УДК 338.24

08.00.00 Экономические науки

ИНСТРУМЕНТАРИЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ С УЧЕТОМ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ*

Батьковский Александр Михайлович
Доктор экономических наук, профессор
batkovskiy_a@instel.ru
Московский авиационный институт, Москва, Россия

Нестеров Виктор Антонович
Доктор технических наук, профессор,
nesterova2004@list.ru
Московский авиационный институт, Москва, Россия

Решетова Ольга Олеговна
Ассистент
ribunskih1993@mail.ru
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Хрусталёв Евгений Юрьевич
Доктор экономических наук, профессор, заведующий лабораторией
stalev@cemi.rssi.ru
Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия

Состояние любой экономической системы зависит от значений ее параметров, как в текущий период, так и в предыдущие моменты времени. Поэтому в процессе оптимизации управления производством необходимо учитывать данную особенность развития рассматриваемых систем. Важнейшей задачей экономических исследований является установление равновесной цены. Наиболее приемлемы для решения данной задачи гистерезисные преобразователи, формальное описание которых основано на их операторной трактовке. Однако, в настоящее время при анализе функций спроса и предложения используется, как правило, паутинообразная модель и ее аналоги. В данной статье рассматривается нерешенная проблема оптимизации производства продукции при условии гистерезисного ценообразования и конкуренции. Учитывая, что основным методом анализа современных экономических систем, обладающих гистерезисными свойствами, является их математическое моделирование, в статье рассматриваются различные модели ценообра-

UDC 338.24

Economic sciences

TOOLS FOR OPTIMIZING PRODUCTION MANAGEMENT TAKING INTO ACCOUNT PRICING MODELS

Batkovskiy Aleksandr Mikhaylovich
Doctor of economic sciences, professor
batkovskiy_a@instel.ru
Moscow aviation Institute, Moscow, Russia

Nesterov Viktor Antonovich
Doctor of technical sciences, professor
nesterova2004@list.ru
Moscow aviation Institute, Moscow, Russia

Reshetova Olga Olegovna
Assistant
ribunskih1993@mail.ru
Voronezh state University, Voronezh, Russia

Khrustalev Evgenii Yurevich
Doctor of economic sciences, professor, head of laboratory
stalev@cemi.rssi.ru
Central Economics and Mathematics Institute RAS, Moscow, Russia

The state of any economic system depends on the values of its parameters, both in the current period and at previous times. Therefore, in the process of optimization of production management, it is necessary to take into account this feature of the development of the systems under consideration. The most important task of economic research is the establishment of an equilibrium price. The most suitable hysteresis converters for solving this problem, the formal description of which is based on their operator interpretation. However, at present, when analyzing the functions of supply and demand, a cobweb-like model and its analogues are used, as a rule. This article discusses the unresolved problem of optimizing production under conditions of hysteresis pricing and competition. Taking into account that their mathematical modeling is the main method of analyzing economic systems with hysteresis properties, different pricing models (discrete and continuous) are considered in the article, as well as economic and mathematical tools for optimizing production activity un-

* Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-06-00028 «Оптимизация управления военно-техническим обеспечением безопасности России с учетом изменения условий ее социально-экономического развития и усиления военных угроз»

зования (дискретные и непрерывные), а также предложен экономико-математический инструментарий оптимизации производственной деятельности в условиях гистерезисного ценообразования. Разработанные модели могут быть использованы для повышения адекватности математической формализации соответствующих систем, что является основой для более точных прогнозов их развития. В условиях гистерезисного ценообразования алгоритмы оптимизации производства позволят формировать оптимальные (с точки зрения получения максимальной прибыли) ценовые и производственные стратегии развития современных экономических систем

der hysteresis pricing conditions. The developed models can be used to increase the adequacy of the formal mathematical description of the corresponding systems, which is the basis for more accurate forecasts of their development. In the conditions of hysteresis pricing, production optimization algorithms will allow to create optimal (in terms of achieving maximum profit) price and production strategies for the development of economic systems

Ключевые слова: УПРАВЛЕНИЕ, ПРОИЗВОДСТВО, ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ОПТИМИЗАЦИЯ, ИНСТРУМЕНТАРИЙ, МОДЕЛИ, ГИСТЕРЕЗИС

Keywords: MANAGEMENT, MANUFACTURING, PRICING, OPTIMIZATION, INSTRUMENTATION, MODELS, HYSTERESIS

Doi: 10.21515/1990-4665-131-079

Введение. Свойства экономических систем с гистерезисом существенно отличаются от систем, обладающих функциональными нелинейностями [2]. Объясняется данная особенность нелинейной структурой и сложностью пространства состояний различных гистерезисных преобразователей, которые трактуются как операторы, определённые на функциональных пространствах.

От своего исходного состояния они зависят, как от параметра. Динамику развития экономических систем можно описать двумя соотношениями: состояние-выход и состояние-вход, используя при этом современные информационные системы [4] и инструментарий функционально-структурного моделирования [5]. Помимо этого, математические модели различных гистерезисных преобразователей, обычно, не являются гладкими, а это повышает трудность применение традиционных классических методов и подходов к исследованию соответствующих систем [19].

Работ, в которых гистерезисный механизм ценообразования получил бы должное описание на математическом уровне, не так много, так как в большинстве работ по данной проблематике он описан на эвристическом уровне [7]. Например, гистерезисный характер ожидаемого спроса в зависимости от реального соотношения покупательской способности и цены товара. Однако, при этом отсутствуют математические модели, описывающие это отношение. Поэтому актуальность статьи обусловлена тем, что в ней рассматривается нерешенная проблема оптимального функционирования предприятий, производящих товар, в условиях конкуренции и гистерезисного ценообразования [9].

Постановка и решение задачи. Целью решения задачи является разработка аналитических и численных методов анализа моделей экономических систем и процессов, включающих в себя гистерезисные свойства. Разработанные модели и методы анализа экономических систем с гистерезисными свойствами могут быть использованы для повышения адекватность формального математического описания соответствующих систем, что является основой для более точных и адекватных прогнозов [8,14] и методов защиты от рисков [11]. А именно, в условиях гистерезисного ценообразования алгоритмы оптимизации деятельности производства позволят формировать с точки зрения достижения максимальной прибыли оптимальную ценовую и производственную стратегии [6], осуществить интеграцию эффективно работающих наукоемких производственных комплексов, которые внесут существенный вклад в обеспечение экономической и оборонной безопасности [13]. Для решения рассматриваемой задачи целесообразно использовать методы математического моделирования, потоковые модели [3], а также операторную трактовку гистерезиса. Можно отметить две принципиально разные ситуации, возникающие при изучении гистерезисных явлений. Основная задача в первой ситуации – это создать удобный и простой алгоритма построения выхода по заданным внешним воздействиям. При этом входы, как правило, имеют достаточно простую структуру, например, кусочно-линейную. Вторая задача – основная для теории регулирования [10]. Она возникает по причине того, что изучаемый объект является звеном более сложной системы и не может рассматриваться изолированно. Тогда трактовка гистерезисной нелинейности можно представить следующим образом – это оператор или совокупность операторов, определённых на достаточно богатом функциональном пространстве. Так как в работе рассматривается данный случай, то далее приведено описание гистерезисных нелинейностей. Приведем описание двухпозиционного реле с пороговыми числами α и β $(\alpha < \beta)$, пространство состояний оператора является пара чисел $\{0,1\}$. $R[\alpha, \beta, x_0]$ устанавливает связь между входом $u(t) \in C_{[0,T]}$ и переменным выходом $x(t) \in \{0,1\}$:

$$x(t) = R[\alpha, \beta, x_0]u(t) \quad . \tag{1}$$

Начальное состояние x_0 преобразователя (1) удовлетворяет условиям: если $u(0) \le \alpha$, то $x_0 = 0$; если $u(0) \ge \beta$, то $x_0 = 1$; если $\alpha < u(0) < \beta$, то $x_0 = 0$ или $x_0 = 1$. Выход $x(t)$ $(0 \le t \le T)$ совпадает с переменным состоянием преобразователя R и определяется соотношением:

$$x(t) = \begin{cases} 0, \text{ if } u(t) \le \alpha, \\ 1, \text{ if } u(t) \le \beta, \\ x_0, \text{ if } u(\tau) \in (\alpha, \beta) \text{ for all } \tau \in [0, t], \\ 0, \text{ if } u(t) \in (\alpha, \beta) \text{ provided that} \\ \qquad t_1 \in [0, t) \,\&\, u(t_1) = \alpha \,\&\, u(\tau) \in (\alpha, \beta) \text{ for all } \tau \in (t_1, t], \\ 1, \text{ if } u(t) \in (\alpha, \beta) \text{ provided that} \\ \qquad t_1 \in [0, t) \,\&\, u(t_1) = \beta \,\&\, u(\tau) \in (\alpha, \beta) \text{ for all } \tau \in (t_1, t] \end{cases} \tag{2}$$

Уравнение следующего вида:

$$f(x, u) = 0 \tag{3}$$

характеризует кривую H, которая делит плоскость на две части.

Пусть в нижней части функция $f(x, u)$ принимает положительные значения, а в верхней - отрицательные. Изучим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \tag{4}$$

с медленным управлением $u = u(t)$.

При $u(t) \equiv u_0$, уравнение (4) описывает движение точки по вертикальной прямой $u = u_0$. Состояния равновесия – это точки пересечения прямой $u = u_0$ и кривой H. Исходя из этой информации возможно качественное описание поведение решения $x(t)$ уравнения (4) при медленно меняющемся управлении $u(t)$ $(t \geq t_0)$. После короткого временного промежутка точка $\{u(t), x(t)\}$ попадает, в такую малую окрестность или точки $\{u(t), \gamma_1[u(t)]\}$, или точки $\{u(t), \gamma_2[u(t)]\}$, что ее можно считать совпадающей с данными точками. Предположим что $u(t_1) < \alpha$ и $x(t_1) \approx \gamma_1[u(t_1)]$; тогда при дальнейших значениях $t \in (t_1, t_2)$ когда $u(t) < \alpha$, точка $\{u(t), x(t)\}$ не покидает малую окрестность кривой H_1, равенство $x(t) = \gamma_1[u(t)]$ будет выполненным. Когда $u(t_2) = \alpha$ и $u(t)$ в точке t_2 увеличивается, то за временной интервал где, $u(t)$ мало меняется точка $\{u(t), x(t)\}$ попадет уже в малую окрестность кривой H_2, тогда выполняется равенство $x(t) = \gamma_2[u(t)]$. Из дальнейших рассуждений, вытекает описание решения $x(t)$, совпадающее с описанием неидеального реле, пороговые числа которого α и β, если H_1 совпадает с полупрямой $x = 0$ $(u < \alpha)$, а H_2 - с полупрямой $x = 1$ $(u > \beta)$.

Результаты. Чтобы описать ценообразование зачастую используются паутинно-образная модель в системах с дискретным временем, или уравнение вида (5) в моделях с непрерывным временем:

$$\dot{p} = \gamma(S(p) - D(p)), \tag{5}$$

где p – цена, $S(p)$ и $D(p)$ – функции спроса и предложения. Единственное стационарное решение уравнения (1) абсолютно устойчиво и быстро достигается при традиционных представлениях о функциях спроса и предложения. Подчиним модель ценообразования следующей системе:

$$\dot{p} = f(u, p), \tag{6}$$

$$\dot{u} = \gamma(S(p) - D(p)). \tag{7}$$

Линия уровня функции $f(u,p)=0$ имеет S-образную форму. Если рассматривать уравнение (6) изолированно, считая $u(t)$ управляющим параметром, то его динамика допускает следующее качественное описание. Пусть p_2 - левый корень уравнения $f(u_2,p)=0$, и p_1 правый корень уравнения $f(u_1,p)=0$. Цена будет практически не изменой, если решение p^* уравнения $S(p)=D(p)$ будет удовлетворяет следующему условию $p^*\notin[p_1;p_2]$, то у системы (6)-(7) будет единственное устойчивое решение. При условии $p^*\in[p_1;p_2]$, система будет иметь устойчивый цикл, соответствующий циклическому изменению цен в окрестностях неустойчивого положения равновесия. Таким образом, можно установить зависимость циклического изменения цен от выбора функции $f(u,p)$. Ранее производственная модель формировалась либо в терминах производственных функций, либо аппроксимировалась линейными звеном с передаточными функциями 1-2 порядка [18]. В настоящей статье формулировка производственной модели выглядит следующим образом: пусть U темп производства, z – количество товаров у производителя. Тогда для описания динамики изменения количества товара у производителя введем следующее уравнение:

$$\dot{z}=U-NQ(\frac{S}{p}), \tag{8}$$

где N – количество потребителей; S — доход потребителей; $Q(\frac{S}{p})$ – функция спроса, конкретный вид которой будет определён ниже.

За V обозначим количество товаров у потребителей, а k – коэффициент склонности к потреблению. Тогда динамика изменения :

$$\dot{V}=NQ(\frac{S}{p})-kV\ . \tag{9}$$

Определим функцию спроса следующим образом:

$$Q\left(\frac{S}{p}\right) = q - a\frac{p}{S}, \tag{10}$$

где q – максимальная потребность в продукте одного человека в единицу времени.

Как только цена возрастает, функция спроса падает и при $p = p_{cr}$ потребители отказываются от приобретения товара [12]. Величина $p_{cr} = Sq/a$. Мерой эластичности функции спроса по цене является параметр a. Отсюда, можно сделать вывод, что функция спроса, определенная видом (10) – это пороговая функция (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и ей присуще свойство насыщения. Теперь определим функцию предложения $D(p, z)$:

$$D(p, z) = z\frac{p}{p_{cr}}. \tag{11}$$

Прибыль производителя на конечном временном интервале [0;T] можно определить соотношением (12), при этом p_0 – это себестоимость производства единицы товара, а k – коэффициент затрат на хранение:

$$J(T) = \int_0^T (NpQ\left(\frac{S}{p}\right) - Up_0 - k_1 z)dt. \tag{12}$$

Предполагается, что максимальный темп производства имеет ограничения, связанные с технологическими ограничениями $0 \leq U \leq U_0, U_0$ – максимальный темп производства [16]. Тогда задача сводится к задаче оптимального управления: необходимо определить такой темп производства, при котором функционал (12) достигнет максимального значения, а система будет описана дифференциальными уравнениями (6)-(9) и алгебраическими соотношениями (10), (11). Решение данной задачи представим посредством стандартных методов теории оптимального управления. Функция Гамильтона имеет вид:

$$H = NpQ\left(\frac{S}{p}\right) - Up_0 - k_1 z + \lambda_1 f(p,u) + \lambda_2 (S(p) - D(p)) +$$
$$+ \lambda_3 (U - NQ\left(\frac{S}{p}\right)) + \lambda_4 (NQ\left(\frac{S}{p}\right) - kV) \qquad (13)$$

В силу принципа максимума Л.С. Понтрягина оптимальный темп производства будет определяться соотношением: $U^* = \arg\max_U H.$ Так как функция Гамильтона линейна по U, то оптимальный темп производства будет равен:

$$U^* = \begin{cases} U_0, & if \quad \lambda_3 \geq p_0, \\ 0, & if \quad \lambda_3 < p_0, \end{cases} \qquad (14)$$

Отсюда можно сделать вывод, что оптимальный темп производства представляет собой релейную функцию [17]. Сопряженные переменные удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial u}, \\ \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \\ \dot{\lambda}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial V}. \end{aligned} \qquad (15)$$

На сопряженные переменные накладываются граничные условия, так как изучаемая задача является задачей со свободными концами:

$$\lambda_i(T) = 0 \quad (i = 1,2,3,4). \qquad (16)$$

Система, состоящая из уравнений, (6)-(11), (14), (15) замкнута. При проведении численного анализа были рассмотрены следующие параметры: $\gamma = 2$, $k = 0{,}5$, $k_1 = 0{,}6$, $S = 5$, $q = 10$, $N = 10$, $U_0 = 3$, $T = 20$. Результаты проведенных расчетов показывают, что фазовые переменные в установившемся режиме совершают слабые колебания в окрестности неустойчивого положения равновесия. Причиной этого является гистерезисное поведение цены.

Организация управления и моделирование процесса производства и потребления продукции - это важной задача экономической стратегии [20]. Одно из значимых направлений в исследовании экономических процессов является исследование поведения экономических агентов в окрестности состояния равновесия. Отметим, что состояние экономической системы в некоторый момент времени зависит как от фиксированных значений параметров, так и от их значений в предыдущие моменты времени [1]. Такое поведение характерно для преобразователей гистерезисной природы. Введем $R[\alpha,\beta,x_0]$ для обозначения двухпозиционного реле с пороговыми числами α и β. Приведем описание частного класса преобразователей Прейсаха, для которых выполняется условие $D_{\alpha,\beta}\equiv\{\alpha,\beta:\alpha<\beta\}$. Тогда необходимо определить на полуплоскости $P_{\alpha,\beta}$ меру μ следующим равенством:

$$d\mu=\lambda(\alpha,\beta)d\alpha d\beta. \qquad (17)$$

Пусть ψ – это класс ограниченных функций, которые заданы на неотрицательной полуоси и удовлетворяют условию Липшица с коэффициентом, равным единице. Также необходимо ввести множество Ω_ψ скалярных функций $\omega(\alpha,\beta)$, заданных на полуплоскости $P_{\alpha,\beta}\equiv\{\alpha,\beta:\alpha<\beta\}$:

$$\omega(\alpha,\beta)=\begin{cases}0, & if\ \alpha+\beta>\psi(\beta-\alpha),\\ 1, & if\ \alpha+\beta\le\psi(\beta-\alpha),\end{cases} \qquad (18)$$

где $\psi(v)\in\psi$, множество Ω_ψ – пространство возможных состояний преобразователя Прейзаха.

Зададим произвольный элемент $\omega_0(\alpha,\beta)\in\Omega_\psi$ и допустимым, что для преобразователя Прейзаха (H,ξ), с начальным состоянием $\omega_0(\alpha,\beta)$, все непрерывные входы $u(t),t\ge 0$, удовлетворяющие равенству $u(0)=\psi_0(0)$, где $\omega_0(\alpha,\beta)$ и $\psi_0(v)$ связаны соотношением (18). Вход определяется соотношением:

$$\omega(\alpha(\gamma),\beta(\gamma),t) = H\left[\omega_0(\gamma)\right]u(t) = R\left[\omega_0(\alpha,\beta,\gamma),\alpha(\gamma),\beta(\gamma)\right]u(t), \quad (19)$$

где γ - параметр, $\gamma \in P_{\alpha,\beta}$.

А выход:

$$\xi(t) = \int\limits_{\alpha\le\beta} \omega(\alpha,\beta,t)d\mu = \mu(\{\alpha,\beta\} : R[\omega_0(\alpha,\beta),\alpha,\beta]u(t)=1) . \quad (20)$$

Используем модификацию описанных выше преобразователей для составления модели потребительского спроса. Пусть функция спроса $P(t)$ в момент времени t зависит только от цены $c(t)$. Тогда отношение каждого покупателя к товару определяется посредством функции $R(c(t))$:

$$R(c(t)) = \begin{cases} 1, & if \quad c(t) \le \alpha(t), \\ 0, & if \quad c(t) \ge \beta(t), \\ 1 \quad or \quad 0, & if \quad \alpha(t) < c(t) < \beta(t). \end{cases} \quad (21)$$

Когда товар покупается, то функция $R(c(t))$ равна единице, в противном случае нуль. Функцию $R(c(t))$ определена как выход некоторого преобразователя $R[\alpha(t),\beta(t),R_0]$, аналогом которого является неидеальное реле с инверсией пороговых чисел α,β, на вход которого подается сигнал $c(t)(t \ge 0)$. Также возможно учитывать изменение отношения к товару покупателем с течением времени, так как пороговые числа $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ зависят от времени. Обозначая γ_i темп покупок i-го потребителя $(i = 1, 2 \ldots n)$, система из n потребителей принимает вид:

$$P(c(t)) = \sum \gamma_i R[\alpha_i(t),\beta_i(t),R_{0i}]c(t) . \quad (22)$$

В непрерывном случае функция продаж представляет собой аналог преобразователя Прейзаха с инверсией единиц и нулей:

$$P(c(t)) = \int\limits_{\alpha\le\beta} \omega(\alpha(t),\beta(t),t)d\mu(t) , \quad (23)$$

где

$$\omega(\alpha(t),\beta(t),t) = H[\omega_0(\alpha,\beta)]c(t) = R[\alpha(\gamma,t),\beta(\gamma,t),R_0(\gamma)]c(t) , \ \gamma \in P_{\alpha,\beta} . \quad (24)$$

Непрерывный аналог неидеального реле учитывает возможные изменения индивидуальных отношений потребителя к товару. В модели это отражается посредством зависимости меры μ от времени. Равновесие в рыночных механизмах возможно в том случаи, когда спрос и предложение равны и осуществляется эффективное распределение ресурсов. Решение этой задачи базируется на модели потребительского спроса, которая учитывает его инертность и возможность структурных изменений. В рассмотрении участвует исключительно монотоварный рынок, главной особенностью которого, является то, что купля-продажа различных товаров происходит напрямую между потребителями и производителями. В момент времени n рыночный товар продается по цене c_n; поведение всех потенциальных потребителей формализуется с помощью функции спроса $P(c)$, конкретный вид которой должен определять преобразователь; описать поведение производителей можно посредством функции предложения товара $g(c)$ (ниже будет приведен ее аналитический вид). Необходимо отметим, что изменений функций предложения и спроса происходит за гораздо большее время по сравнению с временем, требующемся на изменения цены [21]. Предполагается, что производители предлагают товар по цене $c_{n\text{-}1}$, которая была у него раньше (в момент времени $n\text{-}1$), а продают его уже измененной во времени цене c_n. Потребители, однако, готовы купить товар, по предыдущей цене $P(c_{n\text{-}1})$ и готовы заплатить за него именно предыдущую цену $c_{n\text{-}1}$. Тогда равновесие предложения и спроса определяется соотношением:

$$c_n q(c_{n-1}) = c_{n-1} q(c_{n-1}) \,. \tag{25}$$

Основываясь на работы Г.С. Поспелова, определим функцию:

$$g(p_{n-1}, t) = \int\limits_{\nu}^{c_{n-1}/s} \xi(\lambda, t) d\lambda \,, \tag{26}$$

где t – соответствует изменению производственных мощностей, другими словами "медленное время, а n – дискретное «быстрое время», отвечает процессам связанным с изменением цены, $\xi = \xi(\lambda, t)$ – гладкая функция распределения мощностей по технологиям производства.

В режиме особого экспоненциального роста динамики новых технологий с темпом γ:

$$I(t) = M(\tau_0)(\gamma + \mu)e^{\gamma(t-\tau_0)} \tag{27}$$

с начальным распределением мощностей $\xi(\lambda, \tau_0)$, и функцией предложения $g(p,t)$ при $\tau_0 \le t \le \tau$.

Покажем, что:

$$g(c_{n-1}, t) = M(t)\left[1 - \left(\frac{s\nu}{c_{n-1}}\right)^{(\gamma+\mu)/\mu}\right]. \tag{28}$$

Обозначим:

$$x_n = \frac{s\nu}{p_n}, \quad \alpha = \frac{\gamma+\mu}{\mu} \ge 1, \quad A(t) = \frac{M(t)}{P(c)}, \tag{29}$$

где $P(c)$ определим как выход в момент $t = 1$ преобразователя, на вход которого подается сигнал:

$$\phi(t) = tc_n + (1-t)c_{n-1}, \tag{30}$$

другими словами линейная функция, соединяющая предыдущее и нынешнее значение цены.

Следовательно:

$$x_n = A(t)x_{n-1}(1 - x_{n-1}^{\alpha}). \tag{31}$$

Исходя из предположения, что наилучшая технология неубыточна $x_n = s\nu / c_n \le 1$. Тогда получаем $0 \le x_n \le 1$. Чтобы перевести отрезок $[0,1]$ в себя посредством отображение (31), необходимо и достаточно:

$$0 \le A(t) \le \frac{(1+\alpha)^{(1+\alpha)/\alpha}}{\alpha} = A_M(\alpha). \tag{32}$$

Дискретная динамическая система, в которой специфическое (медленное) время t служит параметром, определяется отображением (31).

Модель ценообразования описанная выше $x_{n+1} = f(x_n, A, \alpha)$, где $f(x, A, \alpha) = Ax(1 - x^{\alpha})$, способна по заданному начальному условию x_0 однозначно определить бесконечную траекторию $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$. Учитывая гипотезу о разделении времен, изучим асимптотическое (при $n \to \infty$) поведения цены. $x = 0$ - является неподвижной точкой динамической системы (31) при всех $A \geq 0,\ \ \alpha \geq 1$. При иных значениях параметров $A \geq 1,\ \ \alpha \geq 1$ существует еще одна неподвижная точка $x_p(A, \alpha) = (1 - 1/A)^{1/\alpha}$, соответствующая равновесной цене. Единственная траектория, где прогноз цены производителя и потребителя совпадает с реализацией и производство согласовано со спросом, определяется точной $x_p(A, \alpha)$.

Проведем анализ зависимости увеличения параметра A и асимптотического поведения траекторий динамической системы (31). Когда $0 \leq A < 1$, то вне зависимости от начального условия x_0 траектория системы (31) стремится к 0. Бифуркация происходит при A=1, в результате неподвижная точка $x = 0$ становится неустойчивой, и рождается устойчивая (при A, близких к 1) неподвижная точка $x_p(A, \alpha)$. В работе установлена зависимость эффективного использования органом управления экономических ресурсов от параметров устойчивости рыночных отношений, в представленной модели они определяются параметрами $A_1(\alpha), A_2(\alpha), \ldots, A_{\infty}(\alpha)$. При увеличении предложений продукции диапазон устойчивости традиционных рыночных механизмов уменьшается, что согласуется с представлением экономистов о перегретой экономике.

Обобщим результаты, полученные ранее: предположим, взаимодействие производителя и посредника, который в свою очередь, продает товар конечному потребителю. В данных условиях задача является многокритериальной, так как целью и потребителя, и посредника является максимизация своего дохода. Основными параметрами, при рассмотрении многокритериальной задачи о производстве, потреблении и сбыте товара при наличие посредника, являются следующие: $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, $Z_3(t)$ – количество товара у производителя, посредника и потребителя. Темп производства определим, как $U(t)$. $P_1(t)$, $P_2(t)$ – количество продаж в единицу времени производителем и посредником. k_1 – коэффициент потребления, k_2 – коэффициент затрат на хранение единицы товара производителя, k_3 – коэффициент затрат на хранение единицы товара посредника, $c_1(t)$, $c_2(t)$ - цена единицы товара у производителя и посредника. Изменения введенных величин можно описать следующей системой уравнений:

$$\dot{Z}_1 = U - P_1, \tag{33}$$

$$\dot{Z}_2 = P_1 - P_2, \tag{34}$$

$$\dot{Z}_3 = P_2 - kZ_3, \tag{35}$$

$$P_1 = Z_1(a_1 - b_1 c_1), \tag{36}$$

$$P_2 = Z_2(a_2 - b_2 c_2), \tag{37}$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 - положительные постоянные.

Функционал определяющий прибыль:

$$J_1 = \int_0^T (c_1 P_1 - k_1 U - k_2 Z_1) dt \to \max, \tag{38}$$

$$J_2 = \int_0^T (c_2 P_2 - c_1 P_1 - k_3 Z_2) dt \to \max. \tag{39}$$

Выразим взвешенный доход $J(t)$ учитывая введенные обозначения:

$$J(\alpha) = \alpha J_1 + (1-\alpha) J_2, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} J(\alpha) = \int_0^T (&2\alpha c_1 P_1 - c_1 P_1 - k_1 U - k_2 Z_1 - k_3 Z_2 + c_2 P_2 - \\ &- \alpha c_2 P_2 + \alpha k_3 Z_2) dt \to \max. \end{aligned} \tag{41}$$

Применив принцип максимума Л. С. Понтрягина и составив функцию Гамильтона, получим:

$$\begin{aligned} H = {}& 2\alpha c_1 P_1 - c_1 P_1 - k_1 U - k_2 Z_1 - k_3 Z_2 + c_2 P_2 - \alpha c_2 P_2 + \\ &+ \alpha k_3 Z_2 - \lambda_1 (U - P_1) - \lambda_2 (P_1 - P_2) - \lambda_3 (P_2 - kZ_3) \end{aligned}, \tag{42}$$

$$U^* = \begin{cases} 0, \lambda_1 + k_1 \le 0, \\ U_0, \lambda_1 + k_1 > 0. \end{cases} \quad (43)$$

Уравнение для сопряженные переменные имеют вид:

$$\dot{\lambda}_3 = 0, \ \ \dot{\lambda}_2 = c_2(1-\alpha) - \frac{k_3(1-\alpha)}{a_2 - b_2 c_2}, \quad (44)$$

$$\dot{\lambda}_1 = c_2(1-\alpha) - \frac{k_3(1-\alpha)}{a_2 - b_2 c_2} + c_1(1-2\alpha) + \frac{\alpha k_2}{a_1 - b_1 c_1}, \quad (45)$$

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = 0. \quad (46)$$

Из (45) максимизируя по c_1 и c_2:

$$c_1^* = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2(2\alpha - 1)} + \frac{a_1}{2b_1}, \quad (47)$$

$$c_2^* = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{2(1-\alpha)} + \frac{a_2}{2b_2} \ . \quad (48)$$

При α=0,5 частное решение выглядит следующим образом:

$$J_1 = \int_0^T (c_1 p_1 - k_1 u - k_2 z_1) dt \to \max, \quad (49)$$

$$J_2 = \int_0^T (c_2 p_2 - c_1 p_1 - k_3 z_2) dt \to \max \ . \quad (50)$$

Определим взвешенный доход $J(t)$:

$$J = J_2 + J_1 = \int_0^T (c_2 p_2 - k_1 u - k_2 z_1 - k_3 z_2) dt \to \max. \quad (51)$$

Гамильтониан принимает вид:

$$H = c_2 p_2 - k_1 u - k_2 z_1 - k_3 z_2 - \lambda_1(u - p_1) - \lambda_2(p_1 - p_2) - \lambda_3(p_2 - k z_3). \quad (52)$$

Тогда решение:

$$\dot{\lambda}_3 = 0 \quad (53)$$

$$\dot{\lambda}_2 = c_2 - \frac{k_3}{a_2 - b_2 c_2} \quad (54)$$

$$\dot{\lambda}_1 = c_2 - \frac{k_3}{a_2 - b_2 c_2} + \frac{k_2}{a_1 - b_1 c_1} \quad (55)$$

$$U^* = \begin{cases} 0, \lambda_1 + k_1 \geq 0, \\ U_0, \lambda_1 + k_1 < 0 \end{cases} \tag{56}$$

$$c_1^* = \begin{cases} 0, \lambda_1 - \lambda_2 < 0, \\ c_{1\max}^*, \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \tag{57}$$

$$c_2^* = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{2} + \frac{a_2}{2b_2} \ . \tag{58}$$

Рассмотрим функционал

$$J(\alpha) = \alpha J_1 + (1-\alpha) J_2 \to \min \ . \tag{59}$$

$Z^*(t,\alpha)$, $c^*(t,\alpha)$ оптимальное решение (54)-(59), в условиях гладкой зависимости функционала от параметра α:

$$J^* = \int_0^{t_f} \alpha f_1(Z^*(\alpha,t), c^*(\alpha,t)) + (1-\alpha) f_2(z^*(\alpha,t), c^*(\alpha,t)) \ . \tag{60}$$

Из условия $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_0^{t_f} (f_1 - f_2) + \alpha(\frac{df_1}{dZ} * \dot{Z}_\alpha^* + \frac{df_1}{dc} * \dot{Z}_\alpha^*) + (1-\alpha)\left[f_2 \frac{df}{dZ} * Z_\alpha^* + \frac{df_2}{dc} * c \right] \partial t =$$
$$= \int_0^{t_f} \left[(f_1 - f_2) + \dot{Z}_\alpha^* (\alpha \frac{df_1}{dZ} + (1-\alpha)\frac{df_2}{dZ}) + \dot{c}_\alpha^* (\alpha \frac{df_1}{dc} + (1-\alpha)\frac{df_2}{dc}) \right] dt \tag{61}$$

Так же:

$$H = \alpha f_1 + (1-\alpha) f_2 + \lambda f \ . \tag{62}$$

Если траектории оптимальны, то:

$$\frac{dH}{dc} = 0; \ \dot{\lambda} = -\frac{dH}{dZ}, \tag{63}$$

тогда:

$$\alpha \dot{f}_1 \ c + (1-\alpha) \dot{f}_2 + \lambda \dot{f}_c = 0, \tag{64}$$

$$\dot{\lambda} = -(\alpha \dot{f}_{1Z} + (1-\alpha) \dot{f}_{2Z} + \lambda \dot{f}_Z), \tag{65}$$

$$\alpha \dot{f}_{1c} + (1-\alpha) \dot{f}_{2c} = -\lambda \dot{f}_c \ , \tag{66}$$

$$\alpha \dot{f}_{1Z} + (1-\alpha) \dot{f}_{2Z} = -\dot{\lambda} - \lambda \dot{f}_Z \ . \tag{67}$$

Подставим (66) и (67) в (61)

$$\frac{dJ^*}{d\alpha} = \int_0^{t_f} \left[(f_1 - f_2) + \dot{Z}_\alpha^* (-\dot{\lambda} - \lambda \dot{f_c}\ ) + \dot{c}_\alpha^* (-\lambda \dot{f_c} \right] dt =$$

$$= \int_0^{f_t} \left[(f_1 - f_2) - \dot{Z}_\alpha^* \dot{\lambda} - \lambda (\dot{f}_Z * \dot{Z}_\alpha^* + \dot{f}_c * \dot{c}_\alpha^*) \right] dt = \qquad (68)$$

$$= \int_0^{t_f} \left[(f_1 - f_2) - \dot{Z}_\alpha^* \dot{\lambda} - \lambda \frac{df}{d\alpha} \right] dt$$

Преобразуем второе слагаемое (68):

$$-\int_0^{t_f} \dot{Z}_\alpha^* \dot{\lambda}\ dt = -\int_0^{t_f} Z^* d\lambda = -\dot{Z}_\alpha^* \lambda |_0^{t_f} + \int_0^{t_f} \lambda \frac{d}{dt} \dot{Z}_\alpha^* dt =$$

$$= -Z^* \lambda(t_f) + \dot{Z}_\alpha^* \lambda(0) + \int_0^{t_f} \lambda \dot{Z}_\alpha^* dt = \dot{Z}_\alpha^*(0)\lambda(0) + \int_0^{t_f} \lambda \frac{d}{d\alpha} f dt \qquad (69)$$

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_0^{t_f} \left[(f_1 - f_2) + \lambda \frac{df}{d\alpha} - \lambda \frac{df}{d\alpha} \right] dt + (\dot{Z}_\alpha^*(0), \lambda(0))$$

При $\frac{dJ}{dt} = 0$, выполняется равенство:

$$\int_0^{t_f} (f_1(Z^*, c^*) - f_2(Z^*, c^*)) dt = (-\dot{Z}_\alpha^*(0), \lambda(0)) \ . \qquad (70)$$

Заключение. В ходе исследования была построена математическая модель для решения многокритериальной задачи о производстве, хранении и сбыте продукции при условии конкуренции критериев исходя из условий интересов посреднических и торговых организаций. Также было получено численное решение для сформулированной задачи. Удалось установить зависимость взвешенного функционала прибыли от параметров для многокритериальной задачи. Предложенный численный алгоритм позволяет находить оптимальное решение задачи о производстве, потреблении и сбыте товара при наличии посредника.

Как показали результаты моделирования, учет гистерезисных свойств существенно усложняет анализ разнообразных экономических систем [15]. Это объясняется тем, что выход гистерезисного звена зависит не только от значения входа в некоторый момент времени, но и от состояния гистерезисного преобразователя и значении входа в предыдущий момент времени. Экономические системы обладают схожими свойствам, поэтому использование аппарата гистерезисных преобразователей для анализа их динамики представляется уместным и оправданным [22].

Одним из результатов работы является разработка метода исследования динамики ценообразования в условиях гистерезисного поведения экономических агентов. Предложенная модель на формальном уровне, учитывает инерцию потребительского спроса, что позволяет повысить адекватность математического моделирования потребительского поведения. Традиционно, поведение отдельного потребителя (а также их однородных групп) моделировалось посредством функции полезности, что не позволяло учесть склонность потребителей покупать «известный» ему товар. Следующий результат касается разработки модели оптимальной производственной стратегии в условиях гистерезисного ценообразования. В частности, на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина получены условия, обеспечивающие максимизацию прибыли производителя на монотоварных рынках.

Литература

1. Авдонин Б.Н., Батьковский А.М., Хрусталёв Е.Ю. Методический подход к определению контрактных цен на продукцию военного назначения // Электронная промышленность. 2014. №3. С. 59-68.

2. Авдонин Б.Н., Батьковский А.М., Хрусталёв Е.Ю. Оптимизация управления развитием оборонно-промышленного комплекса в современных условиях // Электронная промышленность. 2014. №3. С. 48-58.

3. Барановская Т.П., Лойко В.И. Потоковые модели эффективности интегрированных производственных структур // Политематический сетевой электронный научный журнал КубГАУ. 2006. № 23. С. 121-132.

4. Барановская Т.П., Лойко В.И., Семенов М.И., Трубилин И.Т. Информационные системы и технологии в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2003. 416 с.

5. Барановская Т.П., Симонян Р.Г., Вострокнутов А.Е. Теория систем и системный анализ (функционально-структурное моделирование). – Краснодар: КубГАУ, 2011. 230 с.

6. Батьковский А.М. Методологические проблемы совершенствования анализа финансовой устойчивости предприятия радиоэлектронной промышленности // Эконо-

мика, предпринимательство и право. 2011. № 1. С. 30-44.

7. Батьковский А.М. Методологические основы формирования программ инновационного развития предприятий радиоэлектронной промышленности // Экономика, предпринимательство и право. 2011. № 2. С. 38-54

8. Батьковский А.М. Стратегическое инвестиционное планирование развития предприятий оборонно-промышленного комплекса // Институциональные и инфраструктурные аспекты развития экономических наук: сборник статей Международной научно-практической конференции (10 февраля 2015 г.). - Уфа: Научный центр «Аэтерна». 2015. С. 33-34.

9. Батьковский А.М. Прогнозирование и моделирование инновационного развития экономических систем. - М.: онтоПринт. 2011. 202 с.

10. Батьковский А.М., Батьковский М.А., Хрусталёв Е.Ю. и др. Оптимизация программных мероприятий развития оборонно-промышленного комплекса. - М.: Тезаурус, 2014. 504 с.

11. Батьковский А. М., Хрусталёв Е.Ю., Хрусталёв О.Е., Фомина А.В. Экономическая защита наукоемких отраслей оборонно-промышленного комплекса // Вопросы радиоэлектроники. 2015. № 5. С. 265-280.

12. Бородакий Ю.В., Авдонин Б.Н., Батьковский А.М. и др. Моделирование процесса разработки наукоемкой продукции в оборонно-промышленном комплексе // Вопросы радиоэлектроники, серия ЭВТ. 2014. № 2. С. 21-34.

13. Викулов С.Ф., Хрусталёв Е.Ю. Военно-экономический анализ современных оборонных проблем России // Экономический анализ: теория и практика. 2012. № 12. С. 2-9.

14. Лавринов Г.А., Хрусталёв Е.Ю. Методы прогнозирования цен на продукцию военного назначения // Проблемы прогнозирования. 2006. № 1. С. 87-96.

15. Лебедев Г.Н., Матвеев М.Г., Мишин М.Ю. и др. Динамическая модель оптимального производства в условиях гистерезисного поведения цены // Современная экономика: проблемы и решения. №7 (19). С.162-169.

16. Семенов М.Е., Лебедев Г.Н., Матвеев М.Г. Оптимальное управление в задаче о выборе производственной и ценовой стратегии // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 4.1 (38). С.71-73.

17. Семенов М.Е. Математическое моделирование устойчивых периодических режимов в системах с гистерезисными нелинейностями. - Воронеж: ВГУ. 2002. 104 с.

18. Хрусталёв Е.Ю., Батьковский М.А., Кушнер А.В. Моделирование инновационной стратегии высокотехнологичного предприятия // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. № 1. С. 181-183.

19. Экономическая теория. Концептуальные основы и практика / Под общей редакцией В.Ф. Максимовой. – М.: Издательство «Юнити-Дана», 2012. 751 с.

20. Batkovskiy A.M., Batkovskiy M.A., Semenova E.G., Fomina A.V., Khrustalev E.Iu. Linguistic Analysis of High-Tech Production Complex // Mediterranean Journal of Social Sciences. 2015. Vol. 6. № 4. P. 130-139.

21. Batkovskiy A.M., Khrustalev E.Yu., Khrustalev O.E. et al. Models and methods for evaluating operational and financial reliability of high-tech enterprises // Journal of Applied Economic Sciences. Romania: European Research Centre of Managerial Studies in Business Administration. Volume XI. Issue 7 (45). Winter 2016. P. 1384-1394.

22. Batkovskiy A.M., Nesterov V.A., Reshetova O.O. et al. Dynamic model of optimal production management in a hysteretic behavior of economic agents // European Research Studies Journal. 2017. T. 20. № 2A. P. 355-379.

References

1. Avdonin B.N., Batkovskiy A.M., Khrustalev E.Yu. Metodicheskij podhod k opredeleniju kontraktnyh cen na produkciju voennogo naznachenija // Jelektronnaja promyshlennost'. 2014. №3. S. 59-68.

2. Avdonin B.N., Batkovskiy A.M., Khrustalev E.Yu. Optimizacija upravlenija razvitiem oboronno-promyshlennogo kompleksa v sovremennyh uslovijah // Jelektronnaja promyshlennost'. 2014. №3. S. 48-58.

3. Baranovskaya T.P., Lojko V.I. Potokovye modeli ehffektivnosti integrirovannyh proizvodstvennyh struktur // Politematicheskij setevoj ehlektronnyj nauchnyj zhurnal KubGAU. 2006. № 23. S. 121-132.

4. Baranovskaya T.P., Lojko V.I., Semenov M.I., Trubilin I.T. Informacionnye sistemy i tekhnologii v ehkonomike. – M.: Finansy i statistika, 2003. 416 s.

5. Baranovskaya T.P., Simonyan R.G., Vostroknutov A.E. Teoriya sistem i sistemnii analiz funkcionalno_strukturnoe modelirovanie,. – Krasnodar_ KubGAU_ 2011. 230 s.

6. Batkovskiy A.M. Metodologicheskie problemy sovershenstvovanija analiza finansovoj ustojchivosti predprijatija radiojelektronnoj promyshlennosti // Jekonomika, predprinimatel'stvo i pravo. 2011. № 1. S. 30-44.

7. Batkovskiy A.M. Metodologicheskie osnovy formirovanija programm innovacionnogo razvitija predprijatij radiojelektronnoj promyshlennosti // Jekonomika, predprinimatel'stvo i pravo. 2011. № 2. S. 38-54.

8. Batkovskiy A.M. Strategicheskoe investicionnoe planirovanie razvitija predprijatij oboronno-promyshlennogo kompleksa // Institucional'nye i infrastrukturnye aspekty razvitija jekonomicheskih nauk: sbornik statej Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii (10 fevralja 2015 g.). - Ufa: Nauchnyj centr «Ajeterna». 2015. S. 33-34.

9. Batkovskiy A.M. Prognozirovanie i modelirovanie innovacionnogo razvitija jekonomicheskih sistem. - M.: ontoPrint. 2011. 202 s.

10. Batkovskiy A.M., Batkovskiy M.A., Khrustalev E.Yu. i dr. Optimizacija programmnyh meroprijatij razvitija oboronno-promyshlennogo kompleksa. - M.: Tezaurus. 2014. 504 s.

11. Batkovskiy A.M., Khrustalev E.Yu., Khrustalev O.E., Fomina A.V. Yekonomicheskaja zashita naukoemkih otraslei oboronno-promyshlennogo kompleksa // Voprosy radioyelektroniki. 2015. № 5. S. 265-280.

12. Borodakij Ju.V., Avdonin B.N., Batkovskiy A.M. i dr. Modelirovanie processa razrabotki naukoemkoj produkcii v oboronno-promyshlennom komplekse // Voprosy radiojelektroniki, serija JeVT. 2014 № 2. S. 21-34.

13. Vikulov S.F., Khrustalev E.Yu. Voenno-yekonomicheskii analiz sovremennyh oboronnyh problem Rossii // Yekonomicheskii analiz: teorija i praktika. 2012. № 12. S. 2-9.

14. Lavrinov G.A., Khrustalev E.Yu. Metody prognozirovanija cen na produkciyu voennogo naznachenija // Problemy prognozirovanija. 2006. № 1. S. 87-96.

15. Lebedev G.N., Matveev M.G., Mishin M.Ju. i dr. Dinamicheskaja model optimalnogo proizvodstva v uslovijah gisterezisnogo povedenija ceny // Sovremennaja jekonomika: problemy i reshenija, №7 (19). S.162-169.

16. Semenov M.E., Lebedev G.N., Matveev M.G. Optimal'noe upravlenie v zadache o vy-bore proizvodstvennoj i cenovoj strategii // Sistemy upravlenija i informacionnye tehnologii. 2009. № 4.1 (38). S. 71-73.

17. Semenov M.E. Matematicheskoe modelirovanie ustojchivyh periodicheskih rezhimov v

sistemah s gisterezisnymi nelinejnostjami. - Voronezh: VGU, 2002. 104 s.

18. Khrustalev E.Yu., Batkovskiy M.A., Kushner A.V. Modelirovanie innovacionnoj

strategii vysokotehnologichnogo predprijatija. Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki. 2008. T. 15. № 1. S. 181-183.

19. Yekonomicheskaja teorija. Konceptual'nye osnovy i praktika / Pod obshei redakciei V.F. Maksimovoi. – M.: Izdatel'stvo «YUniti-Dana», 2012. 751 s.

20. Batkovskiy A.M., Batkovskiy M.A., Semenova E.G., Fomina A.V., Khrustalev E.Iu. Linguistic Analysis of High-Tech Production Complex // Mediterranean Journal of Social Sciences. 2015. Vol. 6. № 4. P. 130-139.

21. Batkovskiy A.M., Khrustalev E.Yu., Khrustalev O.E. et al. Models and methods for evaluating operational and financial reliability of high-tech enterprises // Journal of Applied Economic Sciences. Romania: European Research Centre of Managerial Studies in Business Administration. Volume XI. Issue 7 (45). Winter 2016. P. 1384-1394.

22. Batkovskiy A.M., Nesterov V.A., Reshetova O.O. et al. Dynamic model of optimal production management in a hysteretic behavior of economic agents // European Research Studies Journal. 2017. T. 20. № 2A. P. 355-379.