

УДК 537.2

UDC 537.2

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАЗМЕННОГО КАНАЛА И СЛЕДА ПРИ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКА ПЛАЗМЫ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ****SIMULATION OF A PLASMA CHANNEL AND TRACK IN MOTION OF PLASMA SOURCE IN CONDUCTIVE ENVIRONMENT**

Трунев Александр Петрович

Alexander Trunev

к.ф.-м.н., Ph.D.

Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.

*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада**Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada*

Развита модель, описывающая формирование плазменного канала и следа при движении в проводящей среде различных объектов, являющихся источниками плазмы – шаровых молний, плазмоидов, заряженных частиц и т.п. Для описания вклада токов проводимости мы модифицировали стандартное уравнение электростатики с учетом вихревой составляющей электрического поля. В результате такого обобщения сформулирована система нелинейных уравнений параболического типа, описывающая формирование плазменного канала и следа за движущимся объектом. В этой постановке решена задача о формировании канала молнии в слабых электрических полях, характерных для атмосферных разрядов облако-земля. Численное моделирование движения источников плазмы в области с отношением размеров 1/100, 1/200 позволяет найти форму канала и общую длину следа, а также режимы ветвления. Ранее было установлено, что существует три механизма ветвления стримера. Первый механизм связан с неустойчивостью фронта, что приводит к разделению головки стримера на две части. Второй механизм связан с неустойчивостью стримера в области основания, что приводит к ветвлению стримера с образованием большого числа боковых стримеров, замыкающих основной канал стримера на катод. Третий механизм ветвления, наблюдавшийся в опытах, связанный с замыканием объемного заряда на анод через систему стримеров. Указанные механизмы ветвления выявляются и при распространении лидера. В численных экспериментах обнаружен новый механизм ветвления канала и следа за движущимся плазменным объектом, обусловленный проводимостью среды

A model is developed that describes the formation of the plasma channel and the trace when moving in a conducting medium of various objects that are sources of plasma - ball lightning, plasmoids, charged particles, and so on. To describe the contribution of conduction currents, we modified the standard electrostatic equation considering the vortex component of the electric field. As a result of this generalization, a system of parabolic-type nonlinear equations is formulated that describes the formation of the plasma channel and the track behind the moving object. In this formulation, the problem of the formation of the lightning channel in weak electric fields, characteristic for atmospheric discharges of cloud-earth, is solved. Numerical simulation of the motion of plasma sources in a region with a ratio of the sizes 1/100, 1/200 makes it possible to find the shape of the channel and the total length of the track, as well as the branching regimes. It was previously established that there are three streamer branching mechanisms. The first mechanism is associated with the instability of the front, which leads to the separation of the head of the streamer into two parts. The second mechanism is related to the instability of the streamer in the base region, which leads to the branching of the streamer with the formation of a large number of lateral streamers closing the main channel of the streamer to the cathode. The third branching mechanism, observed in experiments, is associated with the closure of the space charge to the anode through the streamer system. These branching mechanisms are also revealed when the leader is spread. Numerical experiments have revealed a new channel branching mechanism and a trace behind a moving plasma object, caused by the conductivity of the medium

Ключевые слова: СТРИМЕР, РАЗРЯД, ВЕТВЛЕНИЕ, ИОНИЗАЦИЯ, ПЛАЗМА, КАНАЛ МОЛНИИ, ПЛАЗМОИД, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Keywords: STRIMER, DISCHARGE, BRINK, IONIZATION, PLASMA, LIGHTNING CHANNEL, PLASMOID, MATHEMATICAL MODELING

Doi: 10.21515/1990-4665-132-129

<http://ej.kubagro.ru/2017/08/pdf/129.pdf>

## Введение

Атмосферный разряд молнии типа облако-земля и облако-облако реализуется при максимальной напряженности электрического поля 2-3 кВ/см [1-2], что на один-два порядка меньше, чем стандартное напряжение коронного разряда в азоте при нормальных условиях – 20-200 кВ/см, необходимое для возникновения и ветвления стримеров [3-14] и на порядок меньше порогового поля пробоя в воздухе – 23 кВ/см. Это различие можно объяснить сложным составом облаков – наличием заряженных капель и кристаллов льда, с которых собирается заряд молнии. Предполагается, что воздух может быть предварительно ионизован широкими атмосферными ливнями под влиянием космических лучей [14]. Другое объяснение заключается в том, что в электрическом поле свыше 2.16 кВ/см возникает пробой на убегающих электронах [13].

Отметим, что развитие атмосферного разряда молнии облако-земля с образованием ступенчатого лидера исследовалось в работах [15-22] и других. Механизм и модель этого явления обсуждаются в [22]. Из общих соображений ясно, что стример [3-12] и лидер [15-22] должны описываться однотипной моделью вытекающей из уравнений Максвелла. В работах [11-12, 22-23] рассматривается общая модель шаровой молнии, плазмоида, стримера и ступенчатого лидера с учетом индуцированных вихревых полей, обусловленных токами проводимости. Плазмод в модели [22] рассматривается как долгоживущий стример, а шаровая молния как разновидность плазмоида [23]. В численных расчетах было установлено три механизма ветвления стримера, один из которых связан с разделением головки стримера на две части, второй механизм связан с замыканием основного канала стримера на катод через систему боковых стримеров,

третий механизм связан с ветвлением основания плазмоида и с замыканием боковых стримеров на анод.

В работе [22] численно исследована задача о формировании ступенчатого лидера молнии. Моделирование распространения волн ионизации в области с отношением размеров  $1/100$ ,  $1/200$  позволяет выявить два типа ступенчатых лидеров в форме волн уплотнения и разрежения соответственно.

В настоящей работе рассматривается сценарий возникновения лидера молнии при условии, что головка лидера представляет собой источник плазмы, например, шаровую молнию или заряженную частицу. Численно решена задача о формировании канала молнии в слабых электрических полях, характерных для атмосферных разрядов облако-земля. Моделирование движения источников плазмы в области с отношением размеров  $1/100$ ,  $1/1000$  позволяет найти форму канала и общую длину следа, а также режимы ветвления. В численных экспериментах обнаружен новый механизм ветвления канала и следа за движущимся плазменным объектом, обусловленный проводимостью среды.

### **Модели стримера, плазмоида и ступенчатого лидера**

Стримеры относятся к числу макроскопических наблюдаемых явлений, которые могут быть зарегистрированы в экспериментах с газовыми разрядами, включая атмосферные разряды [1-23]. Обычно наблюдаются стримеры, вызванные распространением электронов в нейтральной среде, которая подвержена ионизации. Типичные физические процессы, описываемые в моделях стримеров – это ионизация, диффузия и движение зарядов в электрическом поле.

Предполагается, что высоковольтный разряд относится к электростатическим явлениям, следовательно, генерируемые электрические поля являются потенциальными. В тоже время сам разряд является быстропротекающим процессом, что указывает на наличие вихревых полей. Рассмотрим распространение стримера в газовой среде в электрическом поле. Используем стандартную модель стримера в газовых разрядах [3-7], которую модифицируем с учетом процессов диффузии электрического поля и ионов, имеем [11-12, 22-23]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= D_e \nabla^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} &= D_i \nabla^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= D_E (\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено  $\rho_e, \rho_i, \mathbf{E}$  – плотность электронов, ионов и электрического поля соответственно,  $D_e, D_i, D_E$  – коэффициенты диффузии,  $k_i$  – параметр подвижности ионов. В качестве параметра длины в модели (1) используется длина свободного пробега электронов в азоте при нормальных условиях –  $L_s \approx 2.3 \cdot 10^{-6} m$  (2.3 мкм). Масштаб времени составляет 3 пикосекунды, масштаб электрического поля –  $E_s = 200 kV / cm$ , характерный масштаб скорости  $u_s = 0.76667 \cdot 10^3$  км/с [3].

Поясним происхождение третьего уравнения (3). Выражение в скобках в случае электростатического поля тождественно обращается в ноль. Однако при наличии вихревой составляющей поля в случае длинных волн, из уравнений Максвелла и закона Ома  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \mathbf{A} / \partial t$  следует уравнение диффузии векторного потенциала

$$\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2)$$

Сравнивая (2) с третьим уравнением (1), находим  $D_E = 1 / \sigma\mu$ .

Модель (1) тестировалась на плоских и трехмерных задачах моделирования стримеров Саффмана-Тейлора в однородном электрическом поле [11-12].

Задача для системы (1) решалась численно, в прямоугольной области  $-L_x \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq L_y, -L_z \leq z \leq L_z$ , с нулевыми начальными данными и с граничными условиями:

$$\begin{aligned} E_x(t, -L_x, y, z) = E_x(t, L_x, y, z) = E_0(1 - e^{-at}), E_y(t, -L_x, y, z) = E_y(t, L_x, y, z) = 0, \\ E_z(t, -L_x, y, z) = E_z(t, L_x, y, z) = 0, E_x(t, x, -L_y, z) = E_x(t, x, L_y, z) = E_0(1 - e^{-at}), \\ E_y(t, x, -L_y, z) = E_y(t, x, L_y, z) = 0, E_z(t, x, -L_y, z) = E_z(t, x, L_y, z) = 0, \\ E_x(t, x, y, -L_z) = E_x(t, x, y, L_z) = E_0, E_y(t, x, y, -L_z) = E_y(t, x, y, L_z) = 0, \\ E_z(t, x, y, -L_z) = E_z(t, x, y, L_z) = 0, \rho_e(t, -L_x, y, z) = \rho_i(t, -L_x, y, z) = 0, \\ \rho_e(t, L_x, y, z) = \rho_i(t, L_x, y, z) = S \exp[-b(y^2 + z^2)](1 - e^{-at}), \\ \rho_e(t, x, \pm L_y, z) = \rho_i(t, x, \pm L_y, z) = 0, \rho_e(t, x, y, \pm L_z) = \rho_i(t, x, y, \pm L_z) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

В случае решения плоской задачи полагаем в условиях (3)  $z = 0, E_z = 0$  и исключаем граничные условия при  $z = \pm L_z$ .

Основные результаты расчетов электронной плотности по модели (1), (3) были получены при следующих параметрах задачи:

$$\begin{aligned} a = 1, D_e = 0.1, D_i = 0.001, D_E = 1000, k_i = 0, L_y = L_z = 100, \\ E_0 = 0.1 \div 0.5, S = 10^{-4} \div 10^{-3}, b = 0.015 \div 0.15, L_x = 10^2 \div 10^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Из полученных результатов [11-12] следует, что распределение плотности электронов в 2D и 3D моделях отличается несущественно, что объясняется специфической геометрией стримера Саффмана-Тейлора.

Линия раздела плотности в теории [24] описывается уравнением:

$$\frac{x + ut}{L_y} = \frac{1 - \lambda}{\pi} \ln \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi y}{\lambda L_y} \right) \quad (5)$$

Как было установлено в экспериментах [24], параметр  $\lambda = 1/2$ , хотя в теории стримеров этот параметр может принимать любое значение в зависимости от скорости  $u = E_0 / \lambda$  [7, 11-12].

Рассмотрим аналитическую модель распространения стримера в заданном внешнем поле. Положим в уравнениях (1) все величины зависящими от переменных  $\xi = x + ut, y, z$ , тогда система (1) приводится к виду

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi} &= D_e \nabla^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi} &= D_i \nabla^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \rho_i |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} &= D_E (\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь оператор  $\nabla = (\partial/\partial \xi, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ . Стример Саффмана-Тейлора — это плоское линейное решение первого уравнения (6). Полагая в этом уравнении электрическое поле постоянным  $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$ , ищем решение в виде

$$\rho_e = \rho_0 \exp(k_x \xi) \cos(k_y y) \quad (7)$$

Подставляя (7) в первое уравнение (6), находим дисперсионное соотношение

$$k_x u = D_e (k_y^2 + k_x^2) + k_x E_0 + |E_0| \exp(-1/|E_0|) \quad (8)$$

Предполагая, что линия раздела электронной плотности определяется из уравнения  $\rho_e = \rho_0$ , находим из первого уравнения путем логарифмирования уравнение линии раздела плотности

$$x + ut = -\frac{\ln \cos(k_y y)}{k_x} \quad (9)$$

Из уравнения (8) следует, что скорость стримера зависит от параметра диффузии и от скорости ионизации. Ранее аналогичные результаты были получены в работе [7], в которой модель стримера Саффмана-Тейлора [24] была использована для нахождения режимов движения с постоянной скоростью и ветвления в 2D. В работе [11] аналогичная задача была решена в трехмерном случае.

Рассмотрим стример как бегущую с постоянной скоростью волну. Положим в уравнениях (1) все величины зависящими от переменных  $\xi = x + ut, y, z$ , тогда справедлива система уравнений (6). Для решения системы уравнений (6) используем теорию пограничного слоя. Будем считать, что изменение параметров по сечению стримера значительно превосходит изменение параметров вдоль направления его распространения. Это условие заведомо не выполняется на головке стримера. В остальной же области для описания стримера имеем систему уравнений параболического типа

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi} &= D_e \nabla_{\perp}^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi} &= D_i \nabla_{\perp}^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-1/|\mathbf{E}|) \\ u \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} &= D_E (\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь операторы  $\nabla = (\partial/\partial \xi, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ ,  $\nabla_{\perp}^2 = (\partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2)$ . В рамках модели (10) может быть поставлена и решена задача о ветвлении стримера в трехмерном случае. Для этого предположим, что в плоскости  $z = 0$  в интервале  $0 \leq \xi \leq \xi_b$  задано распределение плотности электронов вида (7), а в плоскости  $\xi = 0$  задано совместное с ним распределение, имеем

$$\begin{aligned} \xi = 0 : \rho_e &= \rho_0 \cos(k_z z) \cos(k_y y), \quad |k_y y| \leq \pi/2, \quad |k_z z| \leq \pi/2 \\ z = 0 : \rho_e &= \rho_0 \exp(k_x \xi) \cos(k_y y), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_b, \quad |k_y y| \leq \pi/2 \end{aligned} \quad (11)$$

Во всей остальной области и на границах используем нулевые начальные данные. Тогда в области  $\xi > \xi_b$  имеем отрыв стримера от плоскости  $z = 0$ , что соответствует ветвлению, поскольку плоскость  $z = 0$  является плоскостью симметрии.

Отметим, что волновые числа, коэффициент диффузии электронов, напряженность электрического поля и скорость стримера связаны уравнение (8). Разрешая уравнение (8), находим продольный масштаб стримера в зависимости от параметров модели в виде

$$L_b = \frac{1}{k_x} = \frac{u - E_0}{D_e (k_y^2 + k_x^2) + |E_0| \exp(-1/|E_0|)} \quad (12)$$

Из уравнения (12) следует, что при уменьшении скорости точка ветвления смещается к началу координат. Тот же эффект наблюдается при увеличении коэффициента диффузии или напряженности электрического поля.

Интересной особенностью данной постановки задачи является то, что рассматривается ветвление трехмерного стримера, а не плоского стримера или, что важно, не коническое раскрытие стримера. В [11-12] была рассмотрена задача о ветвлении стримера в рамках нестационарной модели (1). Размер ветвей и положение точки ветвления зависит в этом случае от времени, тогда как в модели (10), положение точки ветвления фиксировано в подвижных координатах.

Таким образом, в численных расчетах мы установили два механизма ветвления стримера, один из которых связан с разделением головки стримера на две части, а второй механизм связан с замыканием основного канала

стримера на катод через систему боковых стримеров. Оба механизма ветвления наблюдаются в природе при разряде молнии [1-23].

В работе [25] обнаружен третий механизм ветвления, при котором основание плазмоида замыкается на анод через систему боковых стримеров. Этот механизм получил объяснение в [12]. Мы предполагаем, что плазмоид типа [25-26] - это разновидность стримера, возникающего в проводящей среде при электрическом разряде над водной поверхностью. Для его моделирования на основе системы уравнений (1) необходимо определить область параметров, в которой плазмоид может сформироваться. Прежде всего, это большое время формирования плазмоида, по сравнению с характерным временем модели (1) – 3 пикосекунды. Рассмотрим начальную стадию формирования плазмоида, в которой наблюдается ветвление плазмоида в катодной области с образованием многочисленных стримеров. Длительность этой стадии составляет 17-33 мс [25], следовательно, в этом случае характерное время задачи  $t_0 \approx 10^{10}$ , а масштаб области моделирования составляет  $L_x = L_y = L_z \approx 5 \cdot 10^3$ .

Согласно данным [26], плазмоид достигает размера в диаметре 20 см через 150 мс, после чего начинается автономная стадия. Следовательно, характерное время задачи  $t_p \approx 0.5 \cdot 10^{11}$ . Сравнивая диаметр плазмоида 10-20 см с характерной длиной пробега электронов в азоте при атмосферном давлении - 2.3 мкм, находим, что масштаб области моделирования  $L_x = L_y = L_z \approx 5 \cdot 10^4$ . Скорость стримера типа плазмоида относительно мала в сравнении с характерной скоростью распространения стримера  $u_s = 0.76667 \cdot 10^3$  км/с.

Действительно, полагая  $u_p \approx 2L_x / t_p$ , находим, что скорость плазмоида составляет около  $2 \cdot 10^{-6} u_s \approx 1.54$  м/с. Отметим, что в экспериментах [24-25] скорость плазмоида в момент отрыва составляла 1.5-2 м/с.

Сделаем замену переменных

$$t = \lambda^2 t', (x, y, z) = \lambda(x', y', z'), \mathbf{E}' = \lambda \mathbf{E}, \rho'_e = \lambda^2 \rho_e, \rho'_i = \lambda^2 \rho_i \quad (13)$$

Опуская штрихи, приведем систему уравнений (1) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= D_e \nabla^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + \lambda \rho_e |\mathbf{E}| \exp(-\lambda / |\mathbf{E}|) \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} &= D_i \nabla^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + \lambda \rho_i |\mathbf{E}| \exp(-\lambda / |\mathbf{E}|) \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= D_E (\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно, изменение масштаба области формирования стримера не меняет вида системы уравнений (1) с точностью до слагаемого, описывающего скорость ионизации. Отметим, что для данных приведенных в [22-23] вклад объемной ионизации сравнительно мал, а процесс формирования стримера обусловлен наличием нейтральной плазмы на катоде. В случае плазмоида при расширении с параметрами  $E_0 \leq 1, \lambda \gg 1$  вклад объемной ионизации микроскопически мал, поэтому им можно пренебречь.

Из выражений (13) следует, что напряженность поля и плотность электронов в области плазмоида меньше таковой для стримера в  $\lambda, \lambda^2$  соответственно. Так, для  $\lambda = 500$  характерная напряженность электрического поля составит в заданном масштабе электрического поля  $E_s / \lambda = 400 \text{ V / cm}$ . С другой стороны, по данным [25-26] находим типичное значение напряженности поля – 300-350 В/см.

Вольтамперная характеристика разряда над поверхностью электролита (воды) с образованием плазмоида приведена в [25-26]. Используя эти данные, сформулируем задачу для системы уравнений (14), имеем

$$\begin{aligned}
 E_x(t, \pm Lx, y, z) &= F_x(t, \pm Lx, y, z); E_y(t, \pm Lx, y, z) = F_y(t, \pm Lx, y, z); \\
 E_z(t, \pm Lx, y, z) &= F_z(t, \pm Lx, y, z); E_x(t, x, \pm Ly, z) = F_x(t, x, \pm Ly, z); \\
 E_y(t, x, \pm Ly, z) &= F_y(t, x, \pm Ly, z); E_z(t, x, \pm Ly, z) = F_z(t, x, \pm Ly, z); \\
 E_x(t, x, y, \pm Lz) &= F_x(t, x, y, \pm Lz), E_y(t, x, y, \pm Lz) = F_y(t, x, y, \pm Lz); \\
 E_z(t, x, y, \pm Lz) &= F_z(t, x, y, \pm Lz) = 0, \rho_e(t, -Lx, y, z) = \rho_i(t, -Lx, y, z) = 0; \\
 \rho_e(t, Lx, y, z) &= \rho_i(t, Lx, y, z) = S \exp[-b(y^2 + z^2)]ate^{-at}; \\
 \rho_e(t, x, \pm Ly, z) &= \rho_i(t, x, \pm Ly, z) = 0; \rho_e(t, x, y, \pm Lz) = \rho_i(t, x, y, \pm Lz) = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь  $\mathbf{F}(t, x, y, z)$  – внешнее поле, которое в этой задаче является нестационарным. Изменение внешнего поля во времени обусловлено разрядом конденсатора, поэтому может быть представлено в форме произведения статического поля и функции, зависящей от времени,  $\mathbf{F}(t, x, y, z) = \mathbf{F}_0(x, y, z)f(t)$ . Без ограничения общности положим  $f(t) = at \exp(-at)$ . Статическое поле определяется путем решения задачи о распределении потенциала в системе с заданной геометрией [12].

Рассмотрим механизм ветвления плазмоида путем замыкания его основания через систему стримеров на анод. Эти стримеры хорошо просматриваются на фотографиях, приведенных в работах [25-26]. Для моделирования эффекта используем систему уравнений (14) с граничными условиями (15), которые теперь включают область анода. Следовательно, предполагаем, что в области анода существует источник нейтральной плазмы с плотностью  $S \exp[-b(y^2 + z^2)]ate^{-at}$ . Второй объемный источник плазмы с интенсивностью  $S_1 \exp[-b_2(x - L_c)^2 - b_1(y^2 + z^2)]ate^{-at}$  помещаем в области катода, т.е. добавляем это слагаемое в правые части первого и второго уравнений (14). Здесь  $L_c$  – координата катода. При соответствующем подборе

параметров в основании плазмоида возникает система боковых стримеров, замыкающих объемный заряд на анод [12]. В данной модели плазмоид рассматривается как долгоживущий стример. Имеется сходство шаровой молнии и плазмоида [23]. Если это сходство подтвердится, то число теоретических гипотез относительно природы шаровой молнии может резко сократиться [23].

В отличие от шаровой молнии и плазмоида, разряд молнии облако-земля характеризуется большим различием поперечного и продольного масштабов порядка см/км. Для одной ступени лидера отношение поперечного масштаба к продольному изменяется от 1/1000 до 1/100. При этом скорость распространения лидера на каждой ступени имеет порядок скорости стримера в модели (1). Это означает, что для моделирования лидера можно использовать систему уравнений (1) при соответствующем выборе параметров [3, 22].

Численное моделирование распространения волн ионизации в области с отношением размеров 1/100 позволяет выявить два типа ступенчатых лидеров в форме волн уплотнения и разрежения соответственно. данные численных экспериментов [20-22] подтверждают гипотезу [11] об универсальности минимальной модели стримера, а также ее расширения в форме (1). Известные явления природы, связанные с электрическим разрядом – стример [3-12], плазмоид [12, 25-26], шаровая молния [23] и ступенчатый лидер [15-22] могут быть описаны в рамках модели (1).

### **Модель следа за движущимся источником плазмы**

Рассмотрим задачу о формировании плазменного канала и следа за движущимся с заданной скоростью источником плазмы. Будем моделировать источник гауссовым распределением, а в качестве модели используем

систему уравнений (1), в которой заменим источник ионизации электрическим полем на движущийся источник, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= D_e \nabla^2 \rho_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{E}) + S_e \exp[-b(\vec{r} - \vec{r}_p)^2] \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} &= D_i \nabla^2 \rho_i + k_i \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{E}) + S_i \exp[-b(\vec{r} - \vec{r}_p)^2] \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= D_E (\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \rho_e - \nabla \rho_i) \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь обозначено  $\vec{r} = \{x, y, z\}$ ,  $\vec{r}_p = \{x_p(t), y_p(t), z_p(t)\}$  – радиус-вектор источника,  $S_e, S_i$  – параметры ионизации. Задача для системы уравнений (16) решалась в прямоугольной области  $-L_x \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq L_y, -L_z \leq z \leq L_z$ , с нулевыми начальными данными и с нулевыми граничными условиями для электрического поля. Начальные данные и граничные условия для плотности электронов и ионов задаем константой, что соответствует ионизации широкими атмосферными ливнями [14], следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(0, x, y, z) &= 0, \rho_e(0, x, y, z) = \rho_i(0, x, y, z) = S_0, \\ \mathbf{E}(t, x, y, z) &= 0, \{x, y, z\} \in \Gamma \\ \rho_e(t, x, y, z) &= S_0, \{x, y, z\} \in \Gamma \\ \rho_i(t, x, y, z) &= S_0, \{x, y, z\} \in \Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

На рис. 1-3 представлены результаты расчетов плотности электронов, ионов и электрического поля соответственно, по модели (16), (17), при следующих параметрах задачи:

$$\begin{aligned} v &= 1, D_e = 0.12, D_i = 0.001, D_E = 0.001, k_i = 0, \\ S_0 &= 0.1, S_e = 1, S_i = 1, b = 0.3, L_x = 600, L_y = L_z = 6. \end{aligned} \quad (18)$$

Первый параметр (18) соответствует скорости источника. Отметим, что в выбранном масштабе на рис. 1 форма следа плотности электронов похожа на белый гриб со шляпкой в передней части. В конечном состоянии граничные условия (17) описывают соударение с преградой, что хорошо прослеживается на нижних рис. 1-2.

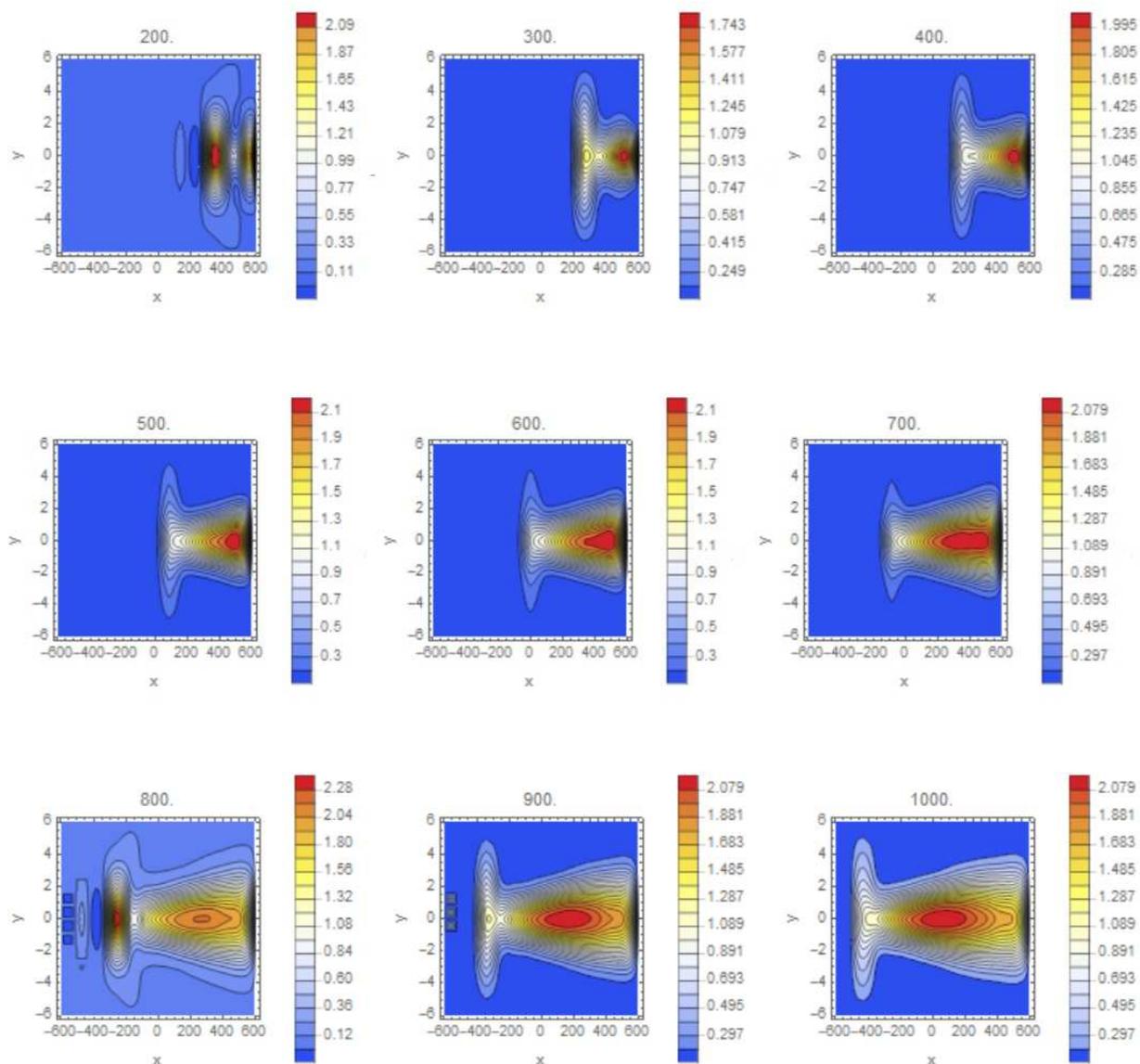


Рис. 1. Линии уровня плотности электронов при движении источника плазмы, вычисленные в 3D модели с параметрами (18) в различные моменты времени (указаны над рисунками).

При заданном диаметре распределения источника порядка 2, след в момент времени  $t = 1000$  растянут на всю длину области равную 1200. Таким образом, в данном случае длина плазменного канала и следа составляет 600

калибров. Очевидно, что длину канала можно увеличить до 10000 калибров, что характерно для ступени лидера.

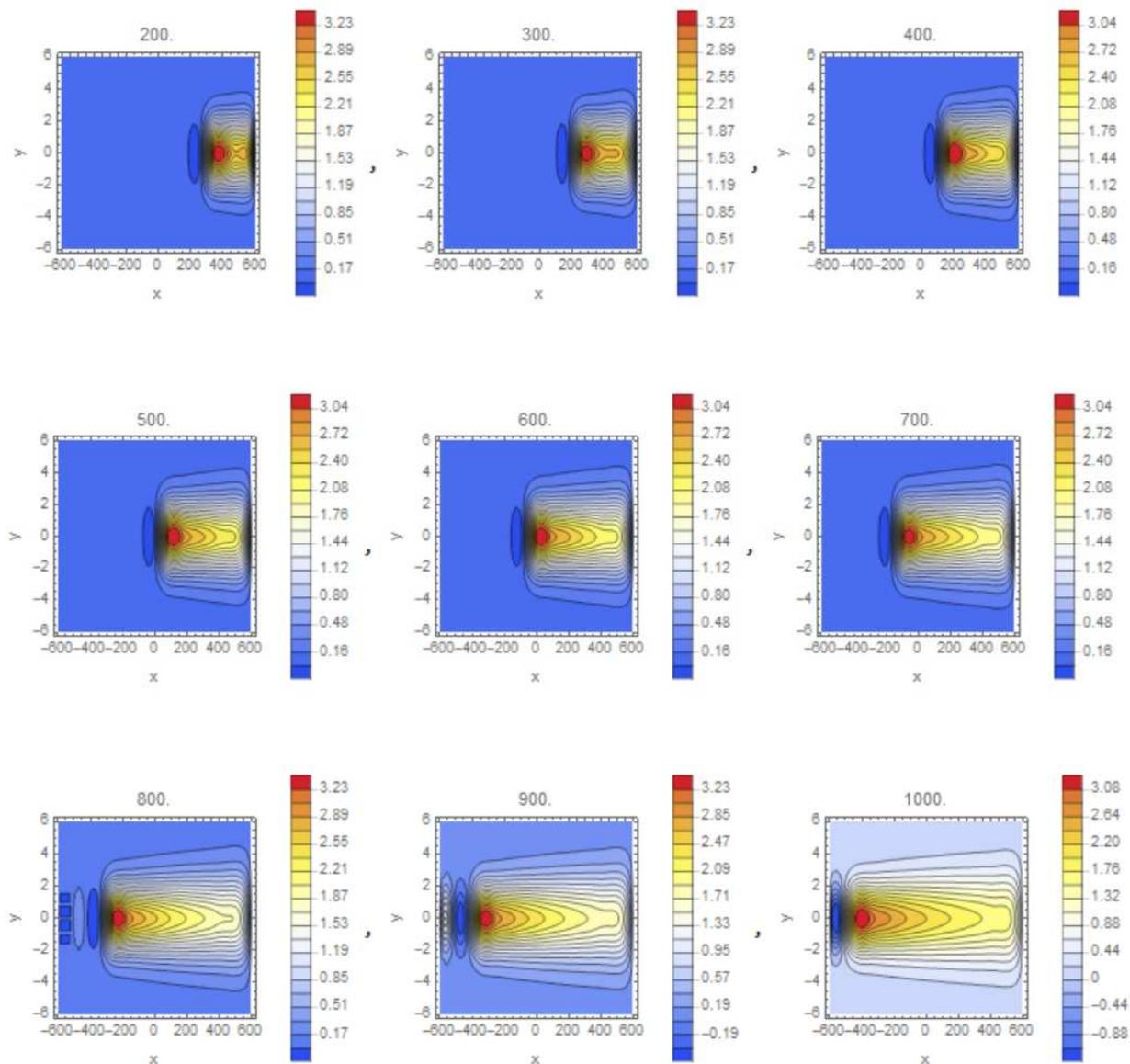


Рис. 2. Линии уровня плотности ионов при движении источника плазмы, вычисленные в 3D модели с параметрами (18) в различные моменты времени (указаны над рисунками).

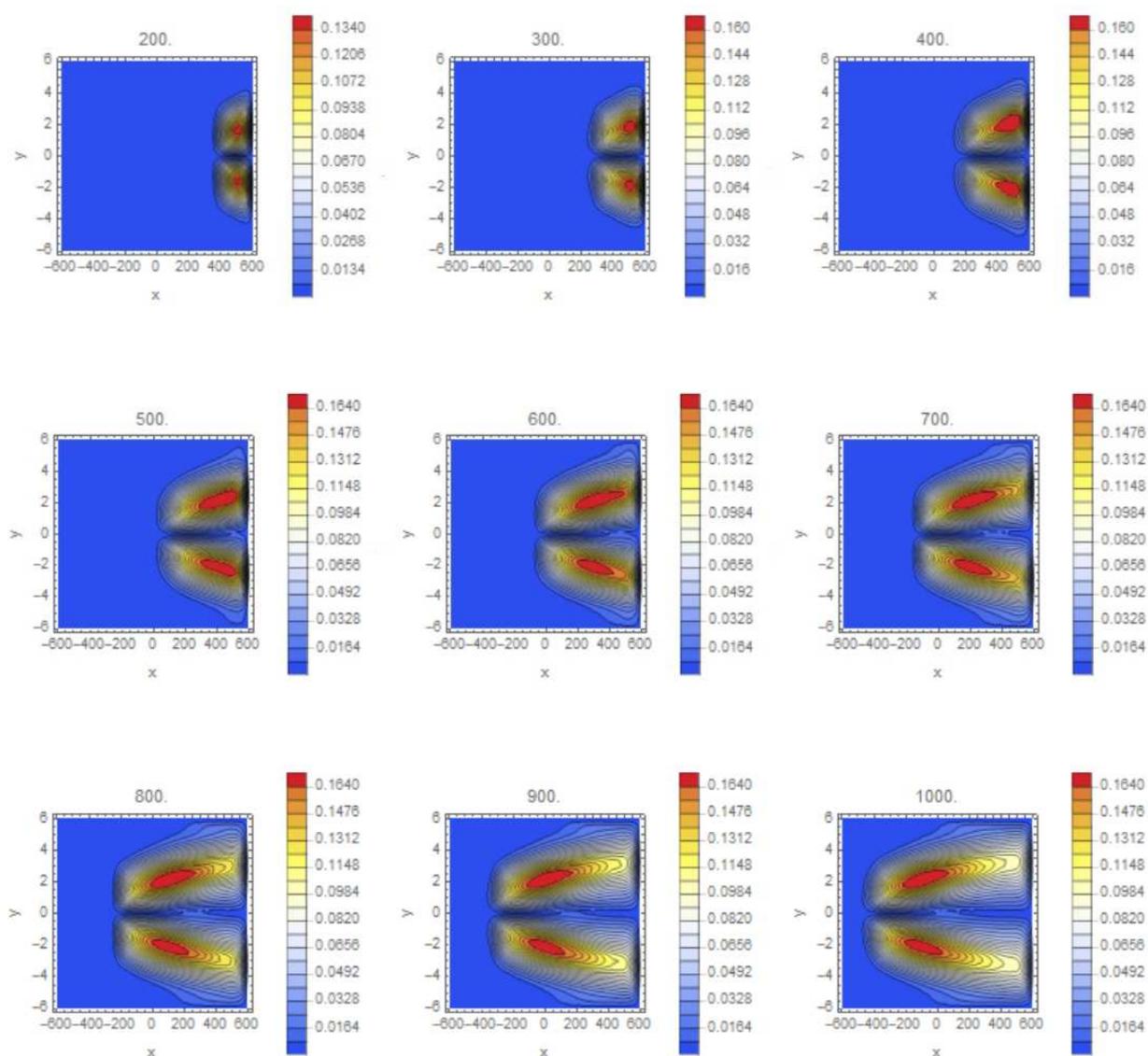


Рис. 3. Линии уровня магнитуды электрического поля при движении источника плазмы, вычисленные в 3D модели с параметрами (18) в различные моменты времени (указаны над рисунками).

Максимальная плотность электронов и ионов в плазменном канале в 20-30 раз превосходит фоновое значение - рис. 1-2. Локальные значения плотности зарядов разного знака не совпадают между собой, что приводит к появлению заметного электрического поля – рис. 3. Учитывая выбранный

масштаб электрического поля 200 кВ/см, находим, что максимальное значение электрического поля для данных на рис. 3 составляет 32 кВ/см. Следовательно, возможна ионизация полем, скорость которой, однако невелика в сравнении с источником.

Заметим, что найденный режим движения с образованием канала плазмы большой длины является уникальным и реализуется в хорошо проводящей среде при большом различии коэффициентов диффузии типа данных (18). При равных коэффициентах диффузии, например, в турбулентной атмосфере, длина следа резко сокращается – рис. 4.

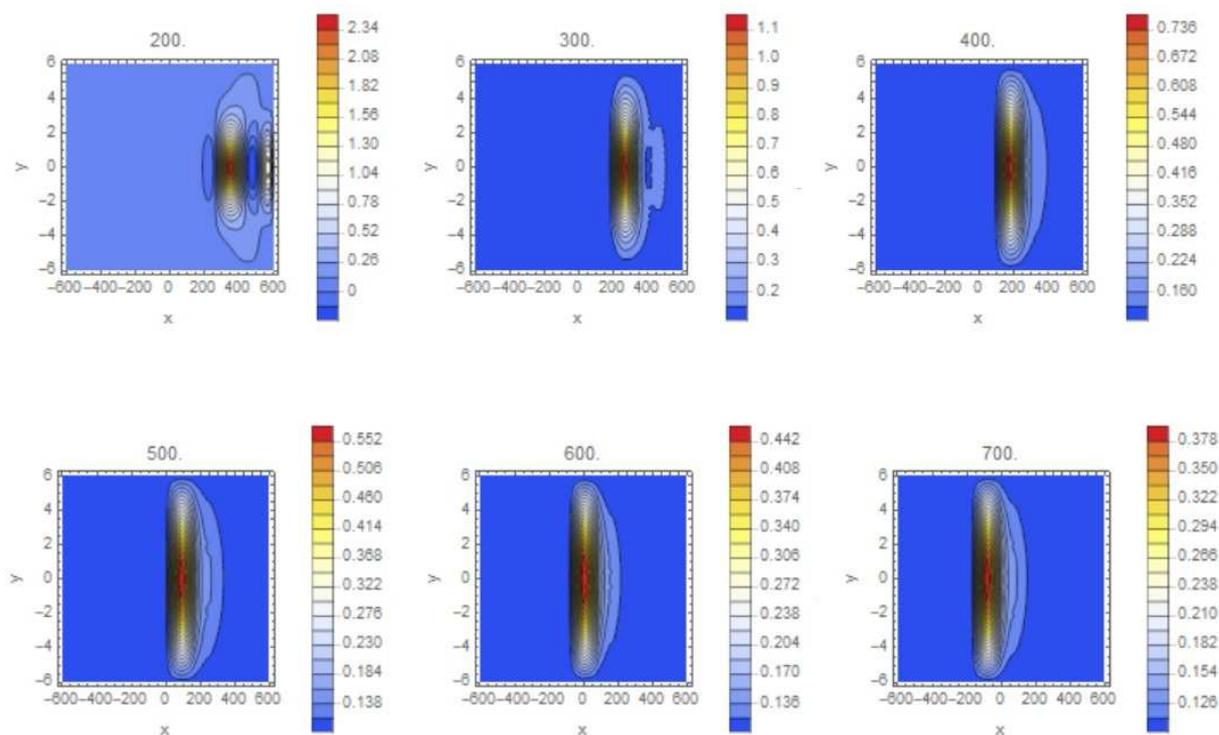


Рис. 4. Линии уровня плотности электронов при движении источника плазмы, вычисленные в 3D модели с параметрами (19) в различные моменты времени (указаны над рисунками).

На рис. 4 представлены результаты расчетов плотности электронов по модели (16), (17), при следующих значениях параметров задачи:

$$\begin{aligned}v = 1, D_e = 0.12, D_i = 0.1, D_E = 0.1, k_i = 0, \\ S_0 = 0.1, S_e = 1, S_i = 1, b = 0.3, L_x = 600, L_y = L_z = 6.\end{aligned}\quad (19)$$

Рассмотрим аналогичную задачу в области с отношением сторон 1/200 – рис. 5-6, с параметрами

$$\begin{aligned}v = 1, D_e = 0.12, D_i = 0.001, D_E = 0.001, k_i = 0, \\ S_0 = 0.1, S_e = 1, S_i = 1, b = 0.3, L_x = 1000, L_y = L_z = 5.\end{aligned}\quad (20)$$

На рис. 5 представлены данные распределения плотности электронов, вычисленные по модели (16), (17) с данными (20). На этих рисунках виден интересный эффект, связанный с появлением и исчезновением шляпки «гриба», что объясняется автоколебаниями в системе, обусловленными граничными условиями (17). Распределения плотности ионов и магнитуды электрического поля подобны данным на рис. 2-3.

На рис. 6 представлены данные по распределению магнитуды электрического поля (два верхних ряда) и плотности электронов (два нижних ряда) в сечениях  $x = const$  (указаны над рисунками) в момент времени  $t = 2000$ . Отметим, что система не обладает осевой симметрией, хотя распределения на рис. 6 в некоторых сечениях похожи на осесимметричные. Сравнивая данные на рис. 2-3, находим, что плотность ионов превосходит плотность электронов. Из-за избытка ионов вектор электрического поля всюду направлен из центра на периферию – рис. 6. Отметим, что положительно заряженные лидеры наблюдаются при атмосферных разрядах [1-2, 15-19].

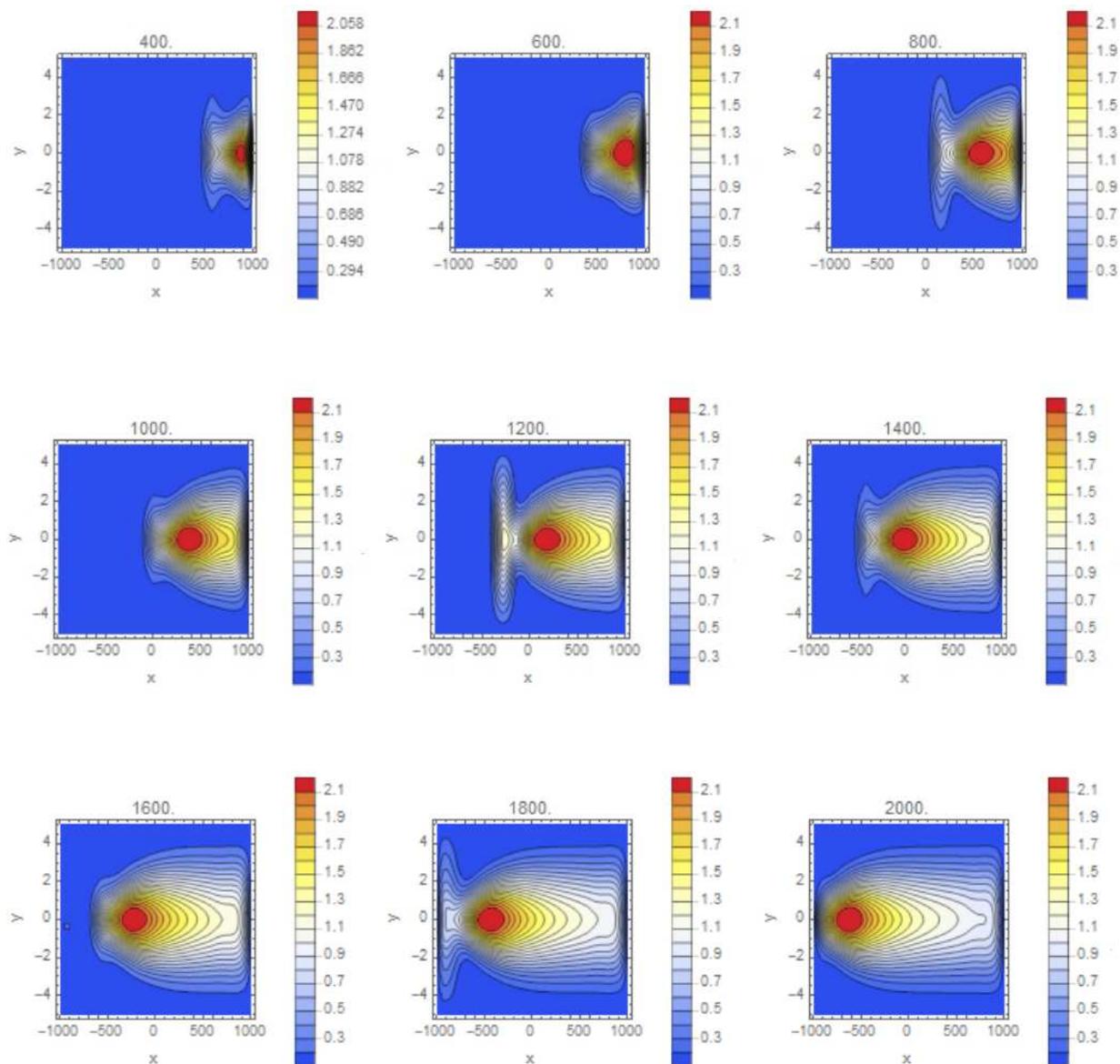


Рис. 5. Линии уровня плотности электронов при движении источника плазмы, вычисленные в 3D модели с параметрами (20) в различные моменты времени (указаны над рисунками).

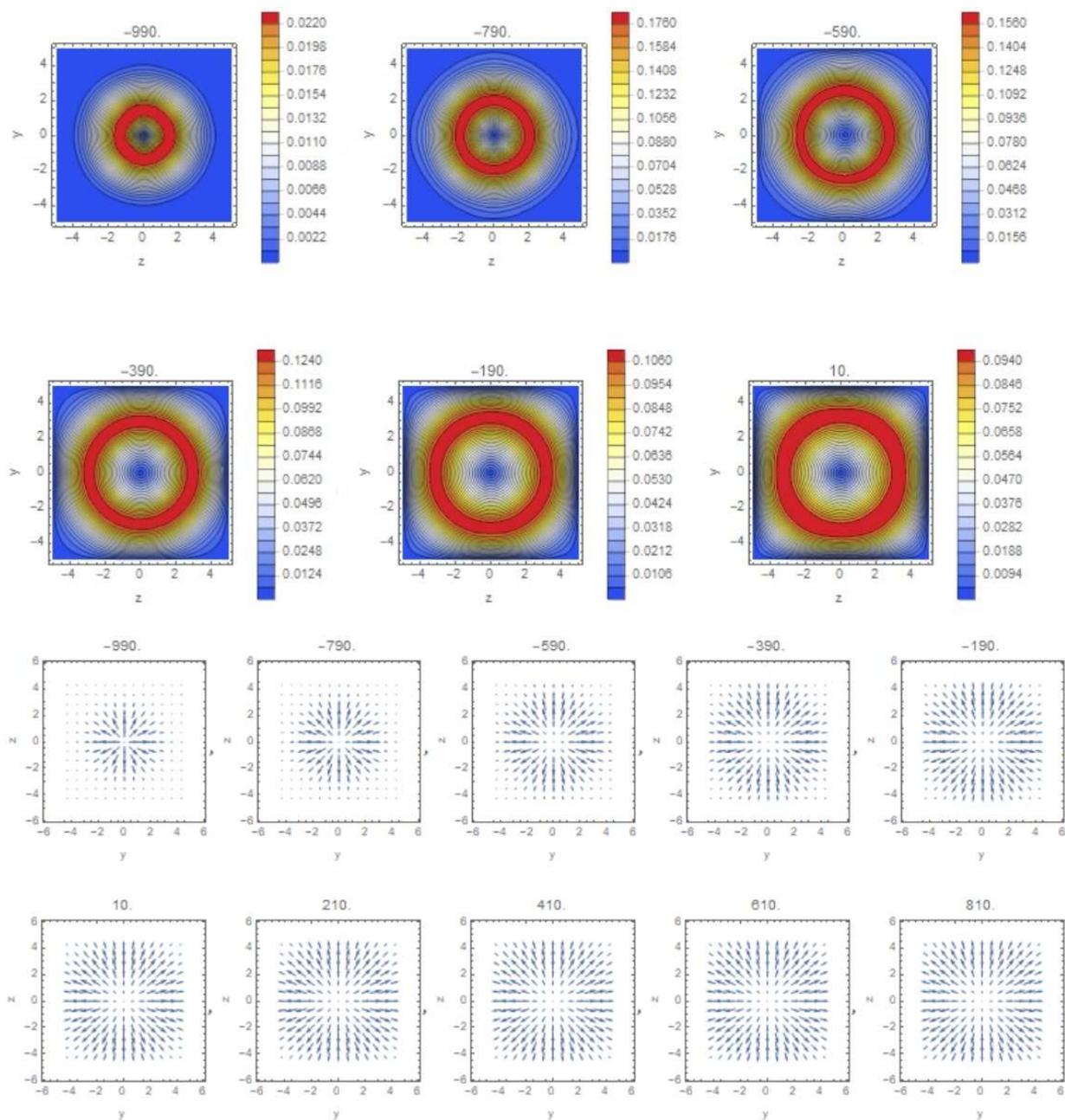


Рис. 6 Магнитуа (вверху) и вектор (внизу) электрического поля в сечениях  $x = const$  (указаны над рисунками) в момент времени  $t = 2000$ .

Наконец, рассмотрим ветвление плазменного канала, которое наблюдается в случае отрицательно заряженного источника – рис. 7.

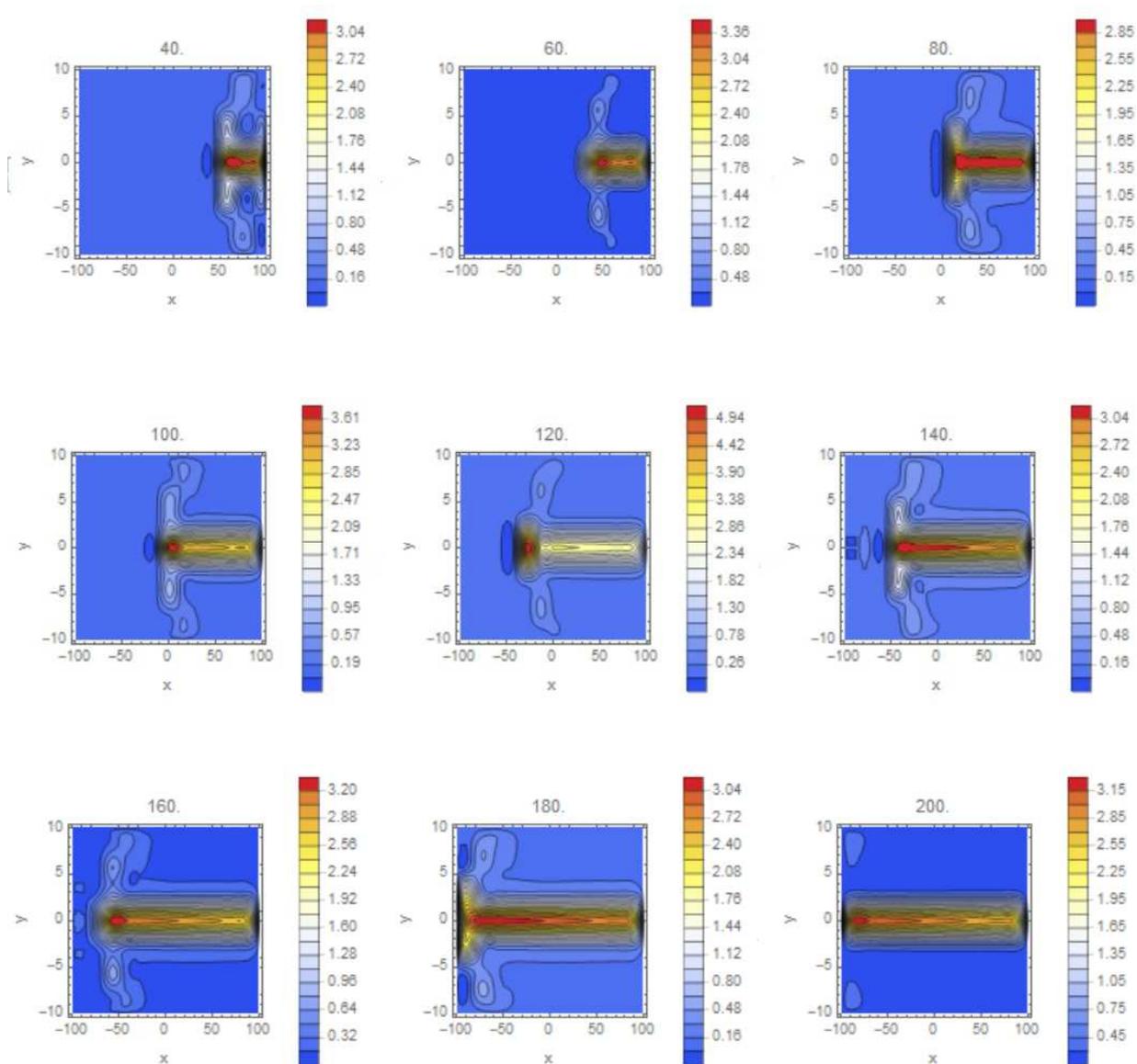


Рис. 7. Линии уровня плотности электронов при движении источника плазмы, вычисленные в 3D модели с параметрами (21) в различные моменты времени (указаны над рисунками).

На рис. 7 представлены результаты расчетов плотности электронов по модели (16), (17), при следующих значениях параметров задачи:

$$\begin{aligned}
 v = 1, D_e = 0.12, D_i = 0.001, D_E = 0.1, k_i = 0, \\
 S_0 = 0.1, S_e = 3, S_i = 1, b = 0.3, L_x = 100, L_y = L_z = 10.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Из данных приведенных на рис. 7 следует, что передняя часть канала распадается на несколько ветвей, замыкающих объемный заряд на проводящие границы области. Этот механизм ветвления отличается от других описанных выше. Полученные результаты могут быть использованы для моделирования атмосферных разрядов и различных технических устройств.

### Библиографический список

1. Uman M. A. *Lighting*. - McGraw-Hill Book Company, 1969.
2. Мучник В.М. *Физика грозы*. – Гидрометеиздат, Ленинград, 1974.
3. U Ebert, C Montijn, T M P Briels, W Hundsdorfer, B Meulenbroek, A Rocco, E M van Veldhuizen. The multiscale nature of streamers//arXiv:physics/0604023 [physics.plasm-ph].
4. P. A. Vitello, B. M. Penetrante, and J. N. Bardsley. Simulation of negative-streamer dynamics in nitrogen// *Phys. Rev. E*, 5574–5598, 1994.
5. Wu C., Kunhardt E. E. Formation and propagation of streamers in N<sub>2</sub> and N<sub>2</sub>-SF<sub>6</sub> mixtures//*Physical Review A (General Physics)*, Volume 37, Issue 11, June 1, 1988, pp.4396-4406.
6. Montijn C., Ebert U.M., Hansdorfer W. Numerical convergence of the branching time of negative strimers//*Phys. Rev. E.*, 73(6), 65401-1/4. 2006.
7. Alejandro Luque, Fabian Brau, Ute Ebert. Saffman-Taylor streamers: mutual finger interaction in an electric breakdown//*Phys. Rev. E* 78, 016206, 2008.
8. Chao Li, Ute Ebert, Willem Hansdorfer. 3D hybrid computations for streamer discharges and production of run-away electrons// arXiv:0907.0555v2, 14 Jul, 2009.
9. Papageorgiou L., Metaxas A.C., Georghiou G.E. Three-dimensional numerical modeling of gas discharges at atmospheric pressure incorporating photo ionization phenomena// *J. App. Phys.* 44, 2011, 045203.
10. Lipeng Liu and Marley Becerra. On the transition from stable positive glow corona to streamers//*J. Phys. D: Appl. Phys.* 49, 225202 (13pp), 2016.
11. Трунев А.П. Распространение и ветвление стримеров в проводящих средах / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №04(128). С. 1149 – 1170. – IDA [article ID]: 1281704080. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/04/pdf/80.pdf>, 1,375 у.п.л.
12. Трунев А.П. Моделирование плазмоида и стримеров в проводящей среде / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №05(129). С. 482 – 508. – IDA [article ID]: 1291705041. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/05/pdf/41.pdf>, 1,688 у.п.л.
13. Гуревич А. В., Зыбин К. П. Пробой на убегающих электронах и электрические разряды во время грозы// *УФН*, 171, 1177–1199, 2001.

14. Ермаков В. И., Стожков Ю. И. Физика грозовых облаков // Физический институт им. П. Н. Лебедева, РАН, М., 2004 г.
15. Krider E. P., C. D. Weidman, and R. C. Noggle. The electric field produced by lightning stepped leaders// *J. Geophys. Res.*, 82, 951–960, 1977, doi:10.1029/JC082i006p00951.
16. Rakov V. A., and M. A. Uman. *Lightning: Physics and Effects*. - Cambridge Univ. Press, New York. 2003
17. J. D. Hill, M. A. Uman, and D. M. Jordan. High-speed video observations of a lightning stepped leader// *J. Geophys. Res.*, 116, D16117, doi:10.1029/2011JD015818, 2011.
18. Buguet M., P. Lalonde, P. Blanchet, S. Pédeboy, P. Barneoud, P. Laroche. Observation of Cloud-to-Ground Lightning Channels with High-Speed Video Camera// *XV International Conference on Atmospheric Electricity*, 15-20 June 2014, Norman, Oklahoma, U.S.A.
19. Biagi C. J., M. A. Uman, J. D. Hill, D. M. Jordan, V. A. Rakov, and J. Dwyer. Observations of stepping mechanisms in a rocket-and-wire triggered lightning flash// *J. Geophys. Res.*, 115, D23215, 2010, doi:10.1029/2010JD014616.
20. Hidetsugu Sakaguchi and Sahim M. Kourkouss. Branching Patterns and Stepped Leaders in an Electric-Circuit Model for Creeping Discharge// *J. Phys. Soc. Jpn.* 79, 064802, 2010.
21. B.E. Carlson, C. Liang, P. Bitzer, and H. Christian. Time domain simulations of preliminary breakdown pulses in natural lightning// arXiv:1605.09119v1 [physics.space-ph] 30 May 2016.
22. Трунев А.П. Моделирование ступенчатого лидера молнии/ Трунев А.П. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №07(131). – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/07/pdf/63.pdf>, 1,563 у.п.л. – IDA [article ID]: 1311707063. <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-131-063>.
23. Трунев А.П. Моделирование шаровой молнии в проводящей среде / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №06(130). С. 348 – 378. – IDA [article ID]: 1301706027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/06/pdf/27.pdf>, 1,938 у.п.
24. Saffman P. G., Geoffrey Taylor. The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid//*Proc. R. Soc. Lond. A*, 245, 1958.
25. Fantz U., Kalafat S., Friedl R., Briefi S. Generation of an atmospheric plasmoid from a water discharge: An analysis of the dissipated energy// *J. Appl. Phys.* 114, 043302, 2013; doi: 10.1063/1.4816311
26. Ursel Fantz, Stefan Briefi, Roland Friedl, Martin Kammerloher, Johannes Kolbinger, and Alexander Oswald. Initial Phase of a Large Atmospheric Plasmoid Generated Above a Water Surface//*IEEE TRANSACTIONS ON PLASMA SCIENCE*, VOL. 42, NO. 10, 2014.

## References

1. Uman M. A. *Lightning*. - McGraw-Hill Book Company, 1969.
2. Muchnik V.M. *Fizika grozy*. – Gidrometeoizdat, Leningrad, 1974.
3. U Ebert, C Montijn, T M P Briels, W Hundsdorfer, B Meulenbroek, A Rocco, E M van Veldhuizen. The multiscale nature of streamers//arXiv:physics/0604023 [physics.plasm-ph].
4. P. A. Vitello, B. M. Penetrante, and J. N. Bardsley. Simulation of negative-streamer dynamics in nitrogen// *Phys. Rev. E*, 5574–5598, 1994.

5. Wu C., Kunhardt E. E. Formation and propagation of streamers in N<sub>2</sub> and N<sub>2</sub>-SF<sub>6</sub> mixtures//Physical Review A (General Physics), Volume 37, Issue 11, June 1, 1988, pp.4396-4406.
6. Montijn C., Ebert U.M., Hansdorfer W. Numerical convergence of the branching time of negative streamers//Phys. Rev. E., 73(6), 65401-1/4. 2006.
7. Alejandro Luque, Fabian Brau, Ute Ebert. Saffman-Taylor streamers: mutual finger interaction in an electric breakdown//Phys. Rev. E 78, 016206, 2008.
8. Chao Li, Ute Ebert, Willem Hansdorfer. 3D hybrid computations for streamer discharges and production of run-away electrons// arXiv:0907.0555v2, 14 Jul, 2009.
9. Papageorgiou L., Metaxas A.C., Georghiou G.E. Three-dimensional numerical modeling of gas discharges at atmospheric pressure incorporating photo ionization phenomena// J. App. Phys. 44, 2011, 045203.
10. Lipeng Liu and Marley Becerra. On the transition from stable positive glow corona to streamers//J. Phys. D: Appl. Phys. 49, 225202 (13pp), 2016.
11. Trunев A.P. Rasprostranenie i vetvlenie strimerov v provodjashhих sredah / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №04(128). S. 1149 – 1170. – IDA [article ID]: 1281704080. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/04/pdf/80.pdf>, 1,375 u.p.l.
12. Trunев A.P. Modelirovanie plazmoida i strimerov v provodjashhej srede / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №05(129). S. 482 – 508. – IDA [article ID]: 1291705041. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/05/pdf/41.pdf>, 1,688 u.p.l.
13. Gurevich A. V., Zybin K. P. Proboj na ubegajushhих jelektronah i jelektricheskie razrjady vo vremja grozy// UFN, 171, 1177–1199, 2001.
14. Ermakov V. I., Stozhkov Ju. I. Fizika grozovyh oblakov // Fizicheskij institut im. P. N. Lebedeva, RAN, M., 2004 g.
15. Krider E. P., C. D. Weidman, and R. C. Noggle. The electric field produced by lightning stepped leaders// J. Geophys. Res., 82, 951–960, 1977, doi:10.1029/JC082i006p00951.
16. Rakov V. A., and M. A. Uman. Lightning: Physics and Effects. - Cambridge Univ. Press, New York. 2003
17. J. D. Hill, M. A. Uman, and D. M. Jordan. High-speed video observations of a lightning stepped leader// J. Geophys. Res., 116, D16117, doi:10.1029/2011JD015818, 2011.
18. Buguet M., P. Lalande, P. Blanchet, S. Pédeboy, P. Barneoud, P. Laroche. Observation of Cloud-to-Ground Lightning Channels with High-Speed Video Camera//XV International Conference on Atmospheric Electricity, 15-20 June 2014, Norman, Oklahoma, U.S.A.
19. Biagi C. J., M. A. Uman, J. D. Hill, D. M. Jordan, V. A. Rakov, and J. Dwyer. Observations of stepping mechanisms in a rocket-and-wire triggered lightning flash// J. Geophys. Res., 115, D23215, 2010, doi:10.1029/2010JD014616.
20. Hidetsugu Sakaguchi and Sahim M. Kourkouss. Branching Patterns and Stepped Leaders in an Electric-Circuit Model for Creeping Discharge// J. Phys. Soc. Jpn. 79, 064802, 2010.
21. B.E. Carlson, C. Liang, P. Bitzer, and H. Christian. Time domain simulations of preliminary breakdown pulses in natural lightning// arXiv:1605.09119v1 [physics.space-ph] 30 May 2016.

22. Trunев A.P. Modelirovanie stupenchatogo lidera molnii/ Trunев A.P. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №07(131). – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/07/pdf/63.pdf>, 1,563 u.p.l. – IDA [article ID]: 1311707063. <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-131-063>.
23. Trunев A.P. Modelirovanie sharovoj molnii v provodjashhej srede / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2017. – №06(130). S. 348 – 378. – IDA [article ID]: 1301706027. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2017/06/pdf/27.pdf>, 1,938 u.p.
24. Saffman P. G., Geoffrey Taylor. The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid//Proc. R. Soc. Lond. A, 245, 1958.
25. Fantz U., Kalafat S., Friedl R., Briefi S. Generation of an atmospheric plasmoid from a water discharge: An analysis of the dissipated energy// J. Appl. Phys. 114, 043302, 2013; doi: 10.1063/1.4816311
26. Ursel Fantz, Stefan Briefi, Roland Friedl, Martin Kammerloher, Johannes Kolbinger, and Alexander Oswald. Initial Phase of a Large Atmospheric Plasmoid Generated Above a Water Surface//IEEE TRANSACTIONS ON PLASMA SCIENCE, VOL. 42, NO. 10, 2014.