УДК: 517.98: 330.4

UDC 517.98: 330.4

01.00.00 Физико-математические науки

Physical-Mathematical sciences

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА–ХИКСА

INVERSE PROBLEM MODELS OF THE SAMUELSON–HICKS

Лайпанова Зульфа Мисаровна
к.ф.-м.н., доцент

Бостанова Фатима Ахмедовна
к.ф.-м.н., доцент

Урусова Аза Сейпуловна
Доцент
Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Карачаевск, КЧР, Россия, ул. Ленина, 29

Laipanova Zulfa Misarovna
Candidate of Phys.-M. D., associate Professor

Bostanova Fatima Akhmatovna
Candidate of Phys.-M. D., associate Professor

Urusova Aza Saipulovna
associate Professor
Karachay-Chercassian state University named after U. D. Aliev, ul.Lenina, 29 Karachaevsk, Karachay-Cherkessia, Russia

Статья продолжает цикл проводимых ими исследований, связанных с формулировкой и разработкой методик построения неотрицательных решений обратных задач динамических систем. В работе поставлены и исследованы обратные задачи для динамических систем: модель Самуэльсона–Хикса. Разработана методика построения неотрицательных решений изучаемых обратных задач. Эта методика основана на следующей схеме решения. Вначале формулируем постановку прямой задачи, затем постановку обратной. Исследуется корректность постановки математических моделей, описывающих экономические динамические системы. Далее, по заданным таблично решениям прямой задачи, строится система алгебраических уравнений, содержащая в качестве неизвестных оцениваемые параметры изучаемой модели. После этого поставленная обратная задача сводится к решению задачи квадратичного программирования, решения которой определяются в среде MS Excel. Теоретический материал сопровождается решением конкретного примера

The article continues the cycle of their studies associated with the formulation and development of methods of construction of nonnegative solutions of inverse problems for dynamic systems. In this article the authors formulated and investigated inverse problems for dynamic systems: model of Samuelsson–Hicks. The technique of constructing non-negative solutions of the studied inverse problems. This method is based on the following scheme of the solution. First, we have to identify the formulation of the direct problem, then the formulation of the inverse. This work investigates how correct the mathematical models describing the dynamic economic system are. Further, in the specified tabular solutions of the direct problem, we have built a system of algebraic equations containing the unknown estimated parameters of the studied model. Then posed inverse problem is reduced to solution of a problem of quadratic programming, the solutions of which are defined in MS Excel. The theoretical material is accompanied by the specific example

Ключевые слова: ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, МОДЕЛЬ

Keywords: DIRECT AND INVERSE PROBLEMS, QUADRATIC PROGRAMMING, MATHEMATICAL MODELING, DYNAMIC SYSTEMS, MODEL

Doi: 10.21515/1990-4665-126-042

Введение

В данной статье сформулирована обратные задачи экономических динамических систем [1]: модель Самуэльсона–Хикса. Исследуется корректность постановки математических моделей, описывающих экономические динамические системы.

Для этой модели предложен метод решения обратной задачи, основанный на сведении обратной задачи к задаче квадратичного программирования.

Задачу квадратичного программирования предлагается решать инструментальными средствами: с помощью надстройки «Поиск решения» в среде MS Excel.

Цель проведённого исследования – разработать математические методы решения обратных задач экономических динамических систем и использовать полученные результаты для анализа и прогноза развития экономики Северо - Кавказского федерального округа в целом и Карачаево-Черкесской республики, в частности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую модель Самуэльсона – Хикса[1]:

$$I(t) = r[y(t) - y(t-1)] + I, \tag{1}$$

где $y(t)$ – валовый внутренний продукт текущего года;

$y(t-1)$ – валовый внутренний продукт предыдущего года;

$I(t)$ – инвестиционные товары;

$I(t)$ – инвестиционные товары в текущий момент времени;

r – коэффициент акселерации, причём выполняется неравенство:

$$0 < r < 1. \tag{2}$$

Коэффициент акселерации показывает насколько возрастут инвестиции, если ВВП возрастёт на единицу.

При линейной зависимости спроса на потребительские товары о ВВП и примерном постоянстве спроса на инвестиционные товары линеаризованная модель Самуэльсона – Хикса примет вид:

$$y(t+1) = \underline{C} + cy(t) + r[y(t) - y(t-1)] + I, \tag{3}$$

где $\underline{C}$ – минимальный объём фонда потребления;

c – склонность к потреблению, причём

$$0 < c < 1. \tag{4}$$

Формулу (3) можно представить в виде:

$$y(t+1) - 2y(t) + y(t-1) = \underline{C} + I - (1-c)y(t) - (1-r)[y(t) - y(t-1)].$$

(5)

Задачу определения $y(t+1)$ в рамках модели (3) - (5) по заданным $\underline{C}, c, r, y(t-1), y(t)$ и I условимся называть **прямой задачей**.

В рамках модели (3) - (5) сформулируем другую задачу: по заданным переменным $\underline{C}, y(t-1), y(t), y(t+1$ и I найти параметры r и c.

Эту задачу назовём обратной задачей (по отношению к указанной выше прямой [2].

Обратная задача представляет существенный интерес в тех случаях, когда требуется по заданным статистическим данным $\underline{C}, y(t-1), y(t), y(t+1$ и I в дискретные моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [0, T], t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ восстановить модель (3)-(5) и на её основе спрогнозировать значения $y(t+1)$ на последующие моменты времени t.

Для дальнейшего исследования сформулированной обратной задачи вначале необходимо исследовать прямую задачу на корректность постановки [3].

Уравнения (3) - (5) являются линейными с постоянным спросом на инвестиционные товары. Пусть $y(t)$ является непрерывной функцией на промежутке $[0, T]$. Тогда задача (3) - (5) имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от $I, \underline{C}, c$ и r. Следовательно, задача (3)-(5) поставлено корректно, а значит и обратная задача поставлено корректно.

2. Метод решения поставленной задачи

Реально на практике значения $\underline{C}, y(t-1), y(t), y(t+1$ и I в дискретные моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [0, T], t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ задаются таблично (см.табл.1) [4]:

Таблица 1.

t	t_0	t_1	t_2	$\ldots$	t_n
$y(t)$	$y(t_0)$	$y(t_1)$	$y(t_2)$	$\ldots$	$y(t_n)$

Из модели (3)-(5) и данных таблицы 1. вытекает следующая система равенств:

$$\begin{cases} y(t_2) - 2y(t_1) + y(t_0) = \underline{C} + I - (1-c)y(t_1) - (1-r)[y(t_1) - y(t_0)] \\ y(t_3) - 2y(t_2) + y(t_1) = \underline{C} + I - (1-c)y(t_2) - (1-r)[y(t_2) - y(t_1)] \\ ------------------------------------ \\ y(t_n) - 2y(t_{n-1}) + y(t_{n-2}) = \underline{C} + I - (1-c)y(t_{n-1}) - (1-r)[y(t_{n-1}) - y(t_{n-2})] \end{cases} \quad (6)$$

в которой неизвестными являются r и c.

Группируя уравнения системы (6), построим m подсистем из двух уравнений (Очевидно, $m = C_n^2$, где C_n^2 – число сочетаний из n по 2).

Построив решения этих подсистем, найдём m приближённых значений r и c: $r_1, r_2, \ldots, r_m$ и $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

Решая задачи квадратичного программирования

$$(r - r_1)^2 + (r - r_2)^2 + \ldots + (r - r_m)^2 \to \min_r \quad (7)$$

$$0 < r < 1,$$

$$(c - c_1)^2 + (c - c_2)^2 + \ldots + (c - c_m)^2 \to \min_c \quad (8)$$

$$0 < c < 1.$$

С помощью средств Microsoft Excel найдём наилучшие в среднем квадратическом смысле оценку $\bar{r}$ и $\bar{c}$ соответствующие параметрам r и c соответственно[5].

Пример. Пусть значения $y(t)$ заданы таблицей 2.

Таблица 2.

t	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
$y(t)$	430	450	478	492	500

Положим инвестиционные расходы $I = 130$ *млрд.руб / месяц*, потребительские расходы $C = 120$ *млрд.руб / месяц.* Требуется найти оценки $\bar{c}$ для c и $\bar{r}$ для r.

Решение.

При указанных в таблице 2. данных система (6) принимает вид:

$$\begin{cases} y(t_2) - 2y(t_1) + y(t_0) = 120 + 130 - (1-c)y(t_1) - (1-r)[y(t_1) - y(t_0)], \\ y(t_3) - 2y(t_2) + y(t_1) = 120 + 130 - (1-c)y(t_2) - (1-r)[y(t_2) - y(t_1)], \\ y(t_4) - 2y(t_3) + y(t_2) = 120 + 130 - (1-c)y(t_3) - (1-r)[y(t_3) - y(t_2)]. \end{cases}$$

(9)

Подставляя данные таблицы 2. в (9) найдём:

$$\begin{cases} 478 - 2 \cdot 450 + 430 = 250 - (1-c) \cdot 450 - (1-r) \cdot (450 - 430), \\ 492 - 2 \cdot 478 + 450 = 250 - (1-c) \cdot 478 - (1-r) \cdot (478 - 450), \\ 500 - 2 \cdot 492 + 478 = 250 - (1-c) \cdot 492 - (1-r) \cdot (492 - 478) \end{cases}$$

или после преобразований получим:

$$\begin{cases} 225c + 10r = 114, \\ 239c + 14r = 121, \\ 246c + 7r = 125. \end{cases} \qquad (10)$$

Группируя уравнения системы (10), построим 3 подсистемы из двух уравнений:

$$1)\ \begin{cases} 225c_1 + 10r_1 = 114, \\ 239c_1 + 14r_1 = 121, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 225c_2 + 10r_2 = 114, \\ 246c_2 + 7r_2 = 125, \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 239c_3 + 14r_3 = 121, \\ 246c_3 + 7r_3 = 125. \end{cases}$$

Построив решения этих подсистем, найдём по 3 приближённых значений r и c: $r_1 = 0{,}15,\ r_2 = 0{,}15, r_3 = 0{,}11$ и $c_1 = 0{,}507,\ c_2 = 0{,}51, c_3 = 0{,}509.$

Решая задачи квадратичного программирования

$$(r - 0{,}15)^2 + (r - 0{,}15)^2 + (r - 0{,}11)^2 \to \min_r$$

и

$$(c-0{,}507)^2+(c-0{,}51)^2+(c-0{,}509)^2 \to \min_c$$

С помощью средств Microsoft Excel найдём наилучшие в среднем квадратическом смысле оценку $\bar{r}$ и $\bar{c}$ соответствующие параметрам r и c соответственно: $\bar{r}$=0,1366 и $\bar{c}$=0,508.

Этапы проведённых вычислений представлены на рис. 1-8.

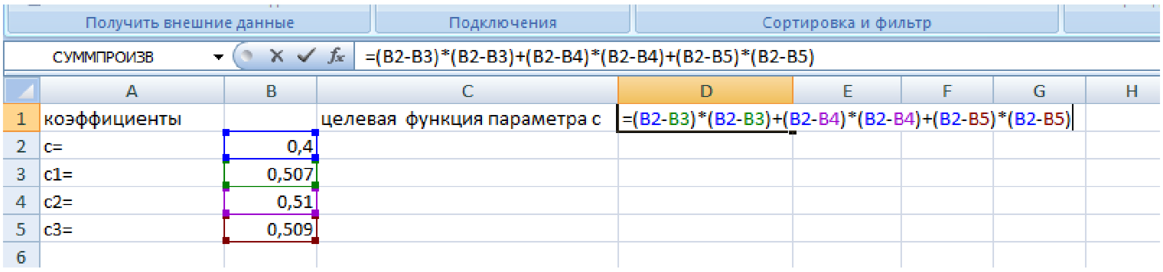

Рис.1. Приближённые значения (оценки) с

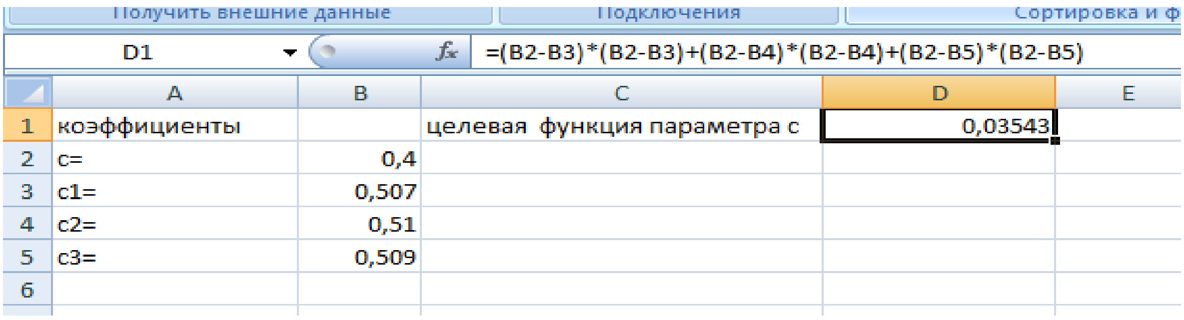

Рис.2. Целевая функция

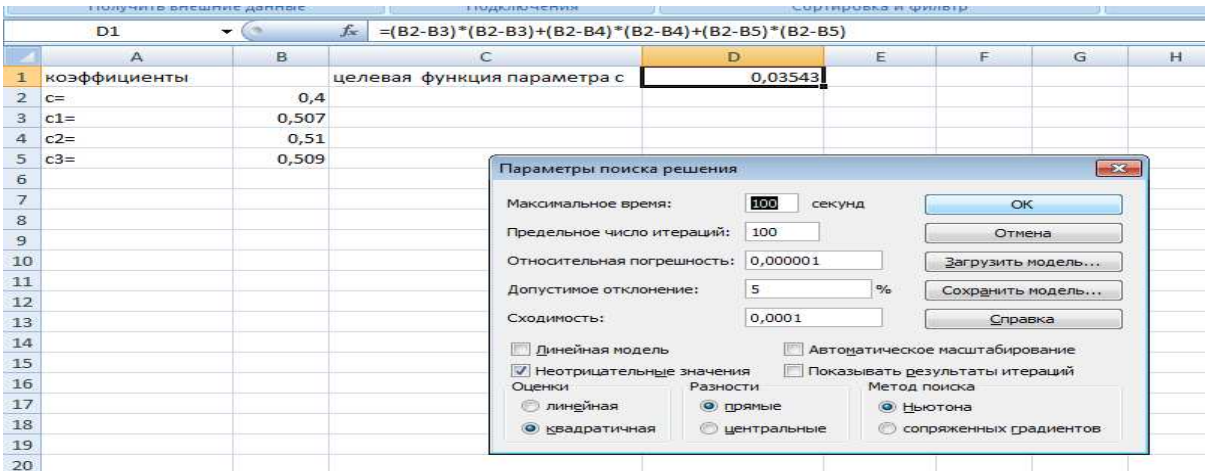

Рис.3. Параметры поиска решения

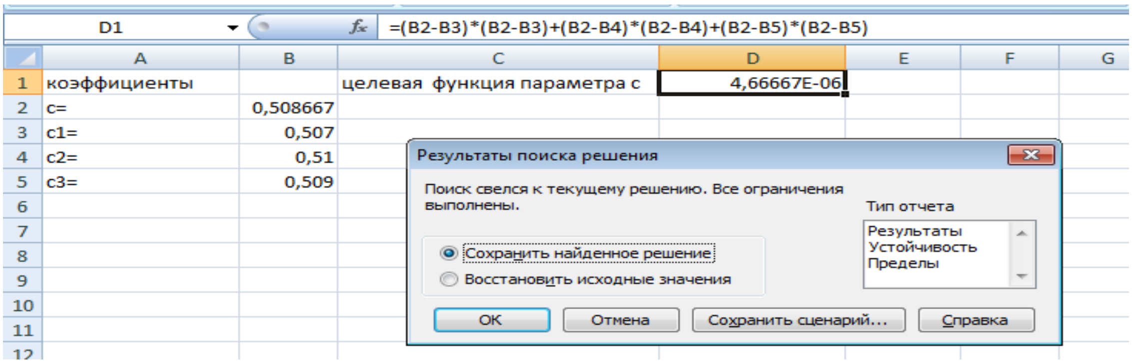

Рис.4. Результаты поиска решения

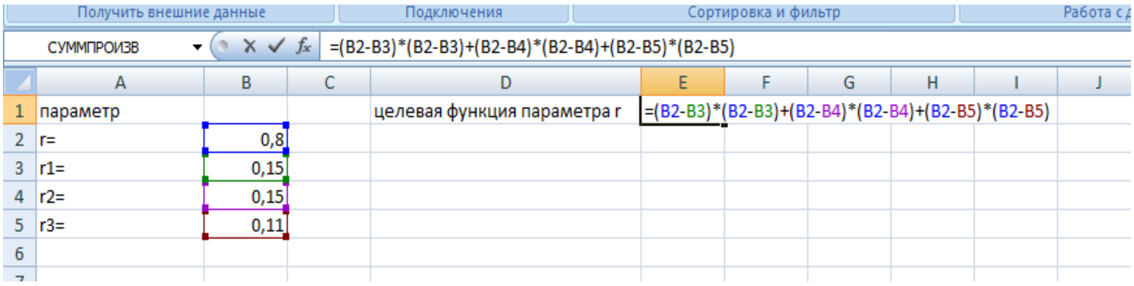

Рис. 5. Приближённые значения (оценки) и целевая функция

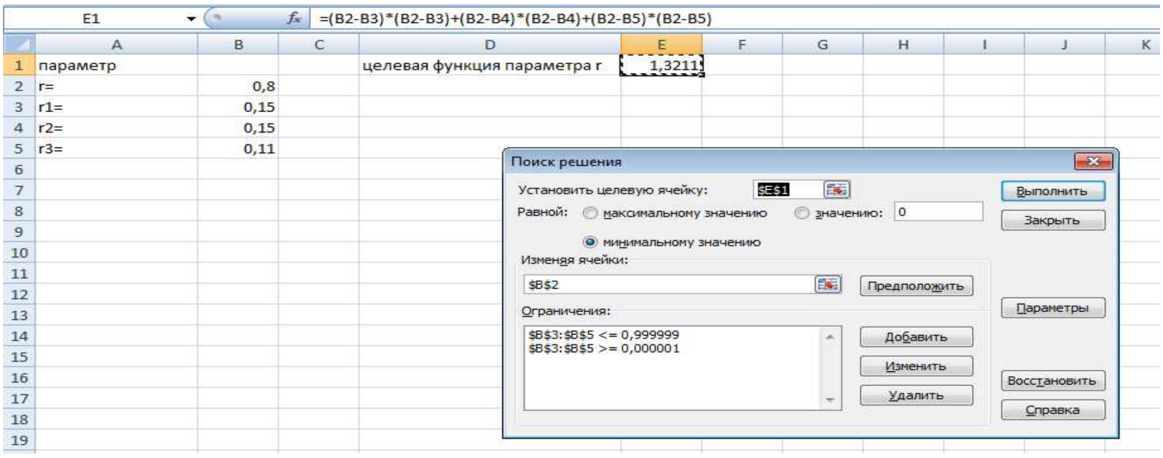

Рис.6. Поиск решения

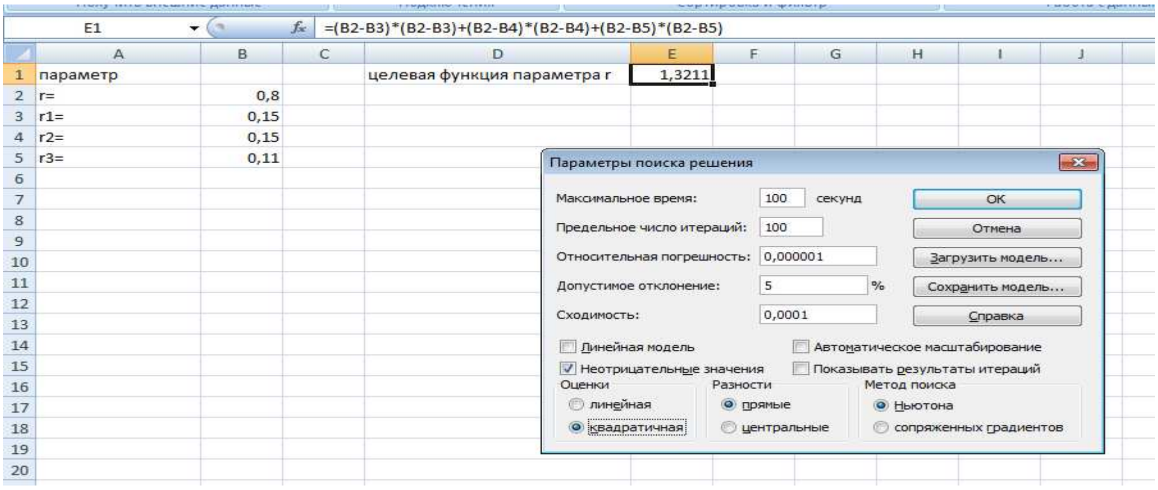

Рис.7. Параметры поиска решения

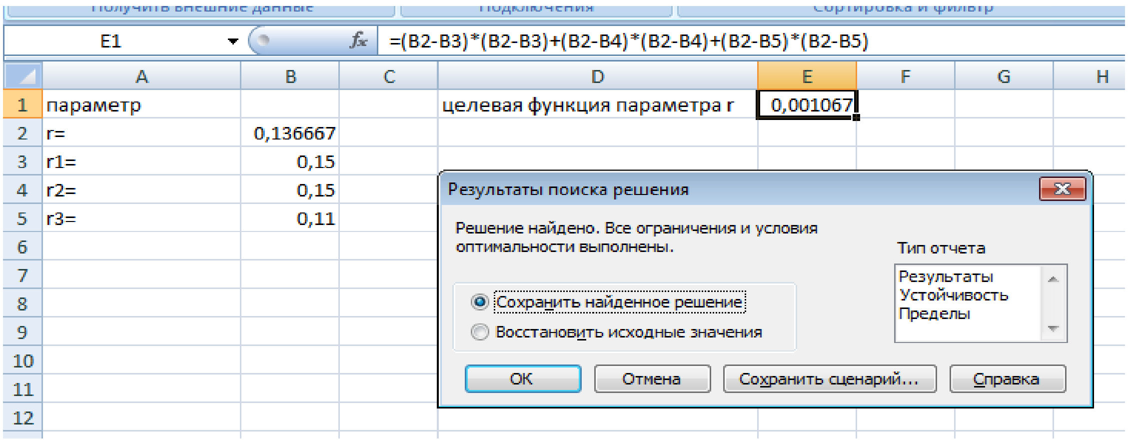

Рис.8. Результаты поиска решения

Выводы

В статье сформулированы прямые и обратные задачи в рамках изучаемой динамической моделей, исследована корректность постановки задач математических моделей, описывающих экономические динамические системы, приведена методика решения поставленной обратной задачи. Эта методика основана на следующей схеме решения.

По заданным таблично параметрам прямой задачи, строится система алгебраических уравнений, содержащая в качестве неизвестных оцениваемые параметры изучаемой модели. После этого поставленная обратная задача сводится к решению задачи квадратичного программирования, решения которой определяются с помощью надстройки «Поиск решения» в среде MS Excel.

По указанной схеме исследованы и предложены алгоритмы построения решений обратных задач экономических динамических систем.

Список литературы

1. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2002. – 399с.
2. Семенчин Е.А., Урусова А.С. Обратные задачи в экономических балансовых моделях и моделях экономического роста.– Краснодар: Просвещение – Юг, 2009. – 142с.
3. Семенчин Е.А., Лайпанова З.М. Корректность и стохастическая регуляризация математических моделей, описывающих экономические и эколого-биологические процессы.– Краснодар: Просвещение – Юг, 2009. – 121с.
4. Вержбицкий В.М. Численные методы. - М.: Высшая школа, 2001. – 189с.
5. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование. – М.: Вузовский учебник, 2005. – 144с.

References

1. Kolemaev V. A. Mathematical Economics: Textbook for universities. – M.: UNITY – DANA, 2002. – P. 399.
2. Semenchin E. A., Urusova A. S., Inverse problems in carrying economic models and economic growth models.– Krasnodar: Education – South, 2009. – P. 142.
3. Semenchin E. A., Z. M. Laipanova, Korrektnosti regularization and stochastic mathematical models describing economic and ecological-biological processes.– Krasnodar: Education – South, 2009. – P. 121.
4. Verzhbitsky V. M. Numerical methods. - M.: Higher school, 2001. – P. 189.
5. Orlova I. V. Economic and mathematical modeling. – M.: high school textbook, 2005. – P.144.