УДК 519.1

01.00.0 Физико-математические науки

**ФРАКТАЛИЗАЦИЯ ДЕРЕВЬЕВ**[1]

Кочкаров Ахмат Магомедович
д.ф.-м.н, профессор
РИНЦ SPIN-код 8363-0831

Кочкарова Асият Нерчуковна
*Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, Черкесск, Россия*

В работе исследуются свойства предфрактальных графов, порожденных затравкой, представляющей собой дерево. Для определения явления исследуемого объекта с фрактальной структурой вводится понятие – степень фрактализации. Степень фрактализации позволит оценить структуру относительно принадлежности последней к предфрактальным графам

Ключевые слова: ФРАКТАЛЬНЫЙ И ПРЕДФРАКТАЛЬНЫЙ ГРАФ, СТЕПЕНЬ ФРАКТАЛИЗАЦИИ

**Doi: 10.21515/1990-4665-134-013**

UDC 519.1

Physics and mathematics

**FRACTALIZATION OF TREES**

Kochkarov Ahmat Magomedovich
Doctor of Physics and Mathematics, Professor
RSCI SPIN code 8363-0831

Kochkarova Asiyat Nerchukovna
*North Caucasus State Humanitarian-Technological Academy, Cherkessk, Russia*

In this article, the properties of prefractal graphs generated by a seed representing a tree are investigated. To determine the phenomenon of the object under investigation with a fractal structure, we present a concept which is the degree of fractalization. The degree of fractalization will allow us to evaluate the structure relative to its belonging to the prefractal graphs

Keywords: FRACTAL AND PREDEFACTAL GRAPH, DEGREE OF FRACTALIZATION

При исследовании сложных систем встречаются процессы: экономические, технические, политические структура связей взаимоотношений, которых меняются во времени. Для построения моделей таких структур наиболее адекватным инструментом являются предфрактальные графы [1]

В этой работе исследуются свойства предфратальных графов порожденных одним ребром и вводиться понятия **степень фрактализации** для определения явления исследуемого объекта предфрактальной и фрактальной структурой.

**Фрактальные и предфрактальные графы**

Напомним, что для определения фрактального (предфрактального) [1,3,4,7] графа необходимо ввести следующие понятия:

[1] **Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16 – 07 – 00231а**.

*Затравка* – любой связный граф [5,6], обозначаемый $H = (W, Q)$.

Операцию замены вершины затравкой (ЗВЗ), суть которой состоит в следующем: в данном графе $G = (V, E)$ намеченная вершина $v \in V$заменяется графом – затравкой $H = (W, Q)$, при этом каждое инцидентное вершине $v$ ребро соединяется с одной из вершин затравки $H$. Это происходит произвольно (случайным образом) или по определенному правилу. Полученная новая структура называется предфрактальный граф.

Предфрактальный граф будем обозначать $G_L = (V_L, E_L)$, где$V_L$ - множество вершин графа, а $E_L$- множество его ребер. Предфрактальный граф [1,9] определим рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = 1,2, \dots, L$-1графе $G_l = (V_l, E_l)$ каждую его вершину затравкой $H = (W, Q)$. На этапе $l = 1$ предфрактальному графу соответствует сама затравка $G_1 = H$. О данном процессе говорят, что предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ порожден затравкой $H = (W, Q)$. Процесс порождения предфрактального графа $G_L$, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1, G_{2,\dots,} G_l, \dots, G_L$, называемой *траекторией* [11]. Фрактальный граф $G = (V, E)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, определяется бесконечной траекторией.

Для предфрактального графа $G_L$ ребра, появившимся на $l$ - ом, $l \in \{1,2, \dots, L\}$, этапе порождения, будем называть ребрами ранга $l$.

Рассмотрим модель развития структур происходящих на основе алгоритма замены вершины затравкой (ЗВЗ), когда предфрактальные графы порождены простейший затравкой $H = (W, Q)$, представляющей собой простейшее двухвершинное дерево (Более простого связного графа имеющего одно ребро не существует). Очевидно, $|W| = 2, |Q| = 1$ (⟜⊸).

Обозначим эту заставку $H_1$. Предфрактальные графы, образованные по правилам ЗВЗ и порождаемые данной затравкой назовем простейшими и будем обозначать $TG_L$. При это, в соответствии с определением предфрактальных графив $TG_1 = H_1$. Далее, $TG_2$ – будет представлять с собой простую четырех вершинную цепь, $TG_3$ – может быть представлено уже тремя неизоморфными друг другу графами и т.д.

Рассмотрим случай, когда предфрактальные деревья могут порождаться не одной, а двумя затравками $H_0$, $H_1$: где $H_1$- как и прежде ребро с двумя вершинами, а $H_0$ – тривиальное дерево состоящее из одной вершины, не имеющее ребер. С точки зрения конструктивного подхода мы имеем структурный алфавит $A = \{H_0, H_1\}$, из которого в дальнейшем в соответствие с процедурой ЗВЗ строятся предфрактальные деревья. Обозначим $A = \{\circ; \circ\!\!-\!\!\circ\}$. Естественно, напрашивается аналогия с широко распространенным алфавитом $\{0; 1\}$. На каждом -ом этапе любая вершина дерева заменяется, либо затравкой- $H_0$, либо – затравкой $H_1$. Замена вершины затравкой $H_0$ фактически означает, что данная вершина остается неизменной вместе инцидентными ей ребрами. Поэтому, вполне естественно ввести единственное ограничение в применении этого алфавита состоящее в следующем: затравка $H_0$ не может одновременно применяться при замене всех вершин графа, т.к. в этом случае граф просто не изменяется.

**Теорема 1.** Любое –вершинное дерево является неканоническим предфрактальным деревом в алфавите $A$, может быть получено за $L \leq n$-1 этапов применения процедуры ЗВЗ в этом алфавите.

**Доказательство.** Доказательство этого утверждения следует из того, что для любого $n$ – вершинного дерева всегда может быть указан алгоритм его построения за $n$-1 этапов применения процедуры ЗВЗ в данном алфавите $\{H_0, H_1\}$. Суть этого алгоритма состоит в том, что на любом этапе

ЗВЗ ко всем вершинам дерева кроме одной применяется замена затравкой $H_0$ (т.е. эти вершины остаются неизменными), а одна вершина заменяется затравкой $H_1$. Таким образом, на каждом этапе ЗВЗ в соответствии с этим алгоритмом в дереве добавляется одно ребро и одна вершина. Понятно, что подобным способом может быть построена любое дерево. Начиная этот процесс с нулевого этапа ($L = 0$), т.е. имея в наличии $H_0$-единственную вершину, и применяя целенаправленно описанный алгоритм любое $n$ – вершинное дерево может быть получено за $L = n$-1 этапов (по числу ребер в данном дереве), что и доказывает данную теорему. □

**Лемма 1.** Объединением двух простейших предфратальных деревьев принадлежавших множеству $\{TG_L\}$ является простейшее предфрактальное дерево из множество $\{TG_{L+1}\}$.

**Доказательство**. Произведем объединение двух равновершинных ППД дополнительным ребром, соединяющим какую – либо вершину первого дерево с некоторой вершиной второго. Полученное дерево будет являться также простейшим предфрактальным деревом следующего ранга. Это видно из того, что если мы объявим дополнительное ребро – ребром первого ранга. А ребрам первого ранга в первоначальных деревьях присвоим ранг два и т.д. Тогда каждой из двух деревьев можно считать полученной процедурой ЗВЗ за $L$+*1* этапов из одной вершины затравки $H_1$. Лемма доказана. □

Из утверждения леммы 1 следует, что любое дерево может быть построено за $n$-1 этапов процедуры ЗВЗ, но при этом $n$ – вершинная звезда строится только за $n$-1 этапов, а для построения простой цепи можно использовать значительно меньшее их количество, если замену вершин затравкой $H_1$ применять на одном этапе одновременно к нескольким вершинам. В связи с этим возникает естественный вопрос, за какое минимальное число этапов $L$ применения процедуры ЗВЗ в алфавите А, может быть построено данное $n$ – вершинное дерево (с максимальным значением $L = n$-1 мы уже определились).

Для ответа на этот вопрос применим к данному $n$ – вершинному дереву процедуру обратную к процедуре ЗВЗ. А именно: выделим на данном дереве **максимальное парасочетание** $M_1$ – максимальное множество не смежных ребер принадлежащих данному дереву. Для звезды это множество всегда состоит из одного ребра, а у дерева имеющего совершенное парасочетание $M_1$ состоит из $n/2$ элементов. Далее строится новое дерево, в котором элементы $M_1$ становятся вершинами (т.е. ребра принадлежащие $M_1$ стягиваются). Следующем шагом выделяется максимальное парасочетание $M_2$ на вновь образовавшемся дереве и т.д. до тех пор, пока на $k$ – ом шаге не получиться граф $H_1$. После этого, повторяя этот процесс в обратном порядке получим алгоритм применение процедуры ЗВЗ в алфавите $A$, приводящий к построению данного дерева за $L = k + 1$ этапов ЗВЗ. Число $L = k + 1$ – будет минимальным числом этапов, за которые может быть построено данное дерево с использованием процедуры ЗВЗ. Назовем это число – **числом фрактализации** данного дерева. Ниже под символом $L$ будет пониматься именно минимальное число этапов применения операции ЗВЗ необходимых для построения данного дерева.

***Степень фрактализации деревьев***

Из изложенного выше понятно, что разным деревьям при одном и том же числе вершин могут соответствовать совершенно различные значения числа фрактализации $L$.

**Определение.** Степенью фрактализации назовем число $\mu(T) = \frac{N}{2^L}$,

где $N$ – *число вершин*, $L$ – *число фрактализаций данного дерева*.

**Лемма2.** Область значений степени фрактальности $E(\mu(T)) \in (0; 1]$.

**Доказательство.** Утверждение данной леммы следует из неравенства связывающее число вершин дерева $n$ с числом его фрактализации $L$.

$$2^L \geq n,$$

т.к. за $L$ этапов ЗВЗ в алфавите $A$ может быть получено «максимальное» $2^L$-вершинное дерево. Это возникает в случае, если на каждом этапе все вершины заменяются затравкой $H_1$, что соответствует построению простейших предфрактальных графов. Таким образом, равенство в данном неравенстве достигается, если рассматриваемое дерево является ППД $TG_L$ с числом вершин $n = 2^L$. Лемма доказана.

**Следствие.** Степень фрактальности простейших предфрактальных деревьев равна единице или

$\mu(TG_L) = 1.$

Рассмотрим степень фрактальности некоторых типов деревьев.

**Лемма3**. Степень фрактальности $n$ – вершинной звезды

$$\mu = \frac{n}{2^{n\text{-}1}}$$

**Доказательство.** Так как для звезды максимальное парасочетание всегда состоит из одного ребра для ее построения потребуется $L = n\text{-}1$ этапов процедуры ЗВЗ. Отсюда в соответствии с определением имеем

$$\mu = \frac{n}{2^{n\text{-}1}},$$

Что и требовалось доказать. □

**Следствие.** При $n \to \infty$ степень фрактализации $n$- вершинной звезды $\mu \to 0$.

**Лемма 3.** Степень фрактальности простой цепи удовлетворяет соотношению

$$1/_2 < \mu \leq 1$$

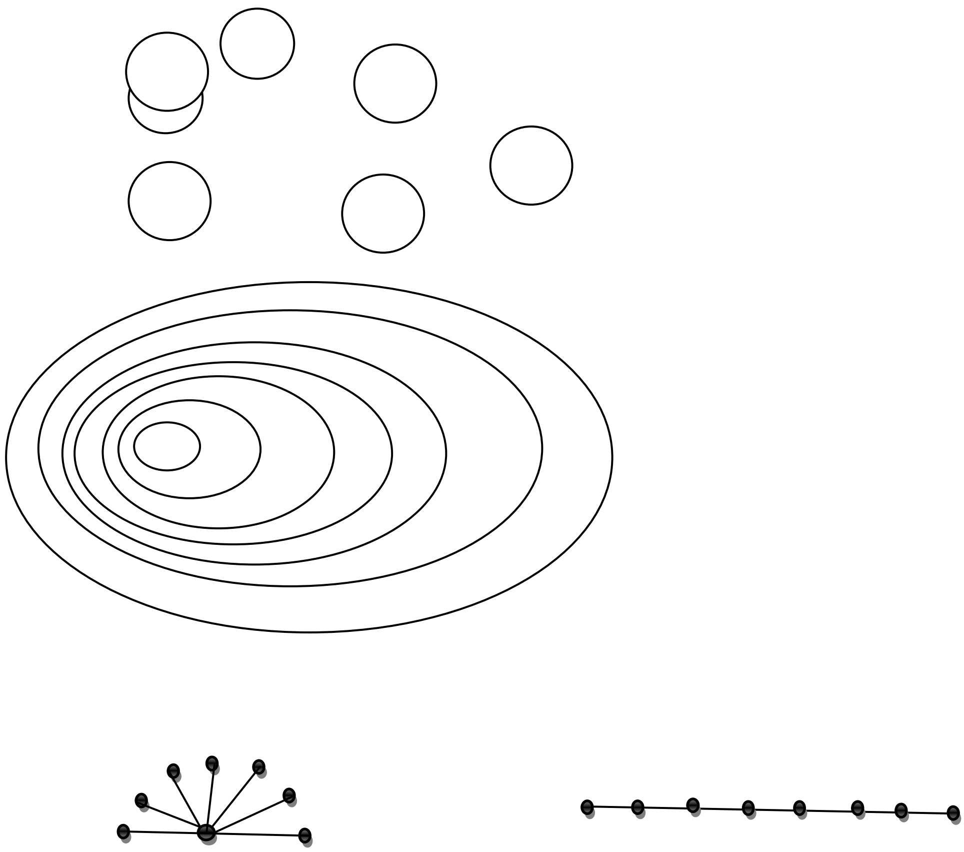
**Доказательство**. Пусть данное дерево является цепью с $n$ вершинами. Максимальное парасочетание простой цепи будет содержать $k$ ребер если

$n=2k$ (т.е. число вершин в цепи четно) или $n=2k+1$ (при нечетном $n$). После свертки парасочетания получим $k$ – вершинную цепь в первом случае и $k+1$ – вершинную цепь во втором. Продолжая процесс свертки максимального парасочетания до получения тривиальной цепи $H_1$ получим число фрактализации $L$-$1$. Нетрудно получить, что в случае простой цепи $L$ связано с n соотношение

$$2^{L\text{-}1} < n \leq 2^{L}$$

из чего и следует утверждение данной леммы. □

Для наглядности обратимся к пузырьковой модели приведенной на рисунке 1.



а) б)

Рисунок 1 – Пузырьковая модель

На рисунке 1 приведены примеры двух заданных графов (а) 8-ми вершинной звезды и (б) 8-ми вершинной цепи.

Рассчитаем степень фрактализации для заданных графов на рисунке 1 (а) и (б).

a) $\mu = \frac{8}{2^7} = \frac{1}{16},\ L = 7$

b) $\mu = \frac{8}{2^3} = 1,\ L = 3$

Введенное понятие позволяет определять насколько «фрактально» данное дерево. Чем ближе значения $\mu$ к 1, тем фрактальное организовано данное дерево. И наоборот, чем ближе $\mu$ к 0, тем ближе структура дерева к фрактальному хаосу.

## Литература

1. *Кочкаров А.М.* Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. – Нижний Архыз: РАН САО, 1998.

2. *Кочкаров А.А.*, *Кочкаров Р.А.* Предфрактальные графы в проектировании и анализе сложных структур. Препринт. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №10, 2003.

3. А.А.Кочкаров. Структурная динамика: свойства и количественные характеристики предфрактальных графов. – М.: Вега-Инфо, 2012. – 120с.

4. Кочкаров Р.А. Многовзвешенные предфрактальные графы с недетерминированными весами : Приложения в экономике, астрофизике и сетевых коммуникация. – М.: ЛЕНАРД, 2017. – 432 с.

5. Емеличев Р., Мельников О., Сарванов В., Тышкевич Р. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

6. Берж К. Теория графов и ее применения. Пер. с фр.-М., Иностранная литература. 1962.

7. Павлов Д. А. Мера сходства предфрактальных графов / Д. А. Павлов // Параллельная компьютерная алгебра и её приложения в новых инфокоммуникационных системах : сб. науч. тр. I Междунар. конф. – Ставрополь : Изд.-информ. центр «Фабула», 2014. – С. 81–86.

8. Мелроуз Дж. Иерархические фрактальные графы и блуждания на них . В сб. Фракталы в физике М.: Мир, 1988.-С.519-523.23.

9. М.Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества. Функции, распределения.-Киев:Наук. думка, 1992.

10. Кочкаров А.М., Кочкарова А.Н., Л.Х. Хапаева. Моделирование фрактального развития структур простейшими предфрактальными графами. Известия ЮФУ. Технические науки. Ростов-на-Дону -2016.

11. Павлов Д.А., Салпагаров С.И. Многокритериальная задача выделения маршрутов на предфрактальном графе // Известия ТРТУ. Таганрог: ТРТУ, 2004

12. Емеличев В.А., Перепелица В.А., Козырев В.А. Обзор некоторых проблем дискретной многокритериальной оптимизации. // Труды сем. по дискретной математике и ее прилож. -М.: МГУ,1989.-С.13-17.

## References

1. Kochkarov A.M. Raspoznavanie fraktal'nyh grafov. Algoritmicheskij podhod. □ Nizhnij Arhyz: RAN SAO, 1998.

2. Kochkarov A.A., Kochkarov R.A. Predfraktal'nye grafy v proektirovanii i analize slozhnyh struktur. Preprint. – M.: IPM im. M.V. Keldysha RAN, №10, 2003.

3. A.A.Kochkarov. Strukturnaja dinamika: svojstva i kolichestvennye harakteristiki predfraktal'nyh grafov. – M.: Vega-Info, 2012. – 120s.

4. Kochkarov R.A. Mnogovzveshennye predfraktal'nye grafy s nedeterminirovannymi vesami : Prilozhenija v jekonomike, astrofizike i setevyh kommunikacija. – M.: LENARD, 2017. – 432 s.

5. Emelichev R., Mel'nikov O., Sarvanov V., Tyshkevich R. Lekcii po teorii grafov. M.: Nauka, 1990.

6. Berzh K. Teorija grafov i ee primenenija. Per. s fr.-M., Inostrannaja literatura. 1962.

7. Pavlov D. A. Mera shodstva predfraktal'nyh grafov / D. A. Pavlov // Parallel'naja komp'juternaja algebra i ejo prilozhenija v novyh infokommunikacionnyh sistemah : sb. nauch. tr. I Mezhdunar. konf. – Stavropol' : Izd.-inform. centr «Fabula», 2014. – S. 81–86.

8. Melrouz Dzh. Ierarhicheskie fraktal'nye grafy i bluzhdanija na nih . V sb. Fraktaly v fizike M.: Mir, 1988.-S.519-523.23.

9. M.Turbin A.F., Pracevityj N.V. Fraktal'nye mnozhestva. Funkcii, raspredelenija.-Kiev:Nauk. dumka, 1992.

10. Kochkarov A.M., Kochkarova A.N., L.H. Hapaeva. Modelirovanie fraktal'nogo razvitija struktur prostejshimi predfraktal'nymi grafami. Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki. Rostov-na-Donu -2016.

11. Pavlov D.A., Salpagarov S.I. Mnogokriterial'naja zadacha vydelenija marshrutov na predfraktal'nom grafe // Izvestija TRTU. Taganrog: TRTU, 2004

12. Emelichev V.A., Perepelica V.A., Kozyrev V.A. Obzor nekotoryh problem diskretnoj mnogokriterial'noj optimizacii. // Trudy sem. po diskretnoj matematike i ee prilozh. -M.: MGU,1989.-S.13-17.