

УДК 539.3

UDC 539.3

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and mathematics

**АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ И АМПЛИТУДНО-СКОРОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЖЕСТКОГО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ВКЛЮЧЕНИЯ, ДВИЖУЩЕГОСЯ ВНУТРИ ДВУХСЛОЙНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ****AMPLITUDE-FREQUENCY AND AMPLITUDE-VELOCITY CHARACTERISTICS OF A RIGID OSCILLATING INCLUSION MOVING WITHIN A TWO-LAYER ISOTROPIC MEDIUM**

Сыромятников Павел Викторович

Syromyatnikov Pavel Viktorovich

К. ф.–м. н.

Cand. Phys. Math. Sci.

SPIN-код = 8833-2190, SCOPUS ID =6507520072

SPIN-code = 8833-2190, SCOPUS ID =6507520072

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Южный научный центр Российской академии наук, Краснодарское отделение, Краснодар, Россия, зав. лаб. прикладной математики и механики.**Southern Scientific Center of Russian Academy of Sciences (SSC RAS), Krasnodar branch, Krasnodar, Russia, Head of the Laboratory of Applied Mathematics and Mechanics.*350040, г. Краснодар, Ставропольская., 149, ауд. А 302; e-mail: [syromyatnikov\\_pv@mail.ru](mailto:syromyatnikov_pv@mail.ru)350040, Krasnodar, Stavropol'skaja., 149, aud. A 302; e-mail: [syromyatnikov\\_pv@mail.ru](mailto:syromyatnikov_pv@mail.ru)

Работа посвящена численному исследованию в плоской постановке амплитуды колебаний заглубленного источника в зависимости от частоты и скорости движения в различных изотропных средах. Рассматриваются три варианта среды: двухслойный пакет с жестко фиксированным основанием, двухслойный пакет с механически свободным основанием, однослойное полупространство. Источник, в виде скачка напряжений моделирующий жесткое включение малых размеров, движется в интерфейсной плоскости с постоянной скоростью. Однородные краевые задачи рассматриваются в подвижной системе координат, связанной с источником. Метод решения основан на использовании интегральных преобразований Фурье, метода прямого контурного интегрирования и алгоритмах построения символов матриц Грина. Метод прямого контурного интегрирования существенным образом упрощает расчеты по сравнению с традиционными подходами к вычислению интегралов Фурье. В зависимости от вида источника и типа среды приведены расчеты девяти амплитудно-частотных и амплитудно-скоростных характеристик, дающих исчерпывающее качественное и количественное описание решений краевых задач в большом диапазоне скоростей и частот. Сравнительный анализ расчетов показал первоочередное влияние на исследуемые характеристики типа упругой среды, в значительной степени – вида источника, выявлены некоторые существенные связи краевых задач с подвижным источником и соответствующих задач с неподвижным источником

The article is dedicated to a numerical investigation of a plane problem of the oscillation amplitude of a buried source, depending on the frequency and motion speed in various isotropic media. Three types of the medium are considered: a two-layer package with a rigidly fixed base, a two-layer package with a mechanically free base, a half-space. The source, in the form of a stress jump simulating a rigid inclusion of small dimensions, moves in the interface plane at a constant speed. Homogeneous boundary value problems are considered in a moving coordinate system associated with a source. The solution method is based on the usage of integral Fourier transforms, the method of direct contour integration and algorithms for constructing symbols of Green's matrices. The method of direct contour integration significantly simplifies calculations in comparison with the traditional approaches to the calculation of Fourier integrals. We have presented calculations of nine amplitude-frequency and amplitude-velocity characteristics for different combinations of medium and source types, that give an exhaustive qualitative and quantitative description of the solutions for boundary value problems in a wide range of velocities and frequencies. Comparative analysis of calculations showed a primary influence of the type of an elastic medium on the investigated characteristics, as well as the large influence of the source type. Which, in turn, revealed some substantial connections between the boundary value problems with a moving source and the corresponding problems with a stationary source

Ключевые слова: ДВУХСЛОЙНАЯ УПРУГАЯ ИЗОТРОПНАЯ СРЕДА, ВНУТРЕННИЙ

Keywords: TWO-LAYERED ELASTIC ISOTROPIC MEDIUM, INTERNAL MOBILE OSCILLATING

ПОДВИЖНЫЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩИЙ  
ИСТОЧНИК, АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНАЯ И  
АМПЛИТУДНО-СКОРОСТНАЯ  
ХАРАКТЕРИСТИКА, ЧИСЛЕННОЕ  
ИНТЕГРИРОВАНИЕ

SOURCE, AMPLITUDE-FREQUENCY  
AND AMPLITUDE-SPEED CHARACTERISTIC,  
NUMERICAL INTEGRATION

Doi: 10.21515/1990-4665-133-035

## Введение

Имеется немало работ, посвященных исследованию возмущений, вызванных движущимися по поверхности упругого тела источниками [1-6]. Исследований аналогичных задач для заглубленных источников значительно меньше, что вполне можно объяснить существенным усложнением задачи.

К задачам с движущимся источником возмущений, как правило, применимы те же методы, что и к соответствующим краевым задачам с неподвижным источником [2,3,4], однако их специфика приводит к необходимости разработки новых методов и подходов. Взаимосвязь между краевыми задачами с подвижным и неподвижным источником устанавливается принципом соответствия [4].

Данная работа посвящена численному моделированию и исследованию в двумерной постановке амплитудно-частотных и амплитудно-скоростных характеристик (АЧСХ) системы «упругая двухслойная среда – внутренний осциллирующий подвижный источник» в зависимости от частоты колебаний, скорости движения, размера источника и типа граничных условий. Данная характеристика дает исчерпывающую информацию о решении краевой задачи, важную в теоретическом и практическом плане, в частности, о наличии или отсутствии и локализации неограниченных или ограниченных резонансов и антирезонансов, участках монотонности и т.д. При очень малых размерах источника (в пределе – точечных) данная характеристика фактически описывает

соответствующее фундаментальное решение, при относительно больших размерах она учитывает также взаимодействие источника со средой.

В случае распределенного (неточечного) источника точный расчет АЧСХ требует решения смешанной задачи, соответствующей однородной краевой задаче, описываемой ниже. Однако методы решения смешанной задачи для подвижного осциллирующего жесткого штампа на сегодняшний день разработаны недостаточно полно [4] и технически весьма сложны. Предложенный в работе метод является приближенным, но простым и эффективным. Как показали сравнительные расчеты, АЧСХ соответствующих двумерных и трехмерных задач могут быть качественно и количественно весьма близкими [6]. Данное обстоятельство имеет большое значение, т.к. расчет АЧСХ для трехмерной задачи требует на несколько порядков большего объема вычислений.

Задача решается с помощью интегральных преобразований Фурье [2,3,4], алгоритмов построения символов матриц Грина и метода прямого контурного интегрирования [5,6].

### Постановка задачи

В плоской постановке рассматриваются три вида изотропных упругих полуограниченных многослойных сред: двухслойный пакет на жестком основании, двухслойный пакет со свободным основанием и слой, сцепленный с полупространством. Двухслойные пакеты образованы тремя прямыми  $y = y_j : y_3 < y_2 < y_1 = 0$ , в декартовой системе координат  $\{x_1, x_2\} = \{x, y\}$ , пакеты занимают объем  $-\infty < x < \infty$ ,  $y_3 \leq y \leq y_1$ . Для полупространства  $y_3 = -\infty$ . Параметры Ламе  $\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}$ , плотности  $\rho^{(n)}$  верхних и нижних слоев, подстилающего полупространства могут быть различными. Значение  $n=1$  соответствует верхнему слою,  $n=2$  - нижнему

слою или полупространству. Векторы перемещений в упругой среде

$\mathbf{u}^{(n)} = \{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}\}^T$  должны удовлетворять уравнениям Ламе:

$$(\lambda^{(n)} + \mu^{(n)}) \frac{\partial \operatorname{div}(\mathbf{u}^{(n)})}{\partial x_i} + \mu^{(n)} \Delta u_i^{(n)} - \rho \frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}$  – параметры Ламе,  $\rho^{(n)}$  – плотность,  $t$  – время. Гармоническая нагрузка  $q \exp(-i\omega t)$ , заданная на глубине  $y = y_2$  в области  $\Omega$ , движется вдоль прямой  $Ox$  с постоянной скоростью  $v$ . В дальнейшем общий экспоненциальный множитель  $\exp(-i\omega t)$  опускается. В подвижной системе координат  $\{\xi, \eta\}$

$$\xi = x - vt, \quad \eta = y, \quad (2)$$

область  $\Omega$  задается следующим образом

$$-\frac{L_x}{2} \leq \xi \leq \frac{L_x}{2}, \quad y = y_2. \quad (3)$$

Поверхность тела  $y = y_1 = 0$  свободна от механических напряжений

$$\sigma_{i2}(\xi, \eta)|_{\eta=0} = 0, \quad i = 1, 2; \quad -\infty \leq \xi \leq \infty. \quad (4)$$

На поверхности раздела слоев (или полупространства и слоя)  $y = y_2$  заданы условия скачка напряжений, что соответствует жесткому бесконечно тонкому включению

$$(\sigma_{i2}^{(1)}(\xi, \eta) - \sigma_{i2}^{(2)}(\xi, \eta)) = q_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \quad (\xi, \eta) \in \Omega, \quad (5)$$

$$(\sigma_{i2}^{(1)}(\xi, \eta) - \sigma_{i2}^{(2)}(\xi, \eta)) = 0, \quad (\xi, \eta) \notin \Omega.$$

При  $y = y_3$  граничные условия для слоя на жестком основании следующие

$$u_j^{(2)}(x, y)|_{y=y_3} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

Граничные условия для механически свободного основания слоя

$$\sigma_{i2}^{(2)}(x, y)|_{y=y_3} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Для полупространства должны выполняться либо условия излучения [2], либо условия убывания

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} |\mathbf{u}^{(2)}(\mathcal{L}y)| = 0. \quad (8)$$

На первом этапе требуется определить смещения  $\mathbf{u}^{(n)}(\mathcal{L}y, v, \omega)$  как функцию координат  $\{\mathcal{L}y\}$ , скорости  $v$ , частоты осцилляций  $\omega$ , глубины залегания внутреннего источника  $y_2$ , вида источника  $q_i$ , типа граничных условий (6)-(8), и затем на этой основе рассчитать АЧСХ исследуемых сред.

### Метод решения

Задачу (1)-(8) можно рассматривать как нестационарную задачу общего вида, однако такой подход практически трудно реализуем.

С другой стороны, в системе координат, связанной с подвижным источником  $\{\mathcal{L}y\}$  (2), задачу можно рассматривать как частный, хотя и в значительной степени специфический, случай аналогичной задачи для неподвижного гармонического поверхностного или заглубленного источника [2-6]. Данное обстоятельство позволяет для решения задач (1)-(8) использовать различные методы, разработанные для задач с неподвижным гармоническим источником [2,3,4].

Обозначим функцией  $G(\alpha_1)$  преобразование Фурье  $G(\alpha_1) = F_x[g(x)]$  функции  $g(x)$  по переменной  $(x)$ , где  $(\alpha_1)$  – параметр преобразования Фурье. Решение однородных задач (1)-(8), как и в случае с неподвижным источником, может быть представлено в виде интеграла Фурье [2-6]:

$$u_{jm}^{(n)}(\mathcal{L}y, \omega, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} K_{jm}^{(n)}(\alpha_1, y, (\omega - \alpha_1 v)) Q_m(\alpha_1) \exp(-i(\alpha_1 \mathcal{L}y)) d\alpha_1, \quad (9)$$

$$j, m, n = 1, 2.$$

Здесь для удобства обозначений у величины смещений  $u_{jm}^{(n)}$  введены три индекса: верхний индекс  $(n)$  соответствует номеру слоя, первый нижний индекс  $j=1$  соответствует горизонтальным смещениям  $u_1$ ,  $j=2$  – вертикальным смещениям  $u_2$ , второй нижний индекс  $m=1$  соответствует горизонтальным нагрузкам  $q_1$ ,  $m=2$  – вертикальным нагрузкам  $q_2$ . Матрица  $\mathbf{K}^{(n)}(\alpha_1, y, \omega) = F_x[k^{(n)}(x, y, \omega)]$  является образом Фурье матрицы Грина  $\mathbf{k}^{(n)}$  для внутренних неподвижных источников. Нагрузке  $q_m(\mathcal{X})$  в подвижной системе координат соответствует образ Фурье  $Q_m(\alpha_1) = F_{\mathcal{X}}[q_m(\mathcal{X})]$ . Контур  $\Gamma_1$  представляет собой контур в комплексной плоскости  $\{\alpha_1\}$ , отклоняющийся при обходе вещественных полюсов и точек ветвления матрицы  $\mathbf{K}$  в соответствии с принципом предельного поглощения [2,4,6].

Отметим, что в формуле (9), справедливой для подвижной системы координат, отличие от соответствующих представлений для неподвижных источников состоит в замене частоты  $\omega$  на выражение  $(\omega - \alpha_1 v)$  в символе матрицы Грина.

В зависимости от величины скорости дисперсионные кривые могут претерпевать значительные изменения, влияющие на вид контура  $\Gamma_1$ . При ненулевой скорости изотропная среда приобретает специфическую анизотропию, особенно выраженную при превышении скорости релеевской волны  $v_r \leq v$ . В зависимости от величины скорости может меняться тип уравнений (1) [3,4].

## Символ матрицы Грина для внутреннего источника

В данном пункте рассмотрим три варианта алгоритма построения символа матрицы Грина для внутреннего источника в виде жесткого включения в плоском случае: для двухслойного пакета, лежащего на жестком основании (6), двухслойного пакета с механически свободным основанием (7) и однослойного полупространства (8).

В первых двух вариантах среда представляет собой два изотропных слоя (полосы)  $\{-\infty \leq x \leq \infty, y_2 \leq y \leq y_1, y_3 \leq y \leq y_2\}$ , образуемых тремя прямыми  $y = y_1 = 0, y = y_2, y = y_3$ , где каждый слой имеет свои материальные константы - параметры Ламе  $\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}$  и плотность  $\rho^{(n)}$ . Гармонические колебания возбуждаются внутренними механическими нагрузками  $\mathbf{q}$ , заданными в плоскости  $y = y_2$ . Поведение упругой среды описывается символом матрицы Грина  $\mathbf{K}$ , состоящей из двух блоков  $\mathbf{K}^{(n)}$  размерности  $(2 \times 2)$ . Для каждого слоя  $(n)$  блок  $\mathbf{K}^{(n)}$  матрицы  $\mathbf{K}$  имеет вид

$$\mathbf{K}^{(n)}(z) = \mathbf{L}^{(n)}(z) \mathbf{t}^{(n)}, \quad y_{n+1} \leq y \leq y_n \quad n = 1, 2. \quad (10)$$

Матрица  $\mathbf{L}^{(n)}$  представляет собой верхнюю половину матрицы  $\mathbf{L}^{(n)}$ , составленной из собственных векторов  $\mathbf{h}_j^{(n)}$  и собственных значений  $\lambda_j^{(n)}$  для слоя с номером  $(n)$

$$\mathbf{L}^{(n)}(z) = \left\{ \mathbf{h}_1^{(n)} e^{\lambda_1^{(n)} z}, \mathbf{h}_2^{(n)} e^{\lambda_2^{(n)} z}, \mathbf{h}_3^{(n)} e^{\lambda_3^{(n)} z}, \mathbf{h}_4^{(n)} e^{\lambda_4^{(n)} z} \right\}.$$

Величины  $\mathbf{h}_j^{(n)}, \lambda_j^{(n)}$  находятся в общем случае из решения алгебраической собственной проблемы вида  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h} = 0$ . В изотропном случае решение собственной проблемы может быть получено явно, поэтому здесь приведем только вид решений  $\mathbf{h}_j^{(n)}, \lambda_j^{(n)}, j = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2$ ,

$$\lambda_1^{(n)} = \sigma_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)} = \sigma_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)} = -\sigma_1^{(n)}, \lambda_4^{(n)} = -\sigma_2^{(n)},$$

$$\sigma_1^{(n)} = \sqrt{\alpha^2 - (\kappa_1^{(n)})^2}, \sigma_2^{(n)} = \sqrt{\alpha^2 - (\kappa_2^{(n)})^2},$$

$$\begin{aligned} (\kappa_1^{(n)})^2 &= \frac{\rho^{(n)} \omega^2}{(\lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)})}, \quad (\kappa_2^{(n)})^2 = \frac{\rho^{(n)} \omega^2}{\mu^{(n)}}, \\ h_{1,1}^{(n)} &= -i\alpha_1, \quad h_{1,2}^{(n)} = \sigma_1^{(n)}, \quad h_{1,3}^{(n)} = -i\alpha_1 \sigma_1^{(n)}, \quad h_{1,4}^{(n)} = (\sigma_1^{(n)})^2, \\ h_{2,1}^{(n)} &= -i\alpha_1 \sigma_2^{(n)}, \quad h_{2,2}^{(n)} = \alpha_1^2, \quad h_{2,3}^{(n)} = -i\alpha_1 (\sigma_2^{(n)})^2, \quad h_{2,4}^{(n)} = \alpha_1^2 \sigma_2^{(n)}, \\ h_{4,1}^{(n)} &= -i\alpha_1, \quad h_{4,2}^{(n)} = -\sigma_1^{(n)}, \quad h_{4,3}^{(n)} = i\alpha_1 \sigma_1^{(n)}, \quad h_{4,4}^{(n)} = (\sigma_1^{(n)})^2, \\ h_{5,1}^{(n)} &= i\alpha_1 \sigma_2^{(n)}, \quad h_{5,2}^{(n)} = \alpha_1^2, \quad h_{5,3}^{(n)} = -i\alpha_1 (\sigma_2^{(n)})^2, \quad h_{5,4}^{(n)} = -\alpha_1^2 \sigma_2^{(n)}. \end{aligned}$$

Матрицы  $\mathbf{t}^{(n)}$ ,  $n=1,2$  находятся из решения линейных систем уравнений, описываемых ниже. Если  $\mathbf{t}^{(n)}$  известны, получаем вектор перемещений  $\mathbf{U}^{(n)} = F_x [\mathbf{u}^{(n)}]$  для слоя  $(n)$

$$\mathbf{U}^{(n)}(y) = \mathbf{K}^{(n)}(y)\mathbf{Q}, \quad y_{n+1} \leq y \leq y_n, \quad n=1,2.$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  соответствует скачку напряжений  $\mathbf{q}$  в области  $\Omega$  (3).

Для пакетов слоев линейные системы уравнений относительно матриц  $\mathbf{t}^{(n)}$  размерности  $(4 \times 2)$  имеют вид

$$\mathbf{C}_i \begin{pmatrix} \mathbf{t}^{(1)} \\ \mathbf{t}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i=1,2. \tag{11}$$

Для однослойного полупространства матрица  $\mathbf{t}^{(1)}$  имеет размерность  $(4 \times 2)$ ,  $\mathbf{t}^{(2)}$  имеет размерность  $(2 \times 2)$ . Соответствующее полупространству система уравнений

$$\mathbf{C}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{t}^{(1)} \\ \mathbf{t}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

В формулах (11), (12)  $\mathbf{I}, \mathbf{0}$  – единичная и нулевая матрицы размерности  $(2 \times 2)$ . В случае пакета слоев (матрицы  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ ) или однослойного полупространства (матрица  $\mathbf{C}_3$ ) матрицы систем уравнений имеют вид

$$C_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{(1)}(z_1) & \mathbf{0} \\ C^{(1)}(z_2) & -C^{(2)}(z_2) \\ \mathbf{0} & C^{(2)}(z_3) \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{(1)}(z_1) & \mathbf{0} \\ C^{(1)}(z_2) & -C^{(2)}(z_2) \\ \mathbf{0} & C^{(2)}(z_3) \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{(1)}(z_1) & \mathbf{0} \\ C^{(1)}(z_2) & -C^{(2,L)}(z_2) \end{pmatrix}.$$

Размерность матриц  $C_1, C_2$  ( $8 \times 8$ ), матрицы  $C_3$  – ( $6 \times 6$ ). Матрицы  $\mathcal{C}^{(i)}, \mathcal{C}^{(i)}$  имеют размерности ( $2 \times 4$ ) и представляют собой соответственно верхнюю и нижнюю половины матрицы  $C^{(i)}$ , матрица  $C^{(2,L)}$  есть левая половина матрицы  $C^{(2)}$ . Случаю пакета слоев, лежащему на жестком основании, соответствует матрица  $C_1$ , случаю механически свободного основания пакета – матрица  $C_2$ . Матрицы  $C^{(i)}(z_j)$  размерности ( $4 \times 4$ ) описываются следующими формулами

$$C^{(n)}(z_j) = R^{(n)} L^{(n)}(z_j),$$

$$R_{12}^{(n)} = -i\alpha_1 \lambda^{(n)}, R_{13}^{(n)} = \mu^{(n)}, R_{21}^{(n)} = -i\alpha_1 \mu^{(n)}, R_{24}^{(n)} = \lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)}, R_{31}^{(n)} = R_{42}^{(n)} = 1.$$

Размерность матрицы  $R^{(n)}$  ( $4 \times 4$ ), не указанные элементы равны нулю. Собственные значения  $\lambda_j^{(2)}$  и соответствующие собственные векторы  $h_j^{(2)}$  в случае полупространства упорядочены таким образом, что  $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}$  удовлетворяют условиям убывания (8) или излучения для полупространства  $z \leq 0$ , а  $\lambda_3^{(2)}, \lambda_4^{(2)}$  – для полупространства  $z \geq 0$  [2].

Решая системы уравнений (11), (12) с матрицами  $C_i$  для разных граничных условий, находим  $t^{(n)}$ , что завершает построение матриц  $K^{(n)}$  (10). В более общем виде алгоритмы построения блочных матриц приведены в [6].

### Метод прямого контурного интегрирования

Метод прямого контурного интегрирования, используемый в данной работе в качестве основного метода интегрирования, подробно описан в [5,6], здесь приведены только основные соотношения. Метод основывается

на использовании принципа предельного поглощения [2,4] и представляет собой алгоритм непосредственного вычисления контурного интеграла (9) в ближней зоне. При гармонических колебаниях вида  $\exp(-i\omega t)$ ,  $0 < \omega$ , метод предполагает введение в уравнения движений слагаемого  $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $0 < \varepsilon \ll \omega$ , соответствующего действию малого внутреннего трения, что эквивалентно введению комплексной частоты

$$\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i \frac{\varepsilon}{\rho} \omega. \quad (13)$$

Обозначая решение краевой задачи с комплексной частотой  $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ , результирующее решение  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  получим как равномерный предел

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}).$$

При введении комплексной частоты все вещественные полюса и точки ветвления символа матрицы Грина  $\mathbf{K}$  (10) смещаются с действительной оси в комплексную плоскость. Тогда интеграл по  $\Gamma_1$  в (9) может быть вычислен непосредственно вдоль вещественной контура  $\Gamma_R = [-\infty, +\infty]$  без деформирования контура в комплексную плоскость, т.к. в этом случае вещественная ось является корректным контуром интегрирования. Погрешность, возникающая при введении ненулевого  $\varepsilon$  (13) связана с возникновением мнимых частей действительных полюсов и смещением комплексных. Приведем для отдельной моды с ненулевой групповой скоростью  $c_g \neq 0$  приближенную оценку относительной погрешности  $\delta(r)$  для отдельной компоненты вектора смещений  $u_\varepsilon(r)$

$$\delta(r) = |1 - u_\varepsilon(r)/u(r)| \approx |\varepsilon r / c_g|, \quad r = \sqrt{x_0^2 + y^2}.$$

Кроме того, при численных расчетах ограниченность вещественного контура  $\Gamma_R = [-R, R]$  некоторой величиной  $R$  также вносит свою погрешность. Расчет интегралов (9) может осуществляться с помощью

специальных квадратур для сильно осциллирующих функций, например, реализованных в пакете NAG [7]. Ключевым моментом в реализации метода являются устойчивость и экономичность алгоритмов расчета символов матриц Грина, описанных выше. В случае однородного или многослойного полупространства применение метода прямого контурного интегрирования имеет важное преимущество перед традиционным подходом к расчету интегралов Фурье [2,3], поскольку избавляет от необходимости расчета интегралов вдоль разрезов в комплексной плоскости.

### Численные результаты

В данной работе исследовались среды с одинаковыми параметрами слоев и с условной внутренней границей, однако приведенные алгоритмы позволяют рассматривать среды с различными параметрами каждого слоя без каких-либо модификаций. В численных расчетах рассматривались следующие механические параметры слоев

$$\lambda^{(n)} = 2.38833 \times 10^7 \text{ Н/м}^2, \mu^{(n)} = 2.448 \times 10^7 \text{ Н/м}^2, \rho^{(n)} = 1.7 \cdot 10^3 \text{ Кг/м}^3, \quad (14)$$

$$n = 1, 2, y_1 = 0 \text{ м}, y_2 = -50 \text{ м}, y_3 = -100 \text{ м}.$$

Значениям параметров (14) соответствуют следующие скорости поперечной объемной волны  $v_s$ , продольной объемной волны  $v_p$ , релеевской волны  $v_r$  в полупространстве и характерной скорости  $v_0$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 120 \text{ м/с}, v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = 207 \text{ м/с}, v_r \approx 110.267 \text{ м/с}, v_0 = 100 \text{ м/с}, \quad (15)$$

на величину которой нормирована шкала скоростей на рисунках.

Далее параметры для расчетов и результаты расчетов приводятся в безразмерном виде. Приведем соответствующие величинам (14), (15) безразмерные значения

$$v_s = 1.2, v_p = 2.07, v_r \approx 1.10267, y_1 = 0, y_2 = -0.5, y_3 = -1,$$

$$\lambda^{(n)} = 2.38833, \mu^{(n)} = 2.448, \rho^{(n)} = 1.7, \omega = 2\pi f / f_0, f_0 = 1 \text{ Гц.}$$

Здесь  $\omega$  - безразмерная частота,  $f$  - частота в герцах,  $f_0$  - характерная частота в герцах.

В качестве вертикального или горизонтального заглубленного подвижного источника  $q_j$  (3), (5) рассматривались источники

$$q_j = q(\mathcal{R}y) \Big|_{y=y_2} = -1, \quad j = 1, 2, \quad L_x = 0.1$$

Приведенные далее на рисунках 1-3 функции  $\mathcal{U}_j^{(n)}$  нормированных горизонтальных и вертикальных смещений в логарифмическом масштабе

$$\mathcal{U}_j^{(n)}(\omega, \nu) = \lg \left| u_{ij}^{(n)}(\mathcal{R}y, \omega, \nu) / u_{ij}^{(n)}(\mathcal{R}y, 0, 0) \right|_{\mathcal{R} \neq 0, y=y_2}, \quad i, j = 1, 2, \quad (16)$$

рассчитаны по формулам (9). Данные величины представляют собой приближенные значения АЧСХ для упругой среды и жесткого штампа, движущегося со скоростью  $\nu$  вдоль прямой  $Ox$  на глубине  $y = y_2$  и совершающего колебания с частотой  $\omega$ . Как уже отмечалось во введении, при малых размерах источника можно получить хорошее приближение АЧСХ, решая однородную краевую задачу (3), (5). Таким же путем наиболее точное решение будет соответствовать сосредоточенному источнику, но такой подход несколько увеличивает число требуемых операций. Интегралы (9) рассчитывались методом прямого контурного интегрирования при введении комплексной частоты (13) с параметром  $\varepsilon = 10^{-3}$  по ограниченному вещественному контуру. В расчетах использовались программы вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций пакета NAG [7].

Перейдем к сравнительному анализу функций  $\mathcal{U}_j^{(n)}(\omega, \nu)$  (16), представленных на рисунках 1-3 для различных типов граничных условий (6)-(8). В правой колонке всех рисунков изображены поверхности  $\mathcal{U}_j^{(n)}(\omega, \nu)$ , в левой колонке те же поверхности представлены в виде линий уровня

вместе с соответствующими шкалами десятичных порядков. Везде первая строка, обозначенная буквой а), соответствует  $\mathcal{V}_1$  (горизонтальные смещения от горизонтального источника  $q_1$ ), вторая строка, обозначенная буквой b), соответствует  $\mathcal{V}_2$  (горизонтальные смещения от вертикального источника  $q_2$ ), третья строка, обозначенная буквой с), -  $\mathcal{V}_2$  (вертикальные смещения от вертикального источника  $q_2$ ).

Рисунок 1 представляет величины  $\mathcal{V}_i$  для полупространства. Вид  $\mathcal{V}_1$  для полупространства оказывается наиболее простым. Глобальный максимум, теоретически неограниченный при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и увеличении интервала интегрирования  $\Gamma_R = [-R, R]$  до бесконечности при  $R \rightarrow \infty$ , во всех трех случаях соответствует релеевской скорости  $v = v_r$  при нулевой частоте  $\omega = 0$ . Из точки  $(0, v_r)$  выходят две прямые, образующие угол, биссектриса которого практически параллельно оси  $O\omega$ . Наиболее плавно изменяется величина  $\mathcal{V}_1$ , для нее глобальный минимум соответствует точке  $(0, v_s)$  - скорости поперечных волн  $v_s$  при нулевой частоте. Величина  $\mathcal{V}_2$  имеет обширную область малых значений  $\{0 \leq \omega \leq 2, v \approx 1.65\}$ , содержащую в себе глобальный минимум. Локальные минимумы  $\mathcal{V}_2$  расположены вдоль одного из «лучей», исходящих из точки  $(0, v_r)$ , в диапазоне  $\{2.5 \leq \omega \leq 4.5\}$ , а так же в двух точках:  $(0, 1.4)$ ,  $(0, 1.8)$ . Диапазон значений  $\mathcal{V}_i$  для полупространства – от 3.5 до 4.5 десятичных порядков. Хотя при увеличении скорости в диапазоне  $v_s < v \leq v_p$  величина  $\mathcal{V}_i(\omega, v)$  уменьшается почти монотонно с ростом скорости и частоты, глобальные минимумы, тем не менее, в случае полупространства расположены вне области  $\{0 \leq \omega \leq 5, 2 \leq v \leq v_p\}$ . В этом состоит существенное отличие случая полупространства от описываемых далее характеристик слоев.

На рисунке 2, соответствующем слою на жестком основании, качественный вид всех  $\mathcal{A}_0^j$  весьма сходен. Однако, если для  $\mathcal{A}_{12}^j, \mathcal{A}_{22}^j$  характерно наличие кривой максимумов, соединяющей точки  $(0, v_r)$  и  $(\omega_2, 0)$  ( $\omega_2 \approx 3.23$  соответствует частоте первого двукратного полюса для

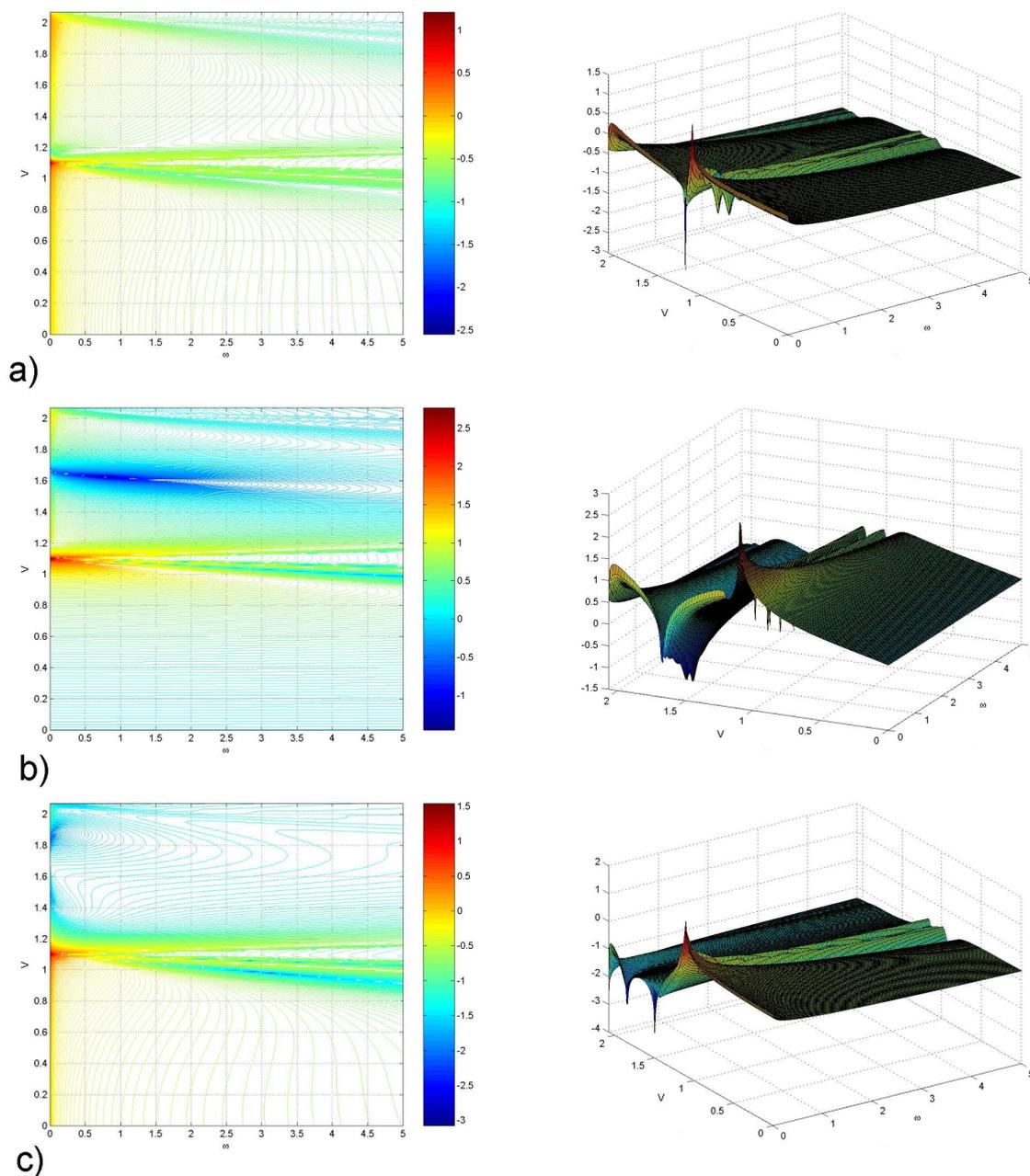


Рисунок 1. Вид амплитудно-частотных и амплитудно-скоростных характеристик  $\mathcal{A}_0^j(\omega, v)$  для полупространства:

a)  $\mathcal{W}_1(\omega, \nu)$  – горизонтальные смещения от горизонтального источника  $q_1$ ,

b)  $\mathcal{W}_2(\omega, \nu)$  – горизонтальные смещения от вертикального источника  $q_2$ ,

c)  $\mathcal{W}_{22}(\omega, \nu)$  – вертикальные смещения от вертикального источника  $q_2$ .

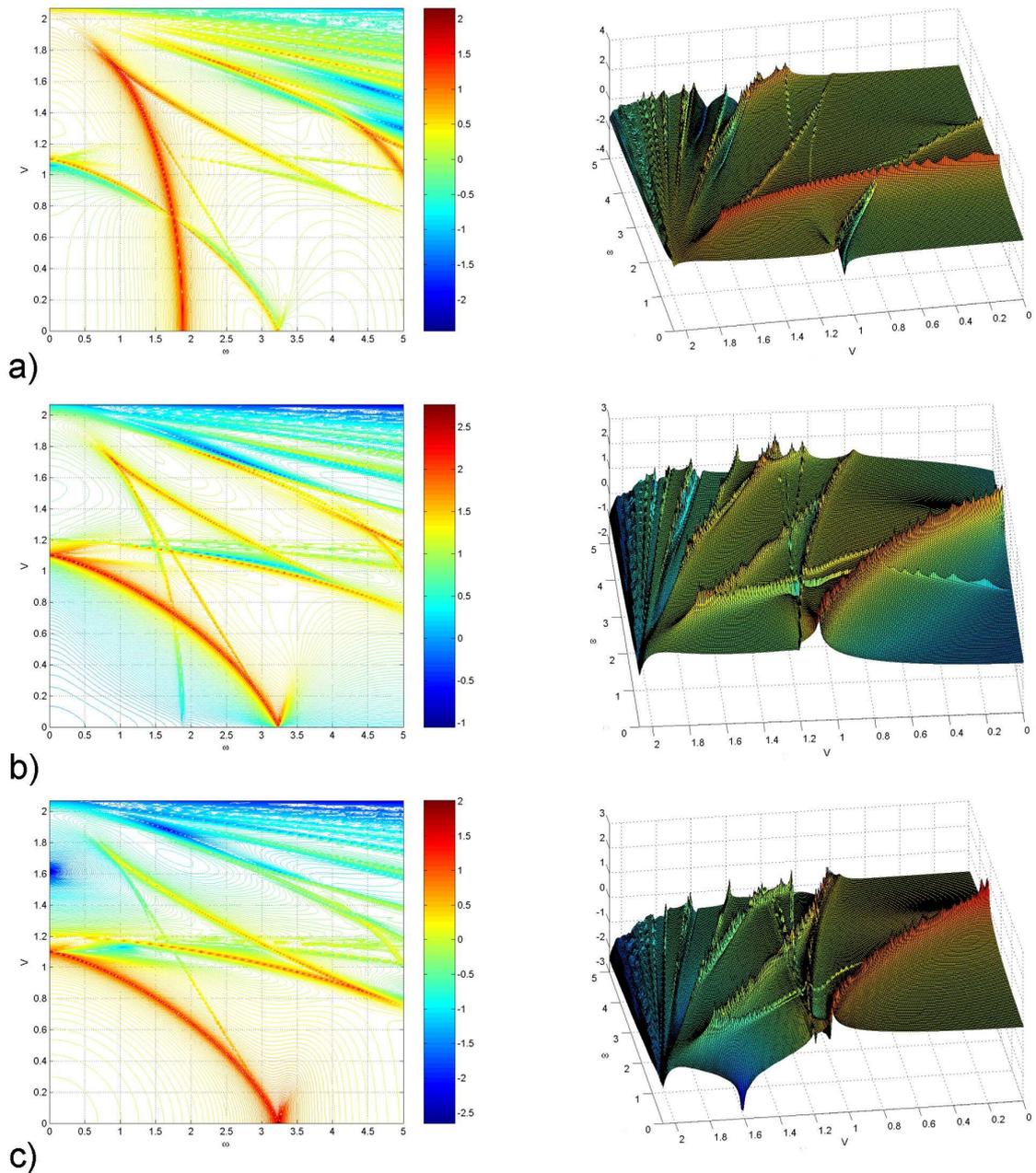


Рисунок 2. Вид амплитудно-частотных и амплитудно-скоростных характеристик  $\mathcal{W}_g(\omega, \nu)$  для слоя на жестком основании:

a)  $\mathcal{H}_1(\omega, \nu)$  – горизонтальные смещения от горизонтального источника  $q_1$ ,

b)  $\mathcal{H}_2(\omega, \nu)$  – горизонтальные смещения от вертикального источника  $q_2$ ,

c)  $\mathcal{H}_{22}(\omega, \nu)$  – вертикальные смещения от вертикального источника  $q_2$ .

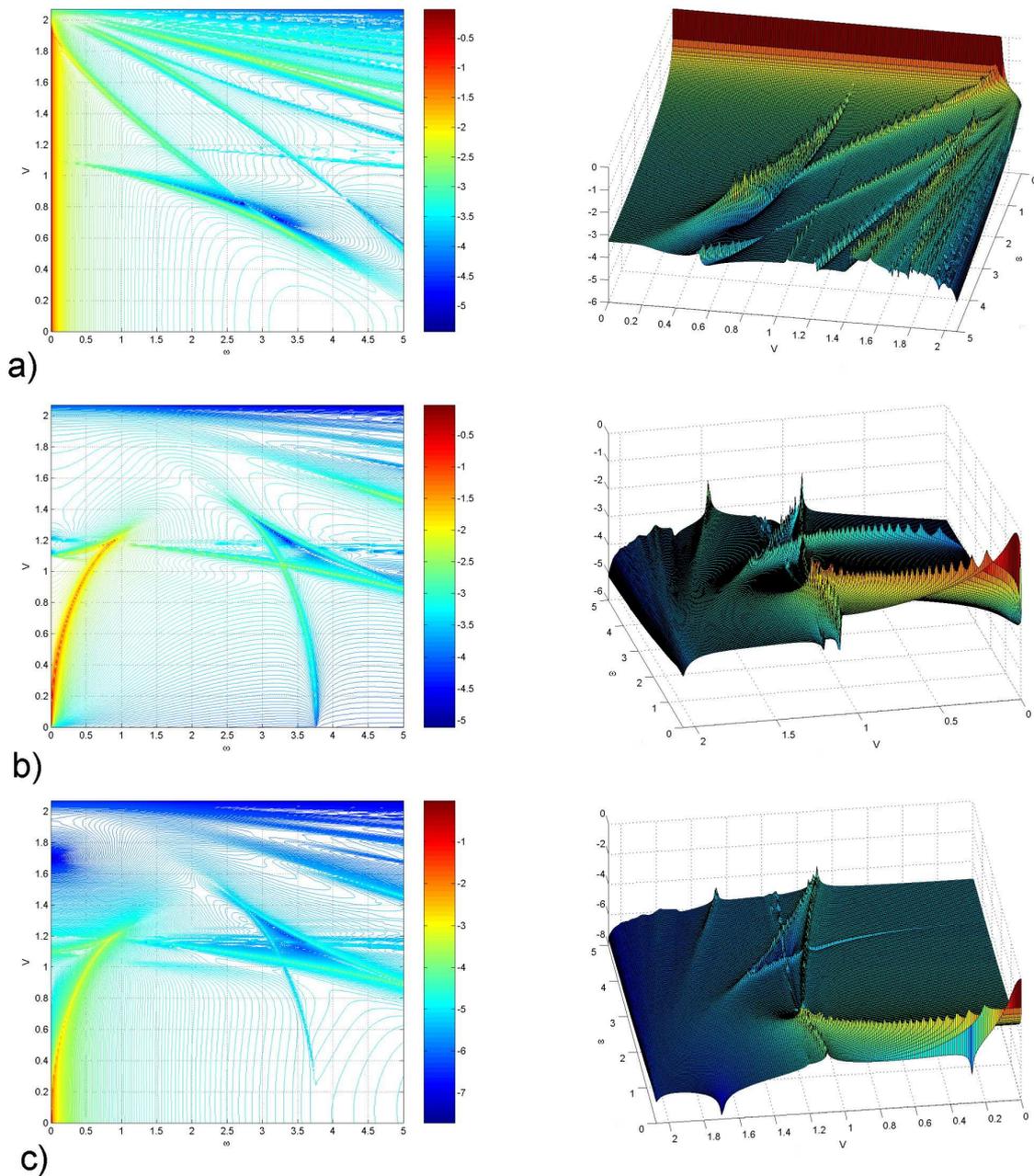


Рисунок 3. Вид амплитудно-частотных и амплитудно-скоростных характеристик  $\mathcal{H}_{ij}(\omega, \nu)$  для слоя с механически свободным основанием:

- a)  $\mathcal{W}_1(\omega, \nu)$  – горизонтальные смещения от горизонтального источника  $q_1$ ,
- b)  $\mathcal{W}_2(\omega, \nu)$  – горизонтальные смещения от вертикального источника  $q_2$ ,
- c)  $\mathcal{W}_2(\omega, \nu)$  – вертикальные смещения от вертикального источника  $q_2$ .

слоя на жестком основании), при этом глобальный максимум, также теоретически неограниченный, определяется релеевской скоростью и нулевой частотой  $(0, \nu_r)$ , то для  $\mathcal{W}_1$  максимальные значения находятся на кривой, соединяющей точки  $(0, \nu_p)$  и  $(\omega_1, 0)$  ( $\omega_1 \approx 1.9$  соответствует частоте первого полюса для слоя на жестком основании). Кроме того,  $\mathcal{W}_2$  имеет локальный минимум с центром в точке  $(0, 1.6)$ . Диапазон значений  $\mathcal{W}_y$  – около 4.5 десятичных порядков.

На рисунке 3, соответствующем слою с механически свободным основанием, очевидное качественное сходство имеют функции  $\mathcal{W}_2$  и  $\mathcal{W}_2$ . Глобальный максимум  $\mathcal{W}_2(\omega, \nu)$ ,  $\mathcal{W}_2(\omega, \nu)$ , теоретически бесконечный, соответствует нулевой частоте и скорости. Однако из-за конечности области интегрирования этот максимум ограничен. В данном случае диапазон  $\mathcal{W}_2$ ,  $\mathcal{W}_2$  составляет 8 десятичных порядков. Наиболее выраженная кривая максимумов соединяет точки  $(0, 0)$  и  $(1, \nu_s)$ . Вторая по среднему уровню значений кривая максимумов соединяет точки  $(\omega_1, 0)$  и  $(2.5, 1.45)$ , где  $\omega_1 \approx 3.77$  - частота первого ненулевого полюса для слоя со свободным основанием. Кривые максимумов, берущие свое начало в точках  $(0, \nu_r)$  и  $(0, \nu_s)$  выражены слабо. Для функции  $\mathcal{W}_2$  существует обширная область минимумов  $\{0 \leq \omega \leq 0.25, 1.6 \leq \nu \leq 1.8\}$ . Особенностью функции  $\mathcal{W}_1$  является наличие кривой максимумов, совпадающей с отрезком  $[(0, 0), (0, \nu_p)]$ , на котором значения  $\mathcal{W}_1(0, \nu)$  теоретически

должны быть неограниченны. По причинам, указанным выше, расчетные значения  $\mathcal{W}_1(0, \nu)$  конечны. Помимо указанного отрезка выраженной является кривая максимумов, исходящая из точки  $(0, \nu_r)$ . Диапазон значений  $\mathcal{W}_2$  – 5.5 десятичных порядков.

В случае слоя со свободным основанием так же, как и в случае слоя на жестком основании, минимальные значения всех  $\mathcal{W}_j$ , сосредоточены в области  $\{0 \leq \omega \leq 5, 2 \leq \nu \leq \nu_p\}$ , глобальный минимум соответствует скорости продольной волны и максимальной частоте  $(5, \nu_p)$ .

В целом, сравнивая все рисунки, необходимо отметить первостепенное влияние на характеристики  $\mathcal{W}_j$  типа граничных условий (6)-(8) и в значительной степени – вида источника  $q_j$ .

В рассмотренной задаче о расчете АЧСХ двухслойного упругого тела метод прямого контурного интегрирования показал высокую эффективность. Контрольные расчеты по методу интегрирования вычетов [6] продемонстрировали, что различия не превышают средних погрешностей каждого из методов, при этом метод прямого контурного интегрирования значительно проще в реализации.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края 16-48-230336 р\_а, программ Президиума Южного научного центра Российской академии наук.

### Литература

1. Pflanz G., Garcia J., Schmid G. Vibrations due to loads moving with sub-critical and super-critical velocities on rigid track // Moving Load – Wave Propagation –Vibration Reduction: Proc. Intern. Workshop WAVE2000. Rotterdam: Balkema, 2000. pp. 131-148.
2. Бабешко В.А., Зинченко Ж.Ф., Глушков Е.В. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
3. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 240 с.

4. Белоконь А.В., Наседкин А.В. Взаимодействие движущихся штампов с упругими и вязкоупругими телами // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. 672 с.

5. Сыромятников П.В. Моделирование возмущений поверхности упругой полуграниченной среды, вызываемых подвижным осциллирующим источником // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 4. С. 82–91.

6. Сыромятников П. В. Динамика сложных многослойных гетерогенных сред: Дисс. ... док. физ.-мат. наук. Краснодар, 2017, 292 с.

7. D01AKF Subroutine. NAG Fortran Library.  
<http://www.nag.co.uk/numeric/FL/FLdescription.asp>.

### Referenses

1. Pflanz G., Garcia J., Schmid G. Vibrations due to loads moving with sub-critical and super-critical velocities on rigid track // Moving Load - Wave Propagation –Vibration Reduction: Proc. Intern. Workshop WAVE2000. Rotterdam: Balkema, 2000. pp. 131-148.

2. Babeshko V.A., Zinchenko Zh.F., Glushkov E.V. Dinamika neodnorodnyh linejno-uprugih sred. M.: Nauka, 1989. 344 с.

3. Kalinchuk V.V., Beljankova T.I. Dinamika poverhnosti neodnorodnyh sred. M.: Fizmatlit, 2009. 240 с.

4. Belokon' A.V., Nasedkin A.V. Vzaimodejstvie dvizhushhihsja shtampov s uprugimi i vjazkouprugimi telami // Mehanika kontaktnyh vzaimodejstvij. M.: Fizmatlit, 2001. 672 s.

5. Syromyatnikov P.V. Modelirovanie vozmushhenij poverhnosti uprugoj poluogranichennoj sredy, vzyvaemyh podvizhnym oscillirujushhim istochnikom // Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva. 2016. № 4. S. 82–91.

6. Syromyatnikov P. V. Dinamika slozhnyh mnogoslujnyh geterogennyh sred: Diss. ... dok. fiz.-mat. nauk. Krasnodar, 2017, 292 s.

7. D01AKF Subroutine. NAG Fortran Library.  
<http://www.nag.co.uk/numeric/FL/FLdescription.asp>.