УДК 517.98: 330.4

01.00.00 Физико-математические науки

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБРАТНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Лайпанова Зульфа Мисаровна
к.ф.-м.н., доцент

Бостанова Фатима Ахмедовна
к.ф.-м.н., доцент

Урусова Аза Сейпуловна
доцент, *Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Карачаевск, КЧР, Россия, ул. Ленина,29*

Статья продолжает цикл проводимых ими исследований, связанных с формулировкой и разработкой методик построения неотрицательных решений обратных задач динамических систем. На практике были разработаны и апробированы математические модели динамических систем. В основу этих моделей были положены аппарат линейной алгебры, математического анализа, математического программирования, дифференциальных уравнений, методов оптимизации, теории оптимального управления, теории вероятностей, стохастических процессов, исследования операций, теории игр, статистического анализа. Обратные задачи в различных моделях математической экономики рассматривались редко. Данные задачи достаточно подробно исследовались при изучении физических процессов. Как показал анализ теоретических и прикладных исследований экономических процессов они представляют значительный интерес для практики. Поэтому, рассматриваемая в статье обратная задача математической модели, как показывают уже внедрённые результаты других математических моделей, представляют значительный интерес в прикладных и теоретических исследованиях. В работе поставлены и исследованы обратные задачи для динамических систем нулевого порядка и модель Кейнса. Для их решения авторы предлагают построить системы алгебраических уравнений, затем, применяя методы квадратичного программирования, найти наилучшее в среднем квадратическом оценки параметра модели, решения которых определяются в среде MS Excel

Ключевые слова: ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

UDC 517.98: 330.4

Physical and Mathematical sciences

MATHEMATICAL METHODS OF RESEARCH OF INVERSE DYNAMIC ECONOMIC SYSTEMS

Laipanova Zulfa Misarovna
Candidate of Phys.-M., associate Professor

Bostanova Fatima Akhmatovna
Candidate of Phys.-M., associate Professor

Urusova Aza Saipulovna
associate Professor
Karachay-Chercassian state University named after U. D. Aliev, Karachaevsk, Karachay-Cherkessia, Russia

The article continues the cycle of their studies associated with the formulation and development of methods of construction of nonnegative solutions of inverse problems for dynamic systems. In practice, we have developed and tested mathematical models of dynamic systems. The basis of these models was based on the apparatus of linear algebra, mathematical analysis, mathematical programming, differential equations, optimization methods, optimal control theory, probability theory, stochastic processes, operations research, game theory, statistical analysis. The inverse problem in various models of mathematical Economics was considered rare. These tasks were sufficiently well investigated in the study of physical processes. As shown by the analysis of the theoretical and applied studies of economic processes they represent considerable interest for practice. Therefore, the article considered the inverse problem of the mathematical model, as shown already introduced the results of other mathematical models, are of considerable interest in applied and theoretical research. In this article the authors formulated and investigated the inverse problem for dynamical systems zero-order and the model of Keynes. For their solution, the authors propose to build a system of algebraic equations, then, using methods of quadratic programming, to find the best average of mean square estimation of the model parameter, which are defined in MS Excel

Keywords: DIRECT AND INVERSE PROBLEMS, QUADRATIC PROGRAMMING, MATHEMATICAL MODELING, DYNAMIC SYSTEMS

Doi: 10.21515/1990-4665-127-007

Введение

В данной статье сформулирована обратные задачи экономических динамических систем[1]: акселератор и модель Кейнса.

Метод решения проиллюстрирован на статистическом материале по Северо-Кавказскому округу[6].

Для этой модели предложен метод решения обратной задачи, основанный на сведении обратной задачи к задаче квадратичного программирования.

Задачу квадратичного программирования предлагается решать инструментальными средствами: с помощью надстройки «Поиск решения» в среде MS Excel.

Цель проведённого исследования – разработать математические методы решения обратных задач экономических динамических систем и использовать полученные результаты для анализа и прогноза развития экономик Северо-Кавказского и Южного федеральных округов в целом и Карачаево-Черкесской республики, в частности.

1. Постановка задачи линейной динамической системы

Линейный динамический элемент n-го порядка задаётся следующим дифференциальным уравнением[1]:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = \sum_{i=0}^{n} b_i x^{(i)} . \quad (1)$$

На практике часто встречается элементы нулевого порядка: мультипликатор и акселератор.

Определение 1. [1] Мультипликатор-это линейное статическое звено, задаваемое уравнением:

$$a_0 y = b_0 x \text{ или } y = \alpha x, \tag{2}$$

где $\alpha = \dfrac{b_0}{a_0}$ – коэффициент усиления.

Валовые инвестиции I, например, связаны с валовым внутренним продуктом Y (ВВП) следующим образом:

$$Y = \frac{1}{\rho} I, \tag{3}$$

где ρ – доля валовых инвестиций в ВВП, а $\dfrac{1}{\rho}$ – коэффициент усиления или мультипликатор, который показывает, насколько должен быть увеличен ВВП для увеличения валовых инвестиций на единицу.

Прямая задача: по заданным ρ и I определить Y.

В рамках модели (3) рассмотрим обратную задачу: по заданным Y и I найти коэффициент усиления.

Подробнее остановимся на следующем звене – акселераторе.

Определение 2.[1] Акселератор – это дифференцирующее звено нулевого порядка, выход которого пропорционален скорости входа.

Инвестиции могут быть выражены через скорость изменения ВВП следующим образом:

$$I = r\frac{dY}{dt}, \tag{4}$$

где Y – валовый внутренний продукт;

I – валовые инвестиции;

r – коэффициент акселерации.

Коэффициент акселерации показывает прирост потребности в инвестициях при увеличении ВВП на единицу.

Прямая задача: по заданным в (4) коэффициента акселерации r и изменениям $Y(t)$ найти инвестиции I.

В этой статье в рамках модели (4) рассматривается другая задача [2]: по заданным модели в текущий момент времени $t \in [0, T]$ и изменениям валового внутреннего продукта $Y(t)$ найти неизвестные коэффициенты акселерации, т.е. прирост потребности в инвестициях при увеличении ВВП на единицу.

Сформулированную задачу будем называть **обратной задачей** в рамках модели (4).

Постановка обратной задачи имеет смысл в силу того, что прямая задача поставлена корректно[3].

Действительно, данное уравнение является линейным с коэффициентом r будем предполагать, что $I(t)$ является непрерывной функцией на $[0,T]$.

Тогда (4) имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от r и $Y(t)$. Следовательно, задача (4) поставлено корректно, а значит, в силу (4) поставлена и обратная задача.

2. Метод решения поставленной задачи

На практике значения $I(t)$ и $Y(t)$ в дискретные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n \in [0,T], \quad t_0 < t_1 < \dots < t_n$ задаются таблично (см. табл.1).

Таблица 1.

t_0	t_1	t_2	…	t_n
$I(t_0)$	$I(t_1)$	$I(t_2)$	…	$I(t_n)$
$Y(t_0)$	$Y(t_1)$	$Y(t_2)$	…	$Y(t_n)$

Из модели (4) и данных таблицы 1. вытекает следующая система алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} I(t_0) = rY'(t_0), \\ I(t_1) = rY'(t_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ I(t_n) = rY'(t_n), \end{cases} \qquad (5)$$

в которой неизвестными является r (производные $Y'(t_1), Y'(t_2), \dots Y'(t_n)$ находим численными методами [4]).

Построив решения этих систем, найдём m приближённых значений r : $r_1, r_2, \dots, r_m$.

Решая задачу квадратичного программирования

$$(r - r_1)^2 + (r - r_2)^2 + \dots + (r - r_m)^2 \to \min_r . \qquad (6)$$

с помощью средств Microsoft Excel найдём наилучшие в среднем квадратическом смысле оценку $\bar{r}$ соответствующей параметру r [5].

Пример 1. [6] Пусть значения $I(t)$ и $Y(t)$ в дискретные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, T], \quad t_0 < t_1 < \dots < t_n$ заданы таблично (см. табл.2).

Таблица 2.

t	$t_0(2009)$	$t_1(2010)$	$t_2(2011)$	$t_3(2012)$
Y	64081,4	75327,4	85876,7	99715,0
I	13926,	16203,9	19926,6	21824,9

Решение.

Построим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} I(t_1) = r_1(Y_1 - Y_0), \\ I(t_2) = r_2(Y_2 - Y_1), \Rightarrow \\ I(t_1) = r_3(Y_3 - Y_2), \end{cases} \begin{cases} 13926{,}6 = r_1 11246, \\ 16203{,}9 = r_2 10550, \\ 19926{,}6 = r_3 13839. \end{cases}$$

Из последней системы находим: $r_1 = 1{,}24, \quad r_2 = 1{,}54, \quad r_3 = 1{,}44.$

Покажем, что задача построения по методу наименьших квадратов оценки $\bar{r}$ параметра r по выборочным данным сводится к следующей задаче квадратичного программирования: найти оценки $\bar{r}$, которая доставляет минимум выражению:

$$(r - 1{,}24)^2 + (r - 1{,}54)^2 + (r - 1{,}44)^2 \to \min_r .$$

С помощью средств Microsoft Excel найдём наилучшие в среднем квадратическом смысле оценку $\bar{r}$ соответствующей параметру r: $\bar{r} = 0,046667$.

Этапы проведённых вычислений представлены на рис. 1-6.

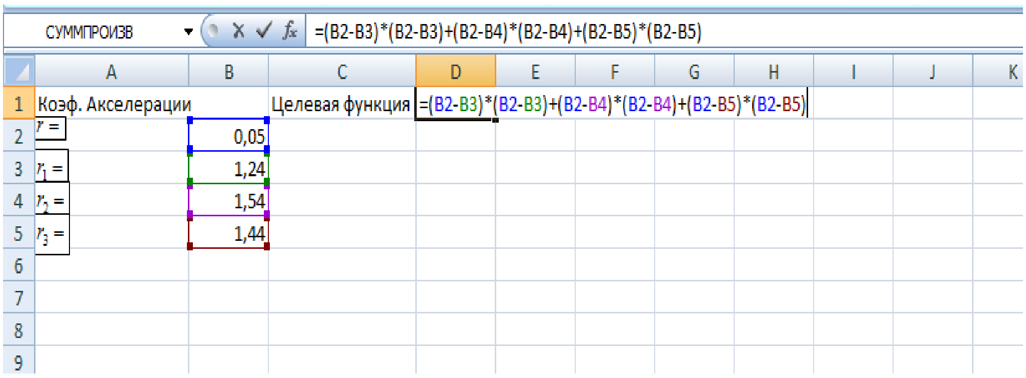

Рис. 1. Приближённые значения (оценки) r

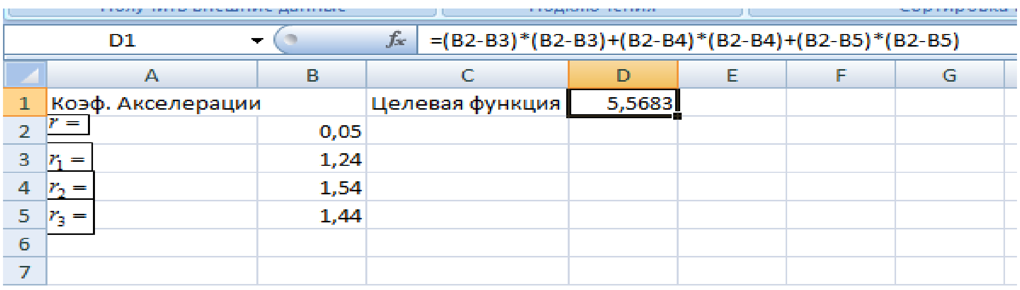

Рис.2. Целевая функция

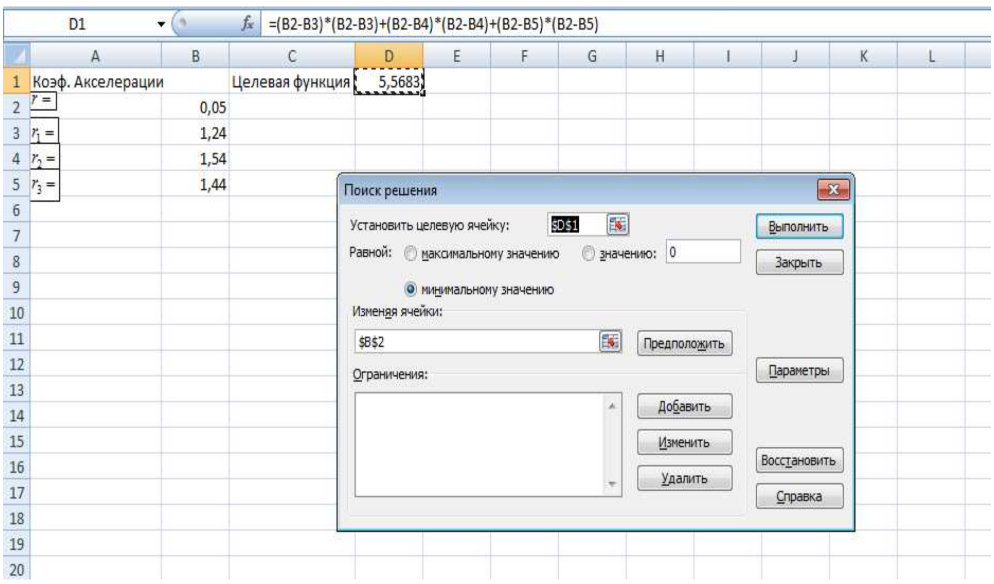

Рис.3. Поиск решения

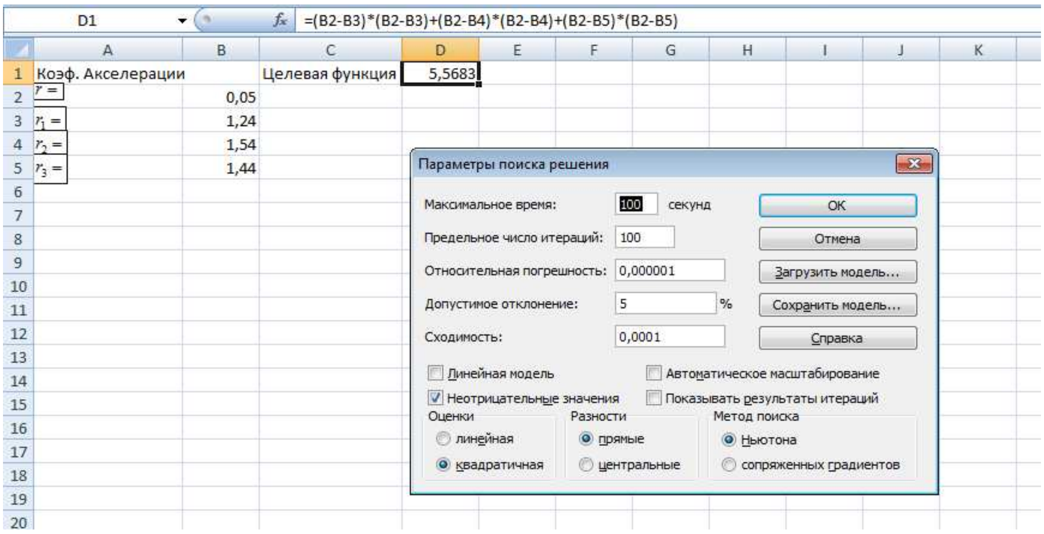

Рис.4. Параметры поиска решения

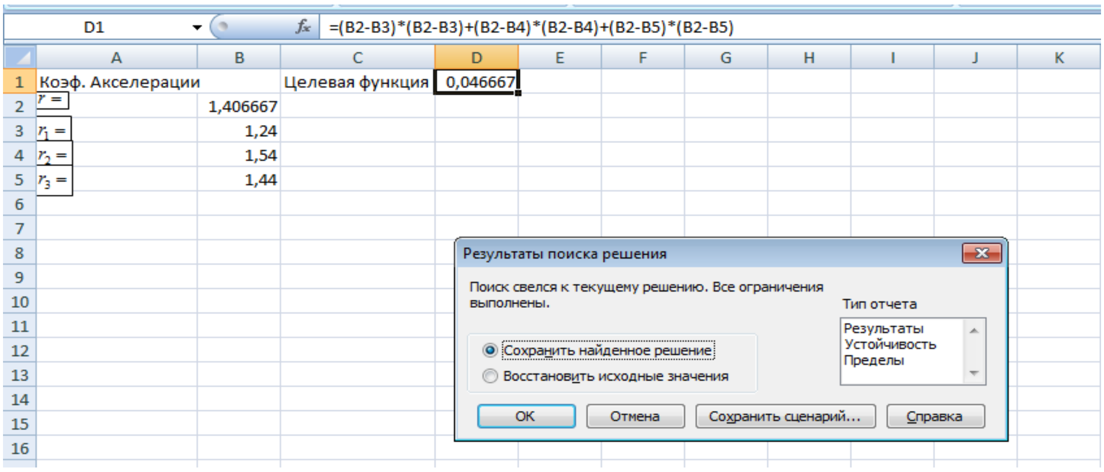

Рис.5. Результаты поиска решения

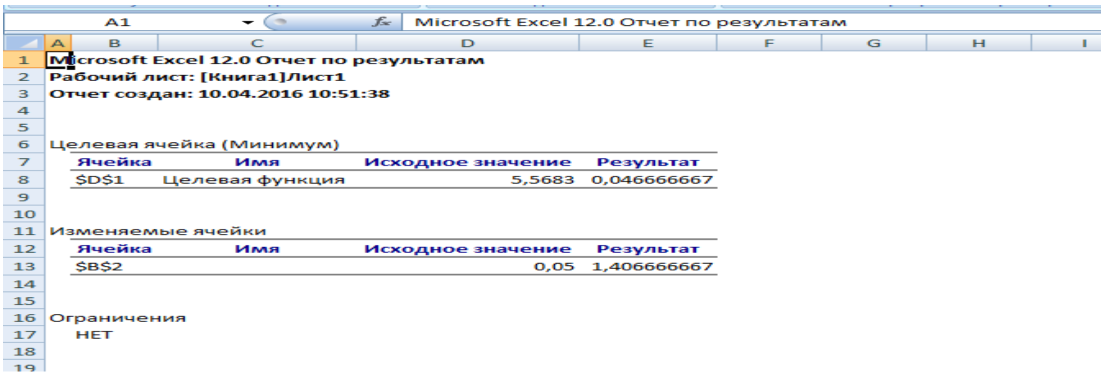

Рис.6. Отчёт по результатам

3. Постановка задачи динамической модели Кейнса

Рассмотрим модель Кейнса[1]:

$$y(t+1) = C[y(t)] + I(t)\,, \qquad (7)$$

где $y(t+1)$ – валовый внутренний продукт следующего года;

$y(t)$ – валовый внутренний продукт текущего года;

$I(t)$ – инвестиционные товары текущего года;

C – потребительские товары.

Пусть теперь спрос на инвестиционные товары остаются постоянными и при линейной зависимости спроса на потребительские товары от валового внутреннего продукта, то приходим к следующему соотношению:

$$y(t+1) = \underline{C} + cy(t) + I(t), \tag{8}$$

где $\underline{C}$ – минимальный объём фонда потребления;

c – склонность к потреблению, удовлетворяющее ограничению:

$$0 < c < 1. \tag{9}$$

Задачу определению $y(t+1)$ из модели (8) - (9) по заданным $\underline{C}, c, y(t), I$ условимся называть **прямой задачей**.

В рамках модели (8) - (9) сформулируем задачу [2]: по заданным переменным $y(t+1), y(t), \underline{C}$ $и$ I найти параметр c.

Данную задачу условимся называть **обратной задачей** (по отношению к указанной выше прямой).

Эта задача представляет существенный интерес в тех случаях, когда требуется по заданным статистическим данным $y(t+1), y(t), \underline{C}$ $и$ I в дискретные моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [0, T], t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ восстановить модель (8)-(9) и на её основе спрогнозировать значения $y(t+1)$ на последующие моменты времени t.

Для исследования сформулированной выше обратной задачи необходимо исследовать указанную прямую задачу на корректность постановки[3].

Уравнение (8) является линейным с постоянным спросом на инвестиционные товары. Будем предполагать, что $y(t)$ является непрерывной функцией на $[0,T]$. Тогда задача (8) - (9) имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от $I, \underline{C}$ и c. Следовательно, задача (8)-(9) поставлена корректно, а значит, и обратная задача поставлена корректно.

4. Метод решения поставленной задачи

На практике значения $y(t+1)$, $y(t)$ в дискретные моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [0,T], t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ задаются таблично (табл.3) [4]:

Таблица 3.

t	t_0	t_1	t_2	$\ldots$	t_n
$y(t)$	$y(t_0)$	$y(t_1)$	$y(t_2)$	$\ldots$	$y(t_n)$

Из модели (8) и данных табл.3 вытекает следующая система равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{y(t_1) - I - \underline{C}}{y(t_0)} = c_1, \\ \dfrac{y(t_2) - I - \underline{C}}{y(t_1)} = c_2, \\ ------------ \\ \dfrac{y(t_n) - I - \underline{C}}{y(t_{n-1})} = c_m, \end{cases}$$

(10)

параметру c. в которой неизвестными являются параметры $c_i \ i = 1,2,\ldots,m.$

Построив решение этой системы, найдём приближённых значений: $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

Решая задачу квадратичного программирования

$$(c-c_1)^2+(c-c_2)^2+\ldots+(c-c_m)^2 \to \min_c$$

(11)

с помощью средств Microsoft Excel найдём наилучшие в среднем квадратическом смысле оценку $\bar{c}$ соответствующей параметру c [4].

Пример.

Пусть статистические данные $y(t+1), y(t), \underline{C}\ u\ I$ заданы таблично (табл.4):

Таблица 4.

Инвестиционные расходы, I	280 млрд.руб/месяц
Потребительские расходы, C	102 млрд.руб/месяц
Национальный доход, Y_i	Y_i =430 млрд.руб
	Y_{i+1} =450 млрд.руб
	Y_{i+2} =478 млрд.руб
	Y_{i+3} =492 млрд.руб

Поставляя данные таблицы 4. в (10):

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{450-280-102}{430} = 0{,}158, \\ c_2 = \dfrac{478-280-102}{450} = 0{,}2, \\ c_3 - \dfrac{492-280-102}{478} = 0{,}23. \end{cases}$$

Решая систему квадратичного программирования:

$$(c-0{,}158)^2+(c-0{,}2)^2+(c-0{,}23)^2 \to \min_c$$

с помощью средств Microsoft Excel найдём наилучшие в среднем квадратическом смысле оценку $\bar{c}$ соответствующей параметру $c : \bar{c} = 0{,}002616$

Этапы проведённых вычислений представлены на рис. 7-12.

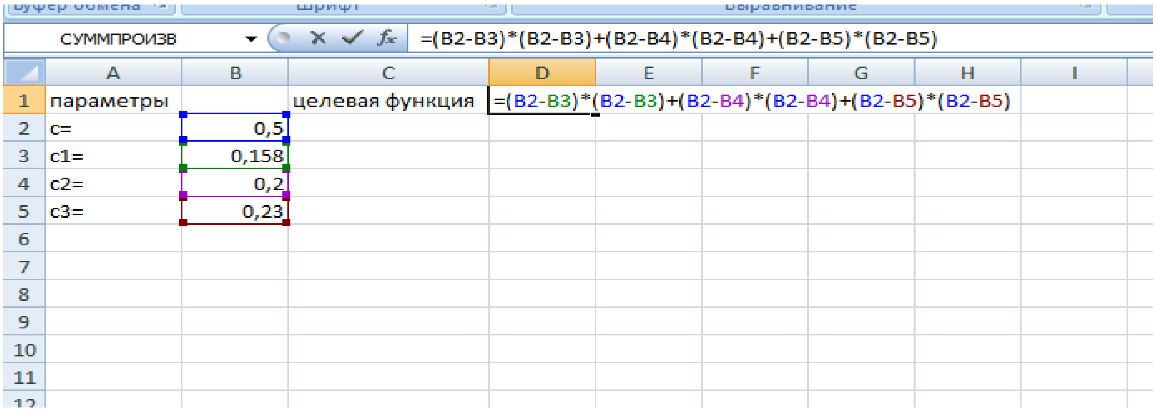

Рис. 7. Приближённые значения (оценки) c

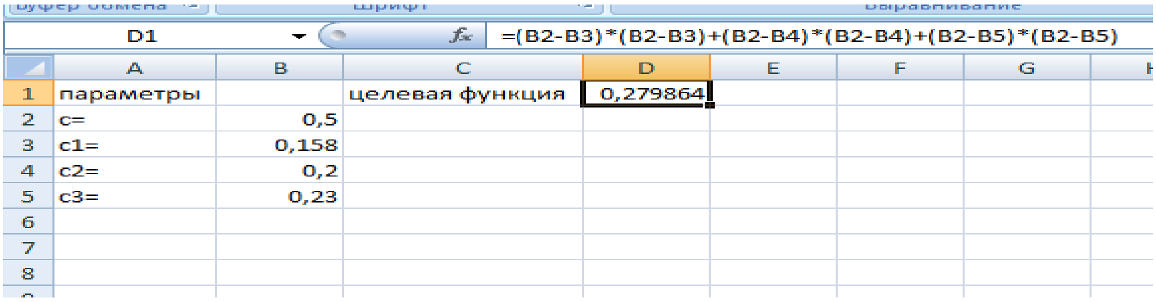

Рис.8. Целевая функция

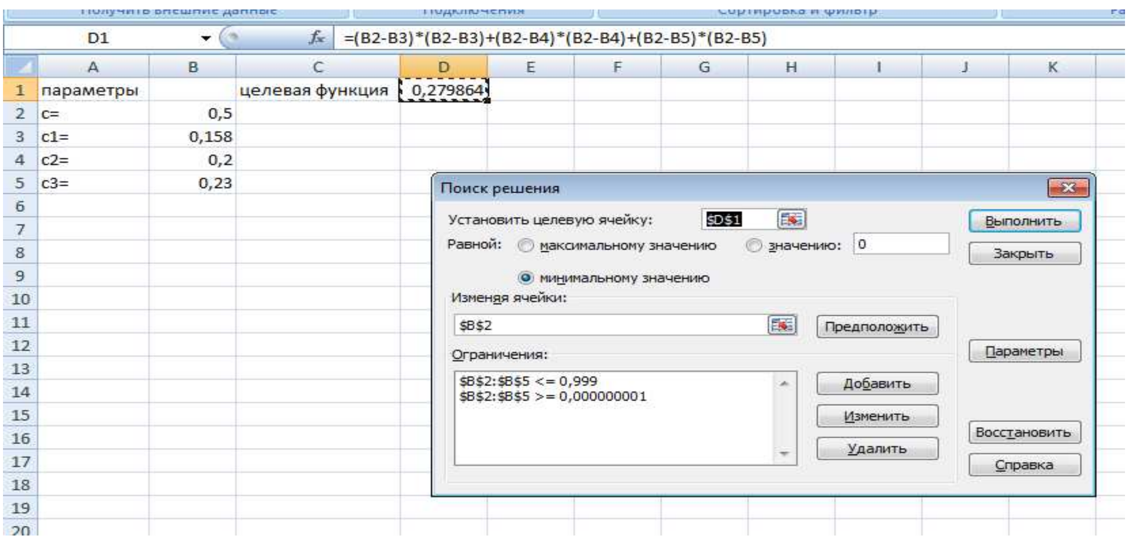

Рис.9. Поиск решения

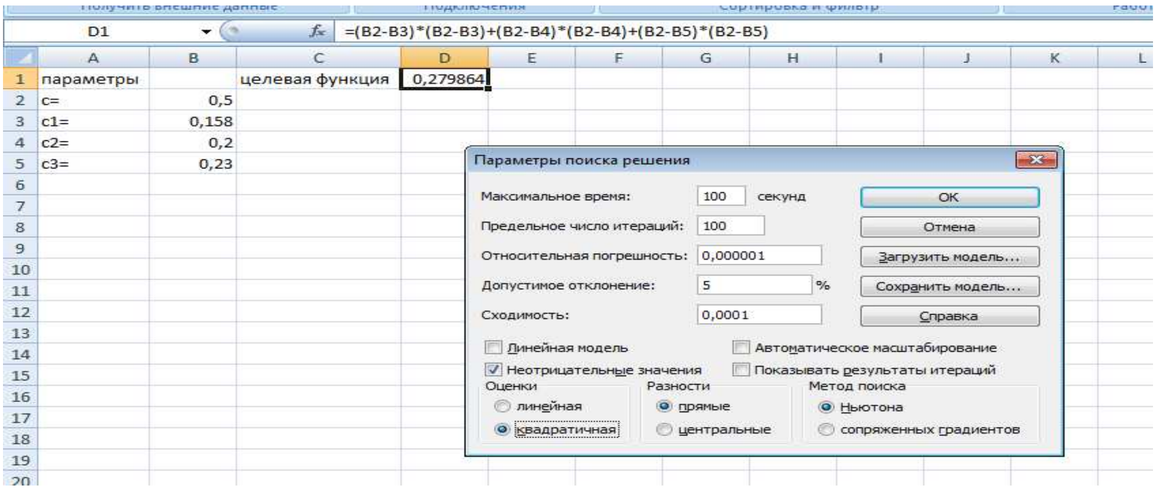

Рис.10. Параметры поиска решения

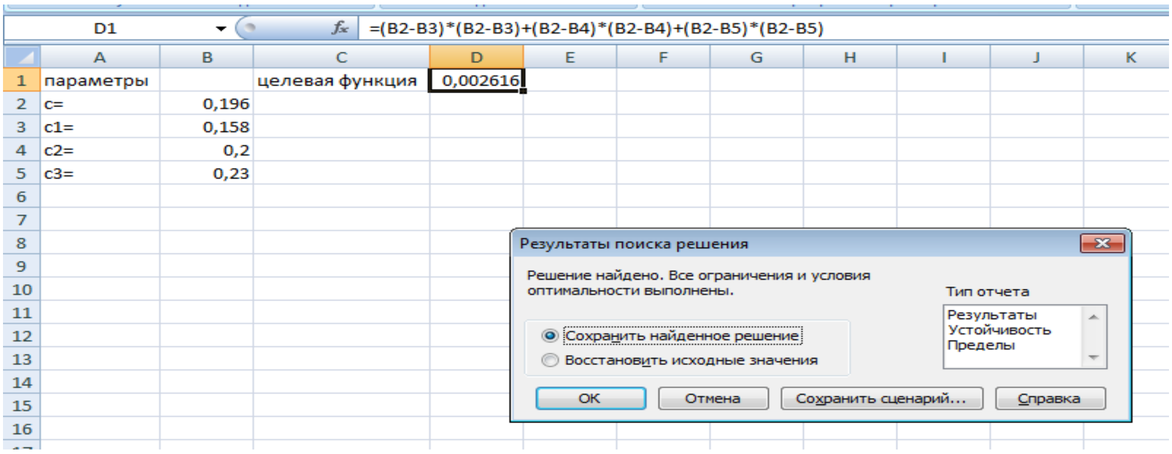

Рис.11. Результаты поиска решения

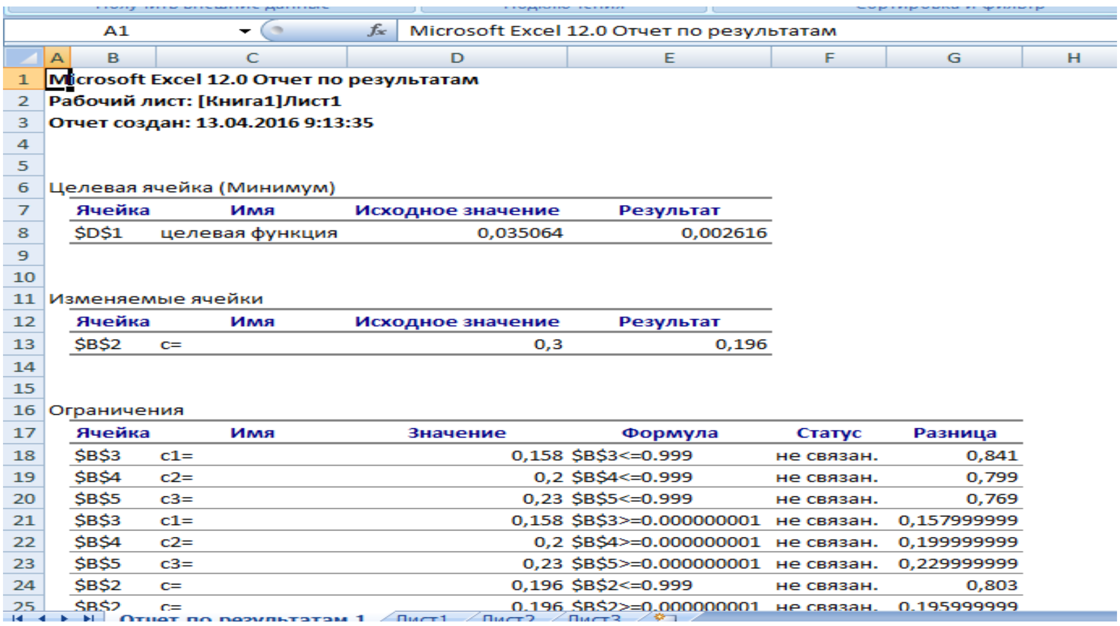

Рис.12. Отчёт по результатам

Выводы

Во всех пунктах сформулированы прямые и обратные задачи в рамках изучаемых моделей, приведена методика решения поставленных обратных задач. Эта методика основана на следующей схеме решения.

По заданным таблично параметрам прямой задачи, строится система алгебраических уравнений, содержащая в качестве неизвестных оцениваемые параметры изучаемой модели. После этого поставленная обратная задача сводится к решению задачи условной оптимизации, решения которой определяются с помощью надстройки «Поиск решения» в среде MS Excel.

По указанной схеме исследованы и предложены алгоритмы построения решений обратных задач экономических динамических систем.

Список литературы

1. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2002. – 399с.
2. Семенчин Е.А., Урусова А.С. Обратные задачи в экономических балансовых моделях и моделях экономического роста.– Краснодар: Просвещение – Юг, 2009. – 142с.
3. Семенчин Е.А., Лайпанова З.М. Корректность и стохастическая регуляризация математических моделей, описывающих экономические и эколого-биологические процессы.– Краснодар: Просвещение – Юг, 2009. – 121с.
4. Вержбицкий В.М. Численные методы. - М.: Высшая школа, 2001. – 189с.
5. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование. – М.: Вузовский учебник, 2005. – 144с.
6. РСО-Аланияв цифрах, 2014: Краткий статистический сборник/ Северная Осетиястат – Владикавказ, 2014 - 268 стр.

References

1. Kolemaev V.A. Matematicheskaja jekonomika: Uchebnik dlja vuzov. – M.: JuNITI – DANA, 2002. – 399s.
2. Semenchin E.A., Urusova A.S. Obratnye zadachi v jekonomicheskih balansovyh modeljah i modeljah jekonomicheskogo rosta.– Krasnodar: Prosveshhenie – Jug, 2009. – 142s.
3. Semenchin E.A., Lajpanova Z.M. Korrektnost' i stohasticheskaja reguljarizacija matematicheskih modelej, opisyvajushhih jekonomicheskie i jekologo-biologicheskie processy.– Krasnodar: Prosveshhenie – Jug, 2009. – 121s.

4. Verzhbickij V.M. Chislennye metody. - M.: Vysshaja shkola, 2001. – 189s.

5. Orlova I.V. Jekonomiko-matematicheskoe modelirovanie. – M.: Vuzovskij uchebnik, 2005. – 144s.

6. RSO-Alanijav cifrah, 2014: Kratkij statisticheskij sbornik/ Severnaja Osetijastat – Vladikavkaz, 2014 - 268 str.