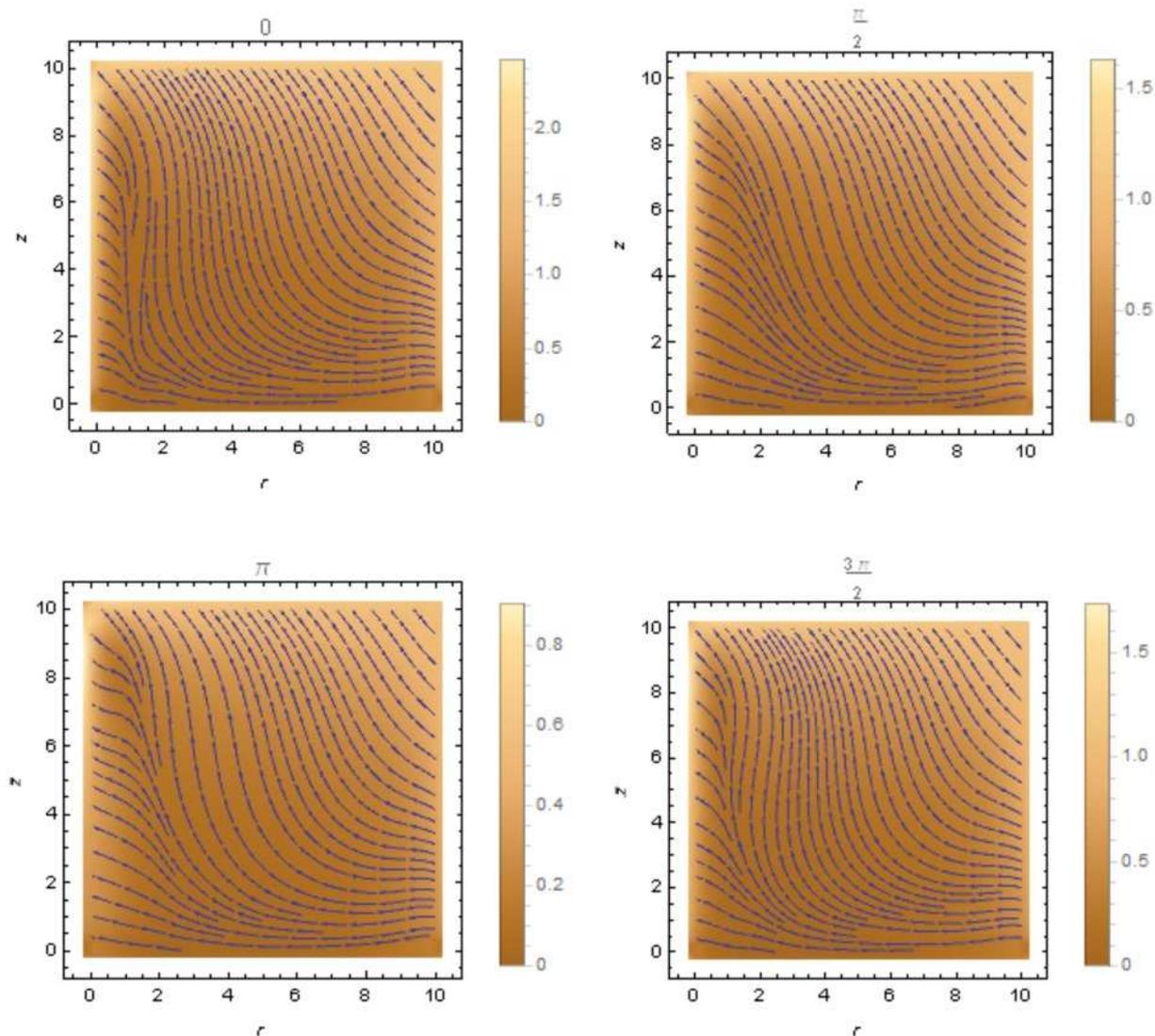


Рис. 4. Линии тока циклонического течения в северных широтах в плоскости (r, z) в сечениях $\phi = 0; \pi/2; \pi; 3\pi/2$.

Отметим, что локальный максимум азимутальной скорости достигается вблизи центра циклона и на периферии, а также вблизи верхней границы расчетной области. При этом в самом центре циклона $u_\phi = 0$, что связано с выбором граничных условий (22). Такое распределение азимутальной

скорости соответствует известным гипотезам о механизмах формирования циклонов [16-22].

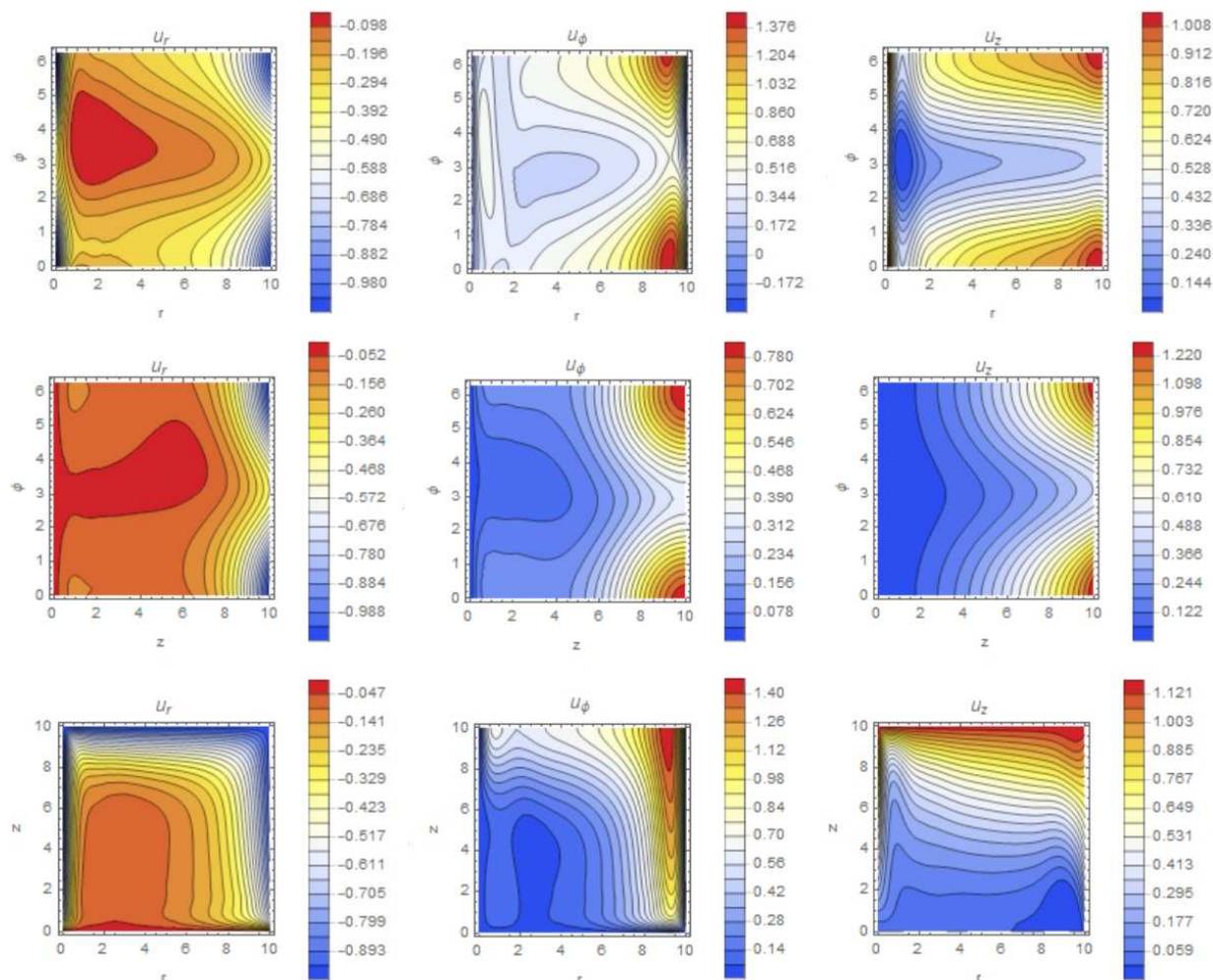


Рис. 5. Распределение компонентов скорости циклонического течения в северных широтах: сверху - в плоскости (r, ϕ) в сечении $z = 0.8L$; в плоскости (z, ϕ) в сечении $r = R_2/2$ - средние рисунки; внизу - в плоскости (r, z) в сечении $\phi = \pi/4$.

Линии тока в подвижном циклоне – рис. 4, не указывают на наличие тороидального вихря, как в осесимметричном течении – рис. 1, 2, что, видимо, связано с различием систем уравнений (19) и (21), а также граничных

условий (20) и (22). Распределение компонентов скорости в плоскостях (r, ϕ) и (z, ϕ) - рис. 5, демонстрируют наличия максимума амплитуды скорости в лобовой точке и минимума – в кормовой, что соответствует распределению u_r, u_z на внешней границе.

Модель антициклона

Антициклон представляет собой область повышенного давления, в которой циркуляция воздуха направлена по часовой стрелки в Северном полушарии. Для моделирования антициклона используем систему уравнений (21) с граничными условиями (22), в которых изменим знаки радиальной и вертикальной скорости на противоположные, имеем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{u}(0, r, \phi, z) = 0; \\
 & u_r(t, R_1, \phi, z) = -gu_0 \operatorname{Arsh}(z/h), \quad u_\phi(t, R_1, \phi, z) = 0, \quad u_z(t, R_1, \phi, z) = -g(t)\kappa z; \\
 & u_r(t, R_2, z) = -gu_0(1 + u_1 \cos \phi) \operatorname{Arsh}(z/h), \quad u_\phi(t, R_2, \phi, z) = gu_0 u_1 \sin \phi \operatorname{Arsh}(z/h), \\
 & u_z(t, R_2, \phi, z) = -g(t)(1 + u_1 \cos \phi)\kappa z; \\
 & u_r(t, r, \phi, 0) = 0, \quad u_\phi(t, r, \phi, 0) = 0, \quad u_z(t, r, \phi, 0) = 0; \\
 & u_r(t, r, \phi, L) = -g(t)u_0 \operatorname{Arsh}(L/h), \quad \partial_z u_\phi(t, r, \phi, L) = 0, \quad u_z(t, r, \phi, L) = -g(t)\kappa L; \\
 & u_r(t, r, 0, z) = u_r(t, r, 2\pi, z), \quad u_\phi(t, r, 0, z) = u_\phi(t, r, 2\pi, z), \quad u_z(t, r, 0, z) = u_z(t, r, 2\pi, z); \\
 & g(t) = 1 - \exp(-t/\tau).
 \end{aligned} \tag{23}$$

В параметрах модели изменим знак скорости движения центра:

$$\begin{aligned}
 & L = 10, R_1 = 0.01, R_2 = 10, f_c = \pm 2, h = 0.0132, u_0 = -0.1, \kappa = 0.0862, \nu = 1.51 \cdot 10^{-5}; \\
 & \nu_1 = 10, u_1 = -0.5, \tau = 0.1
 \end{aligned} \tag{24}$$

Результаты расчетов скорости течения в Северном и Южном полушариях приведены на рис. 6-7 соответственно. Из приведенных на рис. 6 данных следует, что течение в северных широтах циркулирует по часовой стрелке, что соответствует антициклону. Антициклон в Южном полушарии показан на рис. 7. В этом случае течение циркулирует против часовой стрелки.

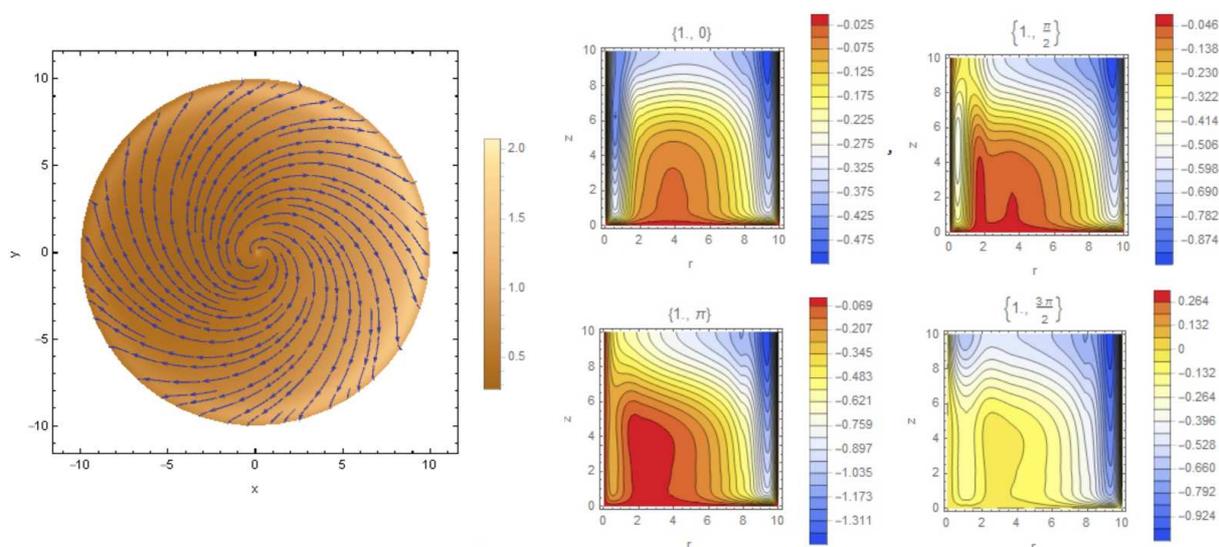


Рис. 6. Линии тока антициклонического течения в северных широтах (слева) в сечении $z = 0.8L$ и распределение азимутальной компоненты скорости (справа) в плоскости (r, z) в сечениях $\phi = 0; \pi/2; \pi; 3\pi/2$.

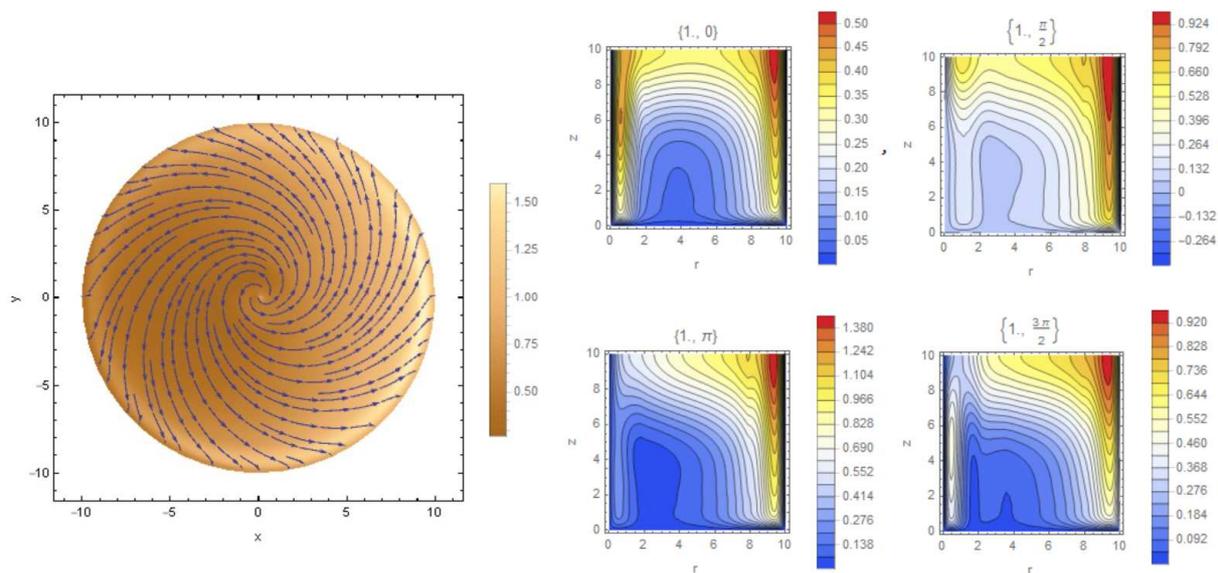


Рис. 7. Линии тока антициклонического течения в Южном полушарии (слева) в сечении $z = 0.8L$ и распределение азимутальной компоненты скорости (справа) в плоскости (r, z) в сечениях $\phi = 0; \pi/2; \pi; 3\pi/2$.

Линии тока в подвижном антициклоне в Северном и Южном полушариях в плоскости (r, z) приведены на рис. 8.

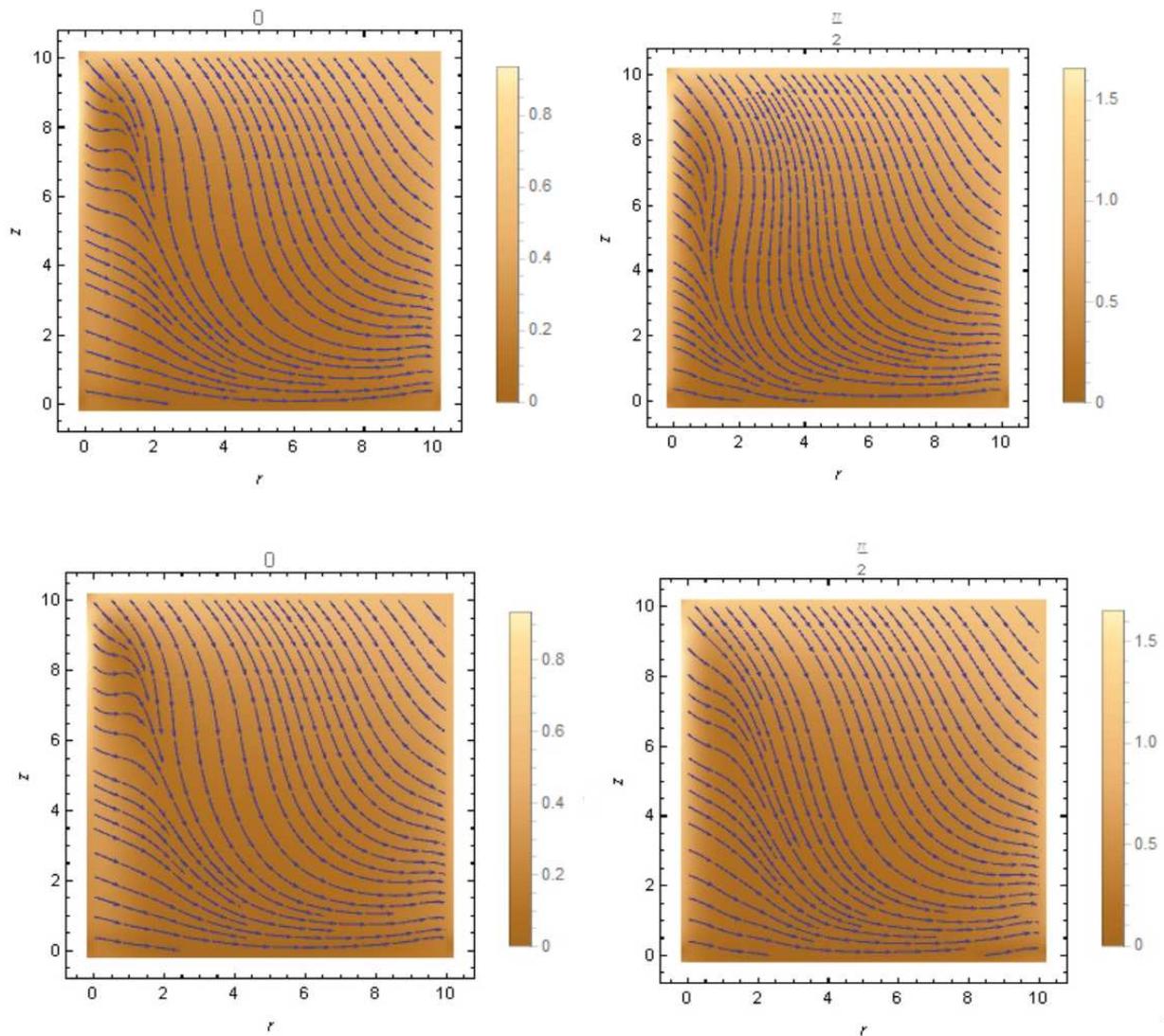


Рис. 8. Линии тока циклонического течения в северных (вверху) и южных (внизу) широтах в плоскости (r, z) в сечениях $\phi = 0; \pi/2$.

Таким образом, мы показали, что в турбулентном радиально расходящемся потоке под влиянием силы Кориолиса формируется антициклоническое течение, закрученное по часовой стрелке в Северном

полушарии и по часовой стрелке – в Южном, что соответствует наблюдательным данным.

Модель петлевых протуберанцев

Некоторые типы петлевых протуберанцев на Солнце можно объяснить наличием вихревого турбулентного течения, начинающегося в недрах Солнца и охватывающего хромосферу. Рассмотрим модель петлевых протуберанцев, в которой циклон и антициклон играют роль источника и стока плазмы соответственно. Для моделирования турбулентного течения между источником и стоком используем уравнение (18).

Следует учитывать, что с солнечной поверхности в окружающее пространство постоянно выбрасываются потоки плазмы, образующие солнечный ветер. Будем учитывать этот ветер как локальное явление, полагая зависимость скорости от высоты над поверхностью в форме

$$w = \kappa(z - z_0)$$

Источник и сток описываются одной моделью:

$$\mathbf{u} = (u_0, 0, w_0)(1 - e^{-t/\tau})(e^{-(x+x_0)^2} - e^{-(x-x_0)^2})$$

Результаты моделирования представлены на рис. 9. Данные параметров модели:

$$z_0 = 1; \kappa = 0.01; \nu = 10^{-6}; \nu_1 = 10; \tau = 1; x_0 = 5; w_0 = 0.8; u_0 = 0.1 - \text{верхние рисунки};$$

$$z_0 = 1; \kappa = 0.05; \nu = 10^{-6}; \nu_1 = 10; \tau = 1; x_0 = 5; w_0 = 0.8; u_0 = 0.2 - \text{нижние рисунки}.$$

Отметим, что при большой скорости восходящего потока петля не замыкается, поэтому наличие петлевых протуберанцев, видимо, свидетельствует о локальной нейтральности хромосферы. В этом случае для образования петли достаточно будет наличия пары циклон-антициклон. Можно предположить, что такие пары образуются за счет дифференциального вращения Солнца. Для проверки этой гипотезы была

использована модель (21) с граничным условием сдвигового потока $u = ky$.
 Результаты моделирования приведены на рис. 10-11.

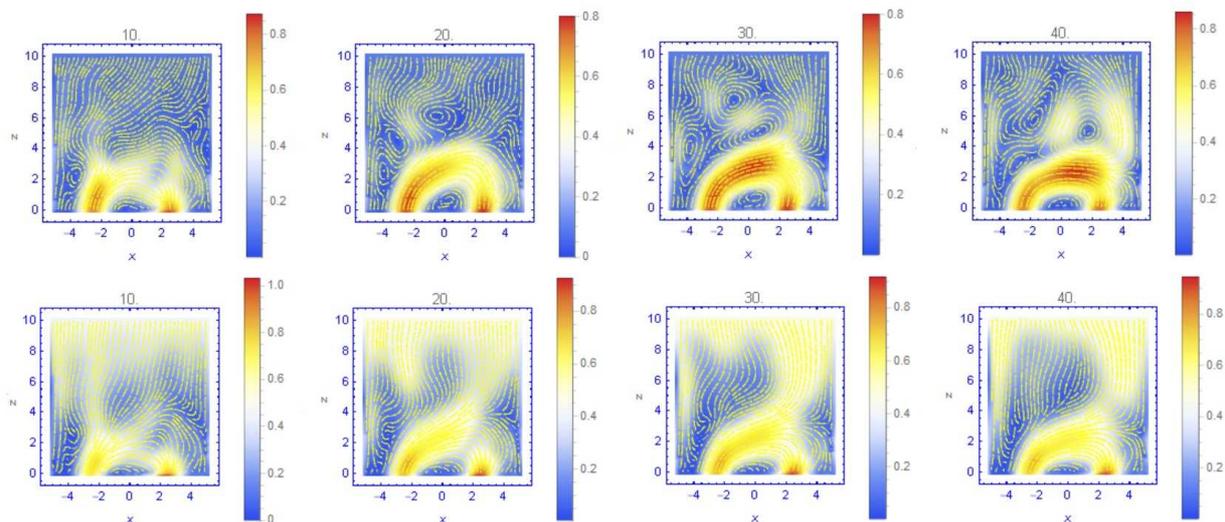


Рис. 9. Формирование петлевого протуберанца при малой (вверху) и большой (внизу) скорости восходящего течения плазмы.

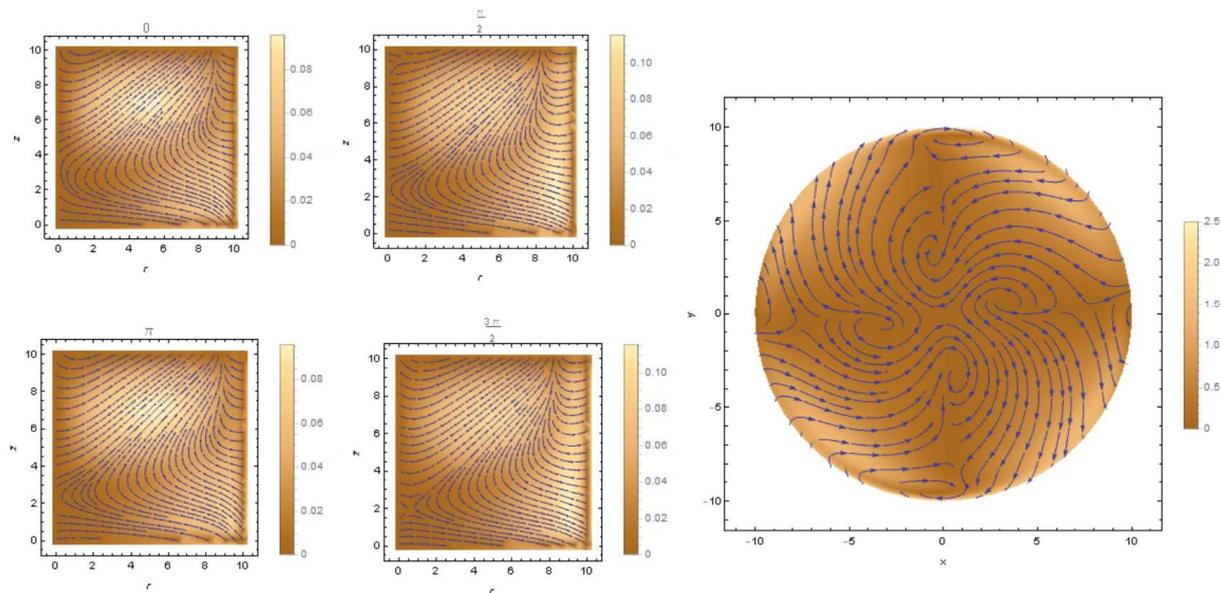


Рис. 10. Формирование пар циклон-антициклон в сдвиговом потоке: линии тока в плоскости (r, z) в сечениях $\phi = 0; \pi/2; \pi; 3\pi/2$ и в сечении $z = 0.8L$.

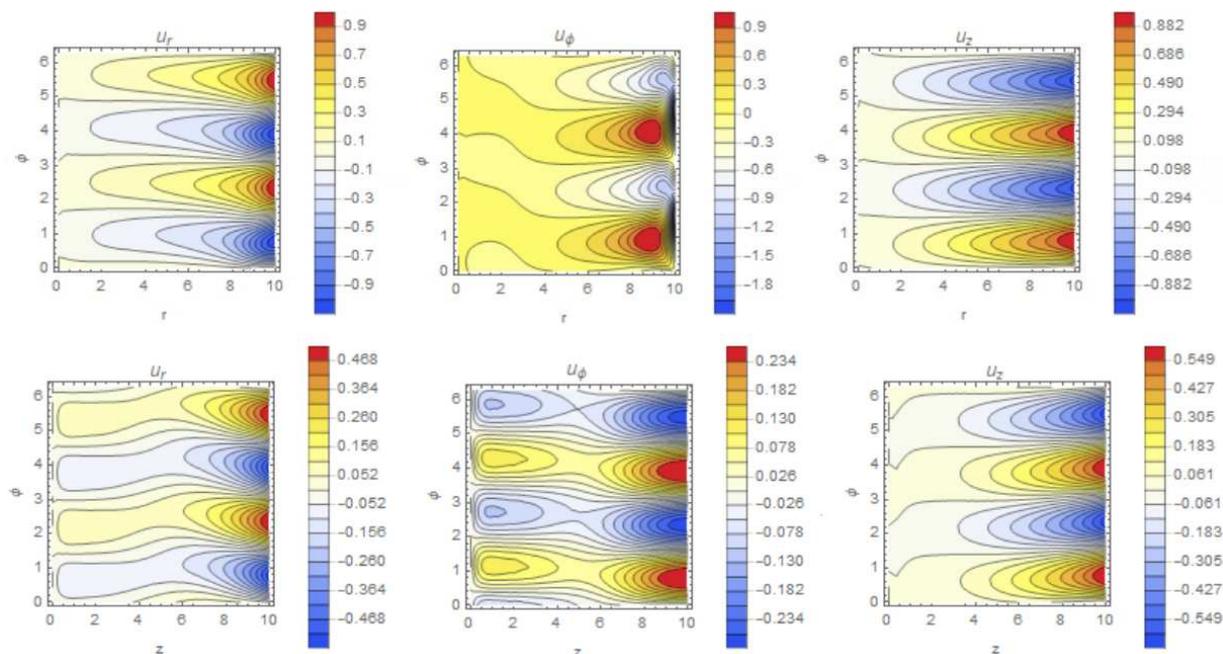


Рис. 11. Распределение компонентов скорости течения: сверху - в плоскости (r, ϕ) в сечении $z = 0.8L$; внизу - в плоскости (z, ϕ) в сечении $r = R_2/2$.

Данные, приведенные на рис. 10-11, были получены при $k = 0.3$. Эти результаты показывают, что в сдвиговом потоке образовалось сразу две пары циклон-антициклон, что является подтверждением гипотезы об образовании пар в сдвиговых потоках при дифференциальном вращении.

Наконец, заметим, что результаты численных экспериментов, представленные на рис. 1-8, соответствуют известным гипотезам о механизмах формирования циклонов и антициклонов [16-21]. Вихревые течения такого типа наблюдаются не только на нашей планете, но и на Марсе, Юпитере [4-6, 8], Сатурне [1-2, 7], Уране, Нептуне и на Солнце. Проведенные нами исследования [7-15] и результаты, приведенные на рис. 1-11, свидетельствуют о возможности построения адекватной модели вихревых турбулентных течений в атмосферах планет и на Солнце.

Библиографический список

1. Godfrey, D. A. A hexagonal feature around Saturn's North Pole// *Icarus*, 76, 335-356, 1988.
2. Sayanagi K.M., et al. Saturn's Polar Atmosphere//arXiv:1609.09626v2 [astro-ph.EP] 3 Oct 2016.
3. Allison, M., Godfrey, D.A., Beebe, R.F. A wave dynamical interpretation of Saturn's Polar Hexagon. *Science* 247, 1061–1063, 1990.
4. Dowling, T. E., Ingersoll, A. P. Potential vorticity and layer thickness variations in the flow around Jupiter's Great Red Spot and White Oval BC// *Journal of Atmospheric Sciences* 45, 1380-1396, 1988.
5. Vasavada, A. R., Ingersoll, A. P., et al. Galileo Imaging of Jupiter's Atmosphere: The Great Red Spot, Equatorial Region, and White Ovals// *Icarus* 135, 265-275, 1998.
6. Choi David S., Banfield Don, Gierasch Peter J., Showman Adam P. Velocity and Vorticity Measurements of Jupiter's Great Red Spot Using Automated Cloud Feature Tracking//*Icarus*, 188, 35-46, 2007; arXiv:1301.6119v1 [astro-ph.EP] 25 Jan 2013.
7. Трунев А.П. Моделирование гексагонального турбулентного течения в северной полярной области Сатурна/ А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №01(125). Doi: 10.21515/1990-4665-125-050
8. Трунев А.П. Моделирование атмосферных вихревых течений на Юпитере и Сатурне / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №02(126). С. 697 – 721. – IDA [article ID]: 1261702050. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/02/pdf/50.pdf>, 1,562 у.п.л.
9. Trunev A. P. Similarity theory for turbulent flow over natural rough surface in pressure and temperature gradients/ *Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control*, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, *Comp. Mech. Pub.*, Southampton, pp. 275-286, 1996.
10. Trunev A. P. Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scale/ *Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management*, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, *CMP, Southampton-Boston*, pp. 109-118, 1997.
11. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование диффузии примесей в приземном слое атмосферы. – Сочинский научно-исследовательский центр РАН, Сочи, 160 с., 1999.
12. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование турбулентного переноса в атмосфере. / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №05(059). С. 179 – 218. – Шифр Информрегистра: 0421000012\0088, IDA [article ID]: 0591005013. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2010/05/pdf/13.pdf>
13. Трунев А.П. Физические механизмы турбулентной вязкости и моделирование турбулентности на основе уравнений Навье-Стокса // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. –

№04(118). С. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf>

14. Трунев А.П. Моделирование турбулентного течения в полости на основе уравнений Навье-Стокса / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №05(119). С. 1111 – 1133. – IDA [article ID]: 1191605079. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/79.pdf>

15. Трунев А.П. Закон Бэра и гипотезы Эйнштейна о вихрях / Трунев А.П. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №09(133). – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/09/pdf/48.pdf>, – IDA [article ID]: 1331709048. <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-133-048>

16. Bjerknes J. On the Structure of Moving Cyclones//Monthly Weather Review, vol. 47, issue 2, p. 95, 1919.

17. Zehr R.M. Tropical cyclogenesis in the western North Pacific/ NOAA Technical Report NESDIS 61, U. S. Department of Commerce, Washington, DC 20233, 181 pp., 1992.

18. Velasco I., and Fritsch J.M. Mesoscale convective complexes in the Americas// J. Geophys. Res., 92, pp.9561-9613, 1987.

19. Chen S.A., and Frank W.M. A numerical study of the genesis of extratropical convective mesovortices. Part I: Evolution and dynamics// J. Atmos. Sci., 50, pp.2401-2426, 1993.

20. Emanuel, K.A. The physics of tropical cyclogenesis over the Eastern Pacific/ Tropical Cyclone Disasters, Eds: J. Lighthill, Z. Zhemin, G. J. Holland, K. Emanuel, Peking University Press, Beijing, 136-142, 1993.

21. Volkert H. Components of the Norwegian Cyclone Model: Observations and Theoretical Ideas in Europe Prior to 1920/ In: Shapiro M.A., Grønås S. (eds) The Life Cycles of Extratropical Cyclones. American Meteorological Society, Boston, MA, 1999.

References

1. Godfrey, D. A. A hexagonal feature around Saturn's North Pole// Icarus, 76, 335-356, 1988.

2. Sayanagi K.M., et al. Saturn's Polar Atmosphere//arXiv:1609.09626v2 [astro-ph.EP] 3 Oct 2016.

3. Allison, M., Godfrey, D.A., Beebe, R.F. A wave dynamical interpretation of Saturn's Polar Hexagon. Science 247, 1061–1063, 1990.

4. Dowling, T. E., Ingersoll, A. P. Potential vorticity and layer thickness variations in the flow around Jupiter's Great Red Spot and White Oval BC// Journal of Atmospheric Sciences 45, 1380-1396, 1988.

5. Vasavada, A. R., Ingersoll, A. P., et al. Galileo Imaging of Jupiter's Atmosphere: The Great Red Spot, Equatorial Region, and White Ovals// Icarus 135, 265-275, 1998.

6. Choi David S., Banfield Don, Gierasch Peter J., Showman Adam P. Velocity and Vorticity Measurements of Jupiter's Great Red Spot Using Automated Cloud Feature Tracking//Icarus, 188, 35-46, 2007; arXiv:1301.6119v1 [astro-ph.EP] 25 Jan 2013.

7. Trunev A.P. Modelirovanie geksagonal'nogo turbulentnogo techenija v severnoj poljarnoj oblasti Saturna/ A.P. Trunev // Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU)

[Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №01(125). Doi: 10.21515/1990-4665-125-050

8. Trunев A.P. Modelirovanie atmosferyh vihrevyh techenij na Jupiterе i Saturne / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №02(126). S. 697 – 721. – IDA [article ID]: 1261702050. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/02/pdf/50.pdf>, 1,562 u.p.l.

9. Trunев A. P. Similarity theory for turbulent flow over natural rough surface in pressure and temperature gradients/ Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub., Southampton, pp. 275-286, 1996.

10. Trunев A. P. Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scale/ Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.

11. Trunев A.P. Teorija turbulentnosti i modelirovanie diffuzii primesej v prizemnom sloe atmosfery. – Sochinskij nauchno-issledovatel'skij centr RAN, Sochi, 160 s., 1999.

12. Trunев A.P. Teorija turbulentnosti i modelirovanie turbulentnogo perenosa v atmosfere. / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №05(059). S. 179 – 218. – Shifr Informregistra: 0421000012\0088, IDA [article ID]: 0591005013. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2010/05/pdf/13.pdf>

13. Trunев A.P. Fizicheskie mehanizmy turbulentnoj vjazkosti i modelirovanie turbulentnosti na osnove uravnenij Nav'e-Stoksa // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №04(118). S. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf>

14. Trunев A.P. Modelirovanie turbulentnogo techenija v polosti na osnove uravnenij Nav'e-Stoksa / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №05(119). S. 1111 – 1133. – IDA [article ID]: 1191605079. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/79.pdf>

15. Trunев A.P. Zakon Bjera i gipotezy Jejnshtejna o vihrjah / Trunев A.P. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №09(133). – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/09/pdf/48.pdf>, – IDA [article ID]: 1331709048. <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-133-048>

16. Bjerknes J. On the Structure of Moving Cyclones//Monthly Weather Review, vol. 47, issue 2, p. 95, 1919.

17. Zehr R.M. Tropical cyclogenesis in the western North Pacific/ NOAA Technical Report NESDIS 61, U. S. Department of Commerce, Washington, DC 20233, 181 pp., 1992.

18. Velasco I., and Fritsch J.M. Mesoscale convective complexes in the Americas// J. Geophys. Res., 92, pp.9561-9613, 1987.

19. Chen S.A., and Frank W.M. A numerical study of the genesis of extratropical convective mesovortices. Part I: Evolution and dynamics// J. Atmos. Sci., 50, pp.2401-2426, 1993.

20. Emanuel, K.A. The physics of tropical cyclogenesis over the Eastern Pacific/ Tropical Cyclone Disasters, Eds: J. Lighthill, Z. Zhemin, G. J. Holland, K. Emanuel, Peking University Press, Beijing, 136-142, 1993.

21. Volkert H. Components of the Norwegian Cyclone Model: Observations and Theoretical Ideas in Europe Prior to 1920/ In: Shapiro M.A., Grønås S. (eds) The Life Cycles of Extratropical Cyclones. American Meteorological Society, Boston, MA, 1999.