УДК 519.21

01.00.00 Физико-математические науки

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА СНИЖЕНИЯ ЦЕНЫ НАМЕЧАЕМОГО МЕРОПРИЯТИЯ

Сафронова Татьяна Ивановна
доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики
Scopus AuthorID: 6603583489
РИНЦ SPIN-код: 6691-2832
saf55555@yandex.ru

Соколова Ирина Владимировна
кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики
Scopus Author ID: 35171596900
РИНЦ SPIN-код=4183-6277
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина», Краснодар, Россия
irin-sokolova@yandex.ru

В настоящее время вопросы повышения плодородия почв весьма актуальны. Интенсивное развитие сельского хозяйства не может эффективно выполняться без комплексных мероприятий по охране сельскохозяйственных земель от различных видов деградаций. С одной стороны, необходимо обеспечивать получение максимального урожая сельскохозяйственных культур, с другой – сохранить и приумножить плодородие почвы и не допустить отрицательного антропогенного воздействия на окружающую среду. Для расширенного воспроизводства почвенного плодородия необходима система мероприятий – внесение в почву минеральных и органических удобрений, агротехнические и мелиоративные приемы, стимулирование процессов гумусообразования и т.д. Потому важны методы, позволяющие заранее оценить намечаемые мероприятия для повышения плодородия почв и для ликвидации ущерба окружающей среде. В статье оцениваемые параметры трактуются случайными величинами. Это позволяет рассмотреть неопределенность в терминах вероятностных распределений. Предлагается вероятностная модель процесса снижения цены намечаемого мероприятия. Вычислены основные характеристики цены состояния объекта – математическое ожидание, дисперсия, плотность распределения вероятностей рассматриваемой случайной величины. Модель может быть использована для решения вопросов рационального использования земельных угодий, научно обоснованной организации землепользования, при составлении мелиоративного проекта

UDC 519.21

Science and Math

PROBABILISTIC MODEL OF THE PROCESS OF REDUCTION OF THE PRICE FOR PLANNED ACTIONS

Safronova Tatyana Ivanovna
Doctor of Engineering, professor of the Department of higher mathematics
Scopus Author ID: 6603583489
RSCI SPIN code: 6691-2832
saf55555@yandex.ru

Sokolova Irina Vladimirovna
Candidate of pedagogical sciences, associate professor of the Department of higher mathematics
Scopus Author ID: 35171596900
RSCI SPIN code =4183-6277
Kuban state agrarian university, Krasnodar, Russia
irin-sokolova@yandex.ru

The soil fertility increase issues are very relevant now. Intensive development of agriculture cannot be made effectively without complex actions for farmlands protection from different types of degradations. On the one hand, it is necessary to ensure the maximum harvest of crops, and to preserve and increase the fertility of the soil and prevent negative anthropogenic impact on the environment on the other. For an extended reproduction of soil fertility, a system of measures is necessary for introduction of mineral and organic fertilizers into the soil, agrotechnical and reclamation methods, stimulation of humus formation processes, and so on. Therefore, methods are important that allow us to estimate the planned measures in advance to improve soil fertility and to eliminate environmental damage. In the article, the estimated parameters are treated by random variables. This allows us to consider the uncertainty in terms of probability distributions. It is offered a probabilistic model of the process of reducing the price of the proposed activity. Mathematical expectation, variance, distribution density of the considered random variable probabilities as the main characteristics of the object state price are calculated. The model can be used to address issues of rational use of land, scientifically based land management organization, when drafting land reclamation project

Ключевые слова: ЦЕНА МЕЛИОРАТИВНОГО МЕРОПРИЯТИЯ, ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Keywords: PRICE OF THE MELIORATIVE MEASURES, PROBABILISTIC CHARACTERISTICS

Doi: 10.21515/1990-4665-132-026

Введение

В настоящее время одним из приоритетных направлений мелиоративных проектов является разработка и внедрение природоохранных технологий, которые обеспечивают повышение экологической безопасности агроландшафтов и способствуют предотвращению негативных процессов при антропогенном воздействии. В этом аспекте особое внимание отводится проблеме совершенствования управления мелиоративными системами и повышения экологической надежности их функционирования.

Под экологической безопасностью гидромелиоративных систем понимается такая форма их функционирования, при которой в течение службы эксплуатации все заданные процессы, параметры и свойства системы не вызывают угрозу возникновения негативных последствий (экологических ущербов) или компенсируются мелиоративными природоохранными мероприятиями.

Природопользование на любом этапе своего развития подразумевает разные формы воздействия на природные системы и их преобразование, то есть управление ими. Управление может быть «жестким», грубо нарушающим естественные процессы и «мягкими», использующими естественные механизмы саморегуляции природной среды. «Жесткое» управление дает высокий и быстрый эффект, обеспечивающий рост объема продукции или снижение затрат на используемые мероприятия, но с течением времени происходят экологические и экономические ущербы [1]. Необходимо сочетание обеих форм управления, чтобы обеспечить природоохранную деятельность в рамках допустимого воздействия на окружающую среду, не испытывающую при этом деградации и способную восстанавливать свои качества.

В Краснодарском крае земельные ресурсы подвержены воздействию различных источников загрязнения. Поэтому в государственных программах развития края особое внимание уделено мероприятиям по восстановлению плодородия почв. Чем сложнее, дороже намечаемое мероприятие, тем менее допустимы в нем «волевые» решения и тем важнее методы, позволяющие заранее оценить последствия каждого решения, заранее исключить недопустимые варианты и рекомендовать более подходящие ситуации мероприятия. Например, задача оптимизации мелиоративных мероприятий с неопределенными параметрами позволит повысить эффективность управления водным, световым, воздушным, тепловым и пищевым режимами.

В данной работе параметры, которые нужно оценить по экспериментальным данным, трактуются случайными величинами. Это позволяет рассматривать неопределенность, связанную с оценкой параметров, в терминах вероятностных распределений [2]. Требования – получить максимальный эффект и достаточно быстро – противоречат друг другу, и поэтому исследователь сначала ориентируется на высокую эффективность, а далее постепенно снижает ее до тех пор, пока будет достигнута приемлемая эффективность. При такой постановке задачи важна скорость снижения цены затрачиваемых мероприятий.

Приведем примеры возможных мероприятий:

- внесение органических и минеральных удобрений;

- система обработки почвы, направленная на улучшение ее структуры, строения и водно-физических свойств;

- мероприятия по устранению щелочности и кислотности почв, осушению заболоченных земель и др.

Рассмотрим одну из возможных математических моделей процесса снижения цены намечаемого мероприятия.

Математическая модель

Рассмотрим случай, когда цена затрачиваемых мероприятий $S(t)$ изменяется непрерывно со временем *t*. Будем предполагать, что $S(t)$ строго монотонно убывает со временем от некоторой цены $S_0 = S(0)$, так что уравнение $S(t) = S$ можно однозначно разрешить относительно аргумента *t*, то есть получить соотношение $t = t(S)$.

Будем считать, что затрачиваемые мероприятия образуют пуассоновский поток постоянной интенсивности λ. Выполненное мероприятие доводит систему до определенного состояния с вероятностью $R(S)$, разумеется, зависящей от цены $S(t)$. Будем считать далее, что $R(S)$ есть монотонно убывающая функция, так что с уменьшением цены мероприятий вероятность достижения ущерба возрастает. Кроме этого, будем считать, что существует некоторая минимальная цена S_m, так что $R(S_m) = 1$, то есть по этой цене отмечается наступление ущерба окружающей среде всегда. Соответственно этому будем считать, что $\lim_{t\to\infty} S(t) = S_m$.

Характеристики цены

Будем называть цену, по которой состояние будет достигнуто, ценой состояния объекта и обозначать ее как S_e. В рамках предлагаемой модели эта цена будет случайной величиной.

Рассмотрим некоторый интервал времени $[t,\ t + \Delta t]$. Тогда за этот интервал времени могут произойти следующие события:

1) допустимое экологическое состояние системы не достигнуто. По свойствам пуассоновского потока вероятность этого события будет равна $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$;

2) мероприятие проведено, но допустимое экологическое состояние не достигнуто. Вероятность этого события равна $\lambda\Delta t(1-R(S))+o(\Delta t)$;

3) мероприятие проведено и допустимое экологическое состояние достигнуто. Вероятность этого события равна $\lambda\Delta t\cdot R(S)+o(\Delta t)$.

Отметим, что суммарная вероятность двух первых вариантов (в обоих случаях допустимое экологическое состояние не достигнуто) равна $1-\lambda\Delta t\cdot R(S)+o(\Delta t)$.

Результаты и обсуждение

Найдем теперь основные вероятностные характеристики цены состояния объекта S_e [3].

Математическое ожидание цены состояния объекта

Пусть $m_{1S}(S)$ есть математическое ожидание цены состояния объекта при условии, что в момент времени *t*допустимое экологическое состояние не достигнуто и цена намечаемого мероприятия равна *S*, то есть $m_{1S}(S)=M\{S_e\,|\,S(t)=S\}$. Рассмотрим момент времени $t+\Delta t$. Тогда за этот интервал времени с вероятностью $\lambda\Delta t\cdot R(S)+o(\Delta t)$ допустимое экологическое состояние достигнуто и цена состояния будет равна *S*. С вероятностью $1-\lambda\Delta t\cdot R(S)+o(\Delta t)$ допустимое экологическое состояние не будет достигнуто, но в момент времени $t+\Delta t$ цена мероприятия будет равна $S(t+\Delta t)=S+\Delta S$. Это приводит к соотношению

$$m_{1S}(S)=\lambda R(S)\Delta t\cdot S+(1-\lambda R(S)\Delta t)m_{1S}(S+\Delta S)+o(\Delta t). \qquad (1.1)$$

Считая $m_{1S}(S)$ достаточно гладкой функцией, разложим $m_{1S}(S+\Delta S)$ в ряд Тейлора

$$m_{1S}(S+\Delta S)=m_{1S}(S)+m'_{1S}(S)\Delta S+o(\Delta t),$$

так как ΔS пропорционально Δt. Подставляя это разложение в (1.1), получим

$$m_{1S}(S)=\lambda R(S)\Delta t\cdot S+(1-\lambda R(S)\Delta t)[m_{1S}(S)+m'_{1S}(S)\Delta S]+o(\Delta t). \qquad (1.2)$$

Раскрывая скобки и сокращая $m_{1S}(S)$, найдем

$$0=\lambda R(S)\Delta t\cdot S-\lambda R(S)\Delta t\cdot m_{1S}(S)+m'_{1S}(S)\Delta S+o(\Delta t)\,.$$

Деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t\to 0$, получим

$$0=\lambda R(S)\cdot S-\lambda R(S)\cdot m_{1S}(S)+m'_{1S}(S)\frac{dS}{dt}\,. \qquad (1.3)$$

Введем важнейшую для дальнейшего характеристику. Считая, что $S(t)$ является дифференцируемой функцией и строго монотонно убывает, найдем зависимость $t=t(S)$ и введем функцию

$$a(S)=-\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=t(S)}. \qquad (1.4)$$

В силу сделанных предположений $a(S)>0$. Уравнение (1.3) может быть тогда записано в виде

$$a(s)m'_{1S}(S)+\lambda R(S)m_{1S}(S)=\lambda SR(S)$$

или в виде

$$m'_{1S}(S)+\frac{\lambda R(S)}{a(S)}m_{1S}(S)=S\,\frac{\lambda R(S)}{a(S)}\,. \qquad (1.5)$$

Комбинацию $\lambda R(S)/a(S)$, которая в дальнейшем будет встречаться очень часто, будем обозначать как $g(S)$, то есть $g(S)=\lambda R(S)/a(S)$. Уравнение для $m_{1S}(S)$ окончательно принимает вид

$$m'_{1S}(S)+g(S)m_{1S}(S)=Sg(S)\,. \qquad (1.6)$$

После некоторых упрощений общее решение уравнения (1.6) принимает вид

$$m_{1S}(S)=C_0\cdot\exp\left(-\int_{S_m}^{S}g(x)dx\right)+\int_{S_m}^{S}yg(y)\exp\left(-\int_{y}^{S}g(x)dx\right)dy\,. \qquad (1.7)$$

Константа C_0 находится из того условия, что при минимальной цене S_m экологическое состояние объекта, удовлетворяющее требованиям, регистрируется с вероятностью 1, и поэтому должно быть $m_{1S}(S_m)=S_m$. Отсюда получаем окончательный вид для математического ожидания цены состояния объекта

$$m_{1S}(S) = S_m \cdot \exp\left(-\int_{S_m}^{S} g(x)dx\right) + \int_{S_m}^{S} yg(y)\exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right)dy. \quad (1.8)$$

Приведем еще один вид формулы (1.8), который может быть предпочтительней для решения конкретных задач. Имеем

$$g(y)\exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right)dy = d_y \exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right),$$

и поэтому второе слагаемое в (1.8) может быть записано в виде

$$\int_{S_m}^{S} yg(y)\exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right)dy = \int_{S_m}^{S} yd_y \exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right).$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_{S_m}^{S} yd_y \exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right) = y\cdot\exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right)\Bigg|_{S_m}^{S} - \int_{S_m}^{S}\exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right)dy =$$

$$= \int_{S_m}^{S} yd_y \exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right) = S - S_m\exp\left(-\int_{S_m}^{S} g(x)dx\right) - \int_{S_m}^{S}\exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right)dy,$$

так что окончательно

$$m_{1S}(S) = S - \int_{S_m}^{S}\exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right)dy. \quad (1.9)$$

И если состояние объекта, удовлетворяющее экологическим требованиям, регистрируется с цены S_0, то математическое ожидание цены равно $m_{1S}(S_0)$.

Второй начальный момент цены состояния объекта

Подобно предыдущему обозначим $m_{2S}(S) = M\{S_e^2 \mid S(t) = S\}$. Тогда аналогичные рассуждения приводят к соотношению

$$m_{2S}(S) = \lambda R(S)\Delta t \cdot S^2 + (1 - \lambda R(S)\Delta t)m_{2S}(S + \Delta S) + o(\Delta t). \quad (1.10)$$

Проделывая те же преобразования, что и при выводе уравнения для $m_{1S}(S)$, придем к уравнению

$$m'_{2S}(S) + g(S)m_{2S}(S) = S^2 g(S). \quad (1.11)$$

Его решение может быть записано в виде

$$m_{2S}(S) = S_m^2 \cdot \exp\left(-\int_{S_m}^{S} g(x)dx\right) + \int_{S_m}^{S} y^2 g(y)\exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right)dy \quad (1.12)$$

или в виде

$$m_{2S}(S) = S^2 - 2\int_{S_m}^{S} y \cdot \exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right)dy. \quad (1.13)$$

Знание $m_{2S}(S)$ позволяет найти дисперсию цены состояния объекта $D\{S_e \mid S(t) = S\} = m_{2S}(S) - m_{1S}^2(S)$.

Распределение вероятностей цены состояния объекта

Найти плотность вероятностей цены можно, используя метод преобразования Лапласа. Найдем поэтому сначала преобразование Лапласа от плотности вероятностей продажной цены, то есть функцию

$$G_S(q,S) = M\{\exp(-qS_e) \mid S(t) = S\}. \quad (1.14)$$

Рассуждения, аналогичные тем, которые производились при выводе уравнения для $m_{1S}(S)$, приводят к соотношению

$$G_S(q,S) = \lambda R(S)\Delta t \cdot e^{-qS} + (1 - \lambda R(S)\Delta t)G_S(q, S + \Delta S) + o(\Delta t).$$

Разлагая $G_S(q, S + \Delta S)$ в ряд Тейлора, получим

$$G_S(q,S) = \lambda R(S)\Delta t \cdot e^{-qS} + (1 - \lambda R(S)\Delta t)\left[G_S(q,S) + \frac{\partial G_S(q,S)}{\partial S}\Delta S\right] + o(\Delta t).$$

Раскрывая скобки, сокращая $G_S(q,S)$, деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим уравнение для $G_S(q,S)$:

$$\frac{\partial G(q,S)}{\partial S} + g(S)G(q,S) = g(S)e^{-qS}. \quad (1.15)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$G_S(q,S) = \exp\left(-\int_{S_m}^{S} g(x)dx - qS_m\right) + \int_{S_m}^{S} g(y)\exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx - qy\right)dy. \quad (1.16)$$

Обратное преобразование Лапласа от функции $\exp(-qy)$ есть $\delta(S_e - y)$. Поэтому плотность вероятностей $p_S(S_e)$, являющаяся обратным преобразованием Лапласа от выражения (1.16), имеет вид

$$p_S(S_e) = \delta(S_e - S_m)\exp\left(-\int_{S_m}^{S} g(x)dx\right) + \int_{S_m}^{S} g(y)\exp\left(-\int_{y}^{S} g(x)dx\right)\delta(y - S_e)dy$$

.

Используя свойства δ-функции, получаем

$$p_S(S_e) = \delta(S_e - S_m)\exp\left(-\int_{S_m}^{S} g(x)dx\right) + g(S_e)\exp\left(-\int_{S_e}^{S} g(x)dx\right), \quad (1.17)$$

что и дает явный вид плотности вероятностей продажной цены. При этом надо иметь в виду, что S_e изменяется в пределах $S_m \le S_e \le S$.

Проверим еще, что для выражения (1.17) выполняется условие нормировки. Действительно,

$$\int_{S_m}^{S} g(S_e)\exp\left(-\int_{S_e}^{S} g(x)dx\right)dS_e = \int_{S_m}^{S} d_{S_e}\exp\left(-\int_{S_e}^{S} g(x)dx\right) = \exp\left(-\int_{S_e}^{S} g(x)dx\right)\Bigg|_{S_m}^{S} =$$

$$= 1 - \exp\left(-\int_{S_m}^{S} g(x)dx\right).$$

Так как $\int_{S_m}^{S} \delta(S_e - S_m)dS_e = 1$, то отсюда и следует, что выполняется условие нормировки $\int_{S_m}^{S} p_S(S_e)dS_e = 1$.

Выводы

Все мелиоративные мероприятия производятся в расчете на их эффективное влияние в течение длительного времени. Поэтому за мелиоративными системами необходим регулярный контроль, наблюдение, сбор и анализ достоверной информации, своевременный ремонт и обновление оросительной системы, регулярное управление функционированием систем. Так как состояние почв обусловлено большим количеством случайных факторов, необходим вероятностный подход к выбору управленческих решений [4].

В статье оцениваемые параметры трактуются случайными величинами. Предлагается вероятностная модель процесса снижения цены намечаемого мероприятия. Модель может быть использована при создании экологически безопасного ресурсосберегающего проекта.

Список литературы

1. Доклад «О состоянии природопользования и об охране окружающей среды Краснодарского края в 2014 году». –Краснодар, 2015. – 170 с.

2. Сафронова Т.И. Вероятностное оценивание мелиоративного состояния орошаемого поля при использовании биотехнологии / Т.И. Сафронова, Я.А. Полторак // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №07(121). С. 1778 – 1786. – IDA [article ID]: 1211607110. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/110.pdf, 0,562 у.п.л.

3.Карманова, А.В. Конструирование профильных компонентов курса математики в системе аграрного образования: автореф. дис. канд. пед. наук :13.00.08 / Карманова А.В. – Краснодар, 2005. – 18 с.

4.Соколова И.В. Математическая модель принятия управленческих решений на сельскохозяйственном предприятии в условиях риска и неопределенности / И.В. Соколова // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №06(120). С. 1617 – 1628. – IDA [article ID]: 1201606107. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/107.pdf, 0,75 у.п.л.

References

1. Doklad «Ososostojaniiprirodopol'zovanijaiobohraneokruzhajushhejsredyKrasnodarskogokrajav 2014 godu».–Krasnodar, 2015. – 170 s.

2. Safronova T.I. Verojatnostnoeocenivaniemeliorativnogosostojanijaoroshaemogopoljapriispol'zovaniibiotehnologii/ T.I. Safronova, Ja.A. Poltorak // PolitematicheskijsetevojjelektronnyjnauchnyjzhurnalKubanskogogosudarstvennogoagrarnogouniversiteta (NauchnyjzhurnalKubGAU) [Jelektronnyjresurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №07(121). S. 1778 – 1786. – IDA [article ID]: 1211607110. – Rezhimdostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/110.pdf, 0,562 u.p.l.

3. Karmanova, A. V. Konstruirovanieprofil'nyhkomponentovkursamatematiki v sistemeagrarnogoobrazovanija: avtoref. dis. kand. ped. nauk : 13.00.08 / Karmanova A.V. – Krasnodar, 2005. – 18 s.

4. Sokolova I.V. Matematicheskaja model' prinjatijaupravlencheskihreshenijnasel'skohozjajstvennompredprijatii v uslovijahriska i neopredelennosti / I.V. Sokolova // PolitematicheskijsetevojjelektronnyjnauchnyjzhurnalKubansko-go gosudarstvennogoagrarnogou-

niversiteta (NauchnyjzhurnalKubGAU) [Jelektronnyjresurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №06(120). S. 1617 – 1628. – IDA [article ID]: 1201606107. – Rezhimdostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/107.pdf, 0,75u.p.l.