УДК 519.115.1

01.00.00 Физико-математические науки

МАТРИЦЫ АДАМАРА

Сергеев Александр Эдуардович
к. ф.-м. н., доцент
Кубанский государственный аграрный Университет, Краснодар, Россия

Сергеев Эдуард Александрович
к. ф.-м. н., доцент
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Тищенко Ольга Юрьевна
старший преподаватель
Кубанский государственный аграрный Университет, Краснодар, Россия

В 1893 году французский математик Ж.Адамар поставил вопрос: пусть дана матрица фиксированного порядка с коэффициентами не превосходящего по модулю данного значения, тогда какое наибольшее по модулю значение может принимать детерминант этой матрицы? Адамар полностью решил этот вопрос в случае, когда коэффициенты матрицы- комплексные числа и выдвинул соответствующую гипотезу в случае, когда коэффициенты матрицы- вещественные числа, по модулю равные единице. Такие матрицы, удовлетворяющие гипотезе Адамара, стали называть матрицами Адамара, их порядок равен четырём и неизвестно, является ли это условие достаточным для их существования. В статье рассматривается естественное обобщение матриц Адамара над полем вещественных чисел, они существуют для любого порядка. В работе предлагается алгоритм построения обобщённых матриц Адамара, и он иллюстрируется на числовых примерах. Также вводится понятие константы для данного натурального числа, вычисляются значения этой константы для некоторых натуральных чисел и показываются некоторые приложения константы Адамара для оценок сверху и снизу модуля определителя данного порядка с произвольными вещественными коэффициентами и эти оценки в некоторых случаях лучше известных оценок Адамара. Результаты статьи связываются с результатами Кона по величине детерминантов матриц с вещественными коэффициентами, не превосходящими по модулю единицы

Ключевые слова: МАТРИЦА АДАМАРА, НЕРАВЕНСТВО АДАМАРА, КОНСТАНТА АДАМАРА, ОБОБЩЕННАЯ МАТРИЦА АДАМАРА, ГИПОТЕЗА АДАМАРА

Doi: 10.21515/1990-4665-126-033

UDC 519.115.1

Physical-Mathematical sciences

HADAMARD MATRICES

Sergeev Alexandr Eduardovich
Cand. Phys.-Math. Sci., associate Professor
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

Sergeev Eduard Alexandrovich
Cand. Phys.-Math. Sci., associate Professor
Kuban State University, Krasnodar, Russia

Tischenko Olga Yurievna
Senior Lecturer
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

In 1893, the French mathematician J. Adamar raised the question: given a matrix of fixed order with coefficients not exceeding modulo this value, then what is the maximum modulo value can take the determinant of this matrix? Adamar fully decided this question in the case when the coefficients of the matrix are complex numbers and put forward the corresponding hypothesis in the case when the matrix coefficients are real numbers modulo equal to one. Such matrices satisfying the Hadamard conjecture were called Hadamard matrices, their order is four and it is unknown whether this condition is sufficient for their existence. The article examines a natural generalization of the Hadamard matrices over the field of real numbers, they are there for any order. This paper proposes an algorithm for the construction of generalized Hadamard matrices, and it is illustrated by numerical examples. Also introduces the concept of constants for the natural numbers are computed values of this constant for some natural numbers and shown some applications of Hadamard constants for estimates on the top and bottom of the module of the determinant of this order with arbitrary real coefficients, and these estimates are in some cases better than the known estimates of Hadamard. The results of the article are associated with the results of the con on the value of determinants of matrices with real coefficients, not exceeding modulo units

Keywords: MATRIX HADAMARD, INEQUALITY HADAMARD, CONSTANT HADAMARD, GENERAL HADAMARD MATRICES, HYPOTHESIS HADAMARD

Матрицы Адамара и некоторые их обобщения

В 1893 году французский математик Адамар поставил такой вопрос: пусть А будет *nxn* матрица с коэффициентами a_{ij} не превосходящими по модулю число M>0. Какое наибольшее по модулю значение может принимать детерминант detA матрицы А?

Адамар полностью решил этот вопрос в случае, когда коэффициенты матрицы А комплексные числа и выдвинул известную гипотезу в случае вещественных коэффициентов матрицы А.

Обозначим символом ||δ|| Евклидову норму вектора δ=$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ т.е.

$$\|\delta\| = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$$

Тогда справедлива теорема Адамара [1].

Теорема 1. Пусть А – комплексная *nxn* матрица с линейно независимыми колонками $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Тогда

$$|\det(A)|^2 = |\det({}^t\bar{A} \cdot A)| \le \prod_{k=1}^{n} \|\delta\|^2, \quad (1)$$

где ${}^t\bar{A}$ - транспонированная матрица сопряжённой $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$, и равенство в (1) достигается только если матрица ${}^t\bar{A} \cdot A$ диагональная.

Следствие 1. Пусть А=(a_{ij}) есть комплексная матрица с $|a_{ij}| \le 1$, тогда $|\det(A)| \le n^{n/2}$ и равенство достигается только если $|a_{ij}|=1$ для всех индексов $1 \le i, j \le n$ и ${}^t\bar{A} \cdot A = n \cdot E_n$, где E_n - единичная матрица.

Следствие 2. Пусть А=(a_{ij}) есть комплексная *nxn* матрица с $|a_{ij}| \le M$, $|\det(A)| \le M^n \cdot n^{n/2}$ и равенство достигается, если $|a_{ij}|=M$ для всех индексов $1 \le i, j \le n$ и выполняется равенство ${}^t\bar{A} \cdot A = M^2 n \cdot E_n$.

Определение 1. Комплексная *nxn* матрица А=(a_{ij}) называется матрицей Адамара порядка *n*, если $|a_{ij}|=1$ и ${}^t\bar{A} \cdot A = n \cdot E_n$.

Теорема 2 (Адамар) Для любого натурального n существует комплексная матрица Адамара А порядка n.

Легко проверить, что матрицей Адамара порядка n является следующая матрица А:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ 1 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \dots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

где $\varepsilon_k = e^{\frac{i(2\pi k)}{n}}$, $0 \leq k \leq n$-1, - комплексные корни *n*-ой степени из единицы, тогда ${}^t\bar{A} \cdot A = n \cdot E_n$.

Определение 2. Вещественная *nxn* матрица A=(a_{ij}) называется матрицей Адамара порядка *n*, если $a_{ij} = \pm 1$ и ${}^t\bar{A} \cdot A = n \cdot E_n$.

Возникает вопрос о существовании вещественных матриц Адамара любого порядка n. Для $n = 2$ такой матрицей Адамара является матрица H_2:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица 4х4 вида $\begin{pmatrix} H_2 & -H_2 \\ H_2 & H_2 \end{pmatrix}$ как легко можно проверить также является матрицей Адамара H_4.

И вообще, как заметил Сильвестр, если H – матрица Адамара порядка 2^{k+1} есть также матрица Адамара. Однако вещественных матриц Адамара порядка 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11… не существует, так как справедлива следующая теорема Адамара:Ю

Теорема 3. Пусть A=(a_{ij}) – вещественная матрица Адамара порядка n > 2. Тогда n делится на 4.

Учитывая этот результат, Адамар сформулировал свою знаменитую гипотезу:

Гипотеза Адамара (1893): Для каждого натурального n, делящегося на 4, существует вещественная матрица Адамара порядка n.

Существуют различные методы построения вещественных матриц Адамара порядка $n = 4k$ для некоторых бесконечных серий натуральных чисел делящихся на 4 [2], однако они не позволяют доказать гипотезу

Адамара. Наименьшим порядком, кратным 4, для которого матрица Адамара неизвестна является $n = 668$ (?)

Если любую строку или любой столбец матрицы Адамара умножить на -1, то получим другую матрицу Адамара того же порядка. Умножая строки и столбцы матрицы Адамара на -1 мы можем получить нормализованную матрицу Адамара, первая строка и первый столбец которой состоит только из положительных единиц.

Если переставить строчки или столбцы матрицы Адамара, то получим опять матрицу Адамара.

Матрицы Адамара, получаемые друг из друга многократным применением перестановок строк или столбцов и умножением строк или столбцов на -1 называются эквивалентными.

Пусть A=(a_{ij}) – матрица размера *m*x*m* и B=(b_{ij}) - матрица размера *n*x*n*. Тогда Кронекеровским прямым произведением A⊗B матрицу A и B называется матрица размера $m \cdot n$ x $m \cdot n$ следующего вида:

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Справедливо утверждение: Кронекерово произведение двух матриц Адамара является матрицей Адамара. Действительно, используя свойства Кронекерова произведения матриц, получаем для матриц A и B порядков соответственно m и n равенство:

$$(A\otimes B) \cdot {}^t(A \otimes B) = (A\otimes B) \cdot ({}^tA \otimes {}^tB) = (A \cdot {}^tA) \otimes (B \cdot {}^tB) = mE_m \otimes nE_n = m \cdot n \cdot E_{mn}$$

что и доказывает утверждение.

Отсюда следует, что если существует матрицы Адамара порядков m и n, то существует матрица Адамара порядка $m \cdot n$.

Представляет интерес обобщение положения матриц Адамара на матрицы произвольного порядка n. Назовем матрицу $\widetilde{H}_n$ порядка n с коэффициентами ± 1 обобщенной матрицы Адамара, если модуль ее определителя имеет наибольшее значение среди всех матриц порядка n с коэффициентами ± 1. При n кратном 4, такой матрицей является матрица

Адамара H_n, если она существует. В то же время очевидно, что обобщенная матрица Адамара существует для любого натурального n.

Пусть $\widetilde{H_n}$ обобщенная матрица порядка n, модуль ее детерминанта будем называть константой Адамара и обозначать h_n, итак $h_n = |det\,\widetilde{H_n}|$. Если $\widetilde{H_n} = H_n$ – матрица Адамара, то $h_n = n^{n/2}$, если это не так, то нахождение значения константы Адамара h_n – трудная вычислительная задача при $n > 4$.

Легко заметить, что из определения обобщенной матрицы Адамара $\widetilde{H_n}$ следует, что h_n делится на 2^{n-1} .

Прямое вычисление показывает, что

$$\widetilde{H_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и значит $h_3 = |det\,\widetilde{H_3}| = 4$. Отсюда вытекает, что $h_4 \le 16$, в чем можно убедиться, если мы будем расщеплять определитель ± 1 матрицы 4-го порядка по какой-нибудь строке и равенство $h_4 = 16$ достигается для матрицы Адамара H_4:

$$H_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Принимая во внимание неравенства Адамара, оценивающие величину модуля detA через длины строк (столбцов) матрицы A=(a_{ij}) порядка n:

$$|\det(A)| \le \Pi_{i=1}^{n}\left(\Sigma_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} \qquad (2)$$

$$|\det(A)| \le \Pi_{j=1}^{n}\left(\Sigma_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} \qquad (3)$$

Получаем из (2) и (3) следующие оценки для констант Адамара:

$$h_5 \le 25\sqrt{5} \approx 56,\ h_6 \le 216,\ h_7 \le 343\sqrt{7} \approx 907,\ h_9 \le 3^9 = 19683$$

Анализируя ±1 матрицы 5-го порядка получаем следующую обобщенную матрицу Адамара $\widetilde{H}_5$:

$$\widetilde{H}_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Следовательно h_5=|det $\widetilde{H}_5$|=48. С помощью упорядоченных компьютерных вычислений были найдены следующие обобщенные матрицы Адамара порядка 6, 7, 9, 10:

$$\widetilde{H}_6 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{H}_7 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{H}_9 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{H_{10}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Используя полученные матрицы, получаем константы Адамара h_6, h_7, h_9, h_{10}:

$h_6 = \left|det\,\widetilde{H_6}\right| = 160;\ \ h_7 = \left|det\,\widetilde{H_7}\right| = 576;\ h_9 = \left|det\,\widetilde{H_9}\right| = 14336;$

$h_{10} = \left|det\,\widetilde{H_{10}}\right| = 73728.$

Значение константы h_8 имеем из ранее приведённой формулы для матрицы Адамара H_n: $h_8 = 8^{8/2} = 8^4 = 4096$Мы видим, что значение констант… Адамара быстро растут с увеличением…

Возникает вопрос об эффективных методах построения обобщённых матриц Адамара любого порядка. Можно предложить для этого следующий приём: взять обобщённую матрицу Адамара $\widetilde{H_n}$ и, окаймить её строкой $a_1, \dots, a_{n+1}$ и колонкой $b_1, \dots, b_n$ до матрицы A_{n+1} порядка $n+1$. Далее выбирать значения a_i и b_j равные ± 1 так, что модуль $\det A_{n+1}$ был максимальным. Приведём примеры:

Пусть $n = 2,\ H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, тогда рассмотрим матрицу

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & b_1 \\ -1 & 1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Имеем det A_3=(-1)·[($a_1 + a_2$)($b_1 + b_2$)-2($a_3 + b_1 a_1$)]. Ясно, что для максимальной det A_3надо взять значения $b_2 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, b_1 = -1$ (можно взять и$a_1 = 1, a_2 = \pm 1$, $a_3 = 1, b_1 = -1, b_2 = 1$), получим в итоге две обобщенные матрицы Адамара 3-его порядка:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ A_3' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Возьмем полученную матрицу A_3 и построим по указанному способу обобщенную матрицу Адамара 4-го порядка, это должна быть матрица Адамара.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 & b_1 \\ -1 & 1 & -1 & b_2 \\ -1 & 1 & 1 & b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Взяв $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = -1, a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1$, получим матрицу Адамара 4-го порядка, так как det A_4=16.

Возьмем полученную матрицу A_4 и построим с помощью соответствующего окаймления обобщенную матрицу Адамара 5-го порядка:

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};\ A_5 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & b_3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & b_4 \end{pmatrix}$$

Взяв $b_1 = \quad 1, b_2 = 1, b_3 = \quad 1, b_4 = \quad 1, a_1 = 1, a_2 = \quad 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = \quad 1$, получим обобщенную матрицу Адамара 5-го порядка, так как det A_5= 48.

Возьмем полученную матрицу A_5 и построим с помощью окаймления обобщенную матрицу Адамара A_6 порядка 6:

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \; A_6 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & b_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & b_5 \end{pmatrix}$$

$a_1 = a_2 = a_3 = -1, a_4 = a_5 = 1, a_6 = -1, \; b_1 = b_2 = b_3 \; b_4 = b_5 = -1,$

получим обобщенную матрицу Адамара A_6, так как в этом случае det A_6=160.

Окаймляя полученную матрицу A_6 строкой $a_1 = 1, \; a_2 = -1 \; a_3 = 1, a_4 = -1,$

$a_5 = 1, a_6 = 1, a_7 = 1$ и колонкой $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 1, b_5 = 1, b_6 = 1$, получаем обобщенную матрицу Адамара A_7, так как detA_7=576:

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Неизвестно всегда ли указанный алгоритм дает обобщенную матрицу Адамара.

Константа Адамара h_n позволяет вычислить наибольшее возможное число положительных слагаемых γ_n при раскрытии определителя -го порядка по его определению в виде алгебраической суммы $n!$ слагаемых, если элементы определителя вещественные числа справедлива формула:

$$\gamma_n = \frac{n! + h_n}{2}$$

Используя, полученные ранее результаты, получаем:

$\gamma_2 = 2, \gamma_3 = 5, \gamma_4 = 20, \gamma_5 = 84, \gamma_6 = 440, \gamma_7 = 2808, \gamma_8 = 22208$

Отсюда имеем не строго убывающую последовательность чисел:

$$\frac{\gamma_2}{2!} = 2; \frac{\gamma_3}{3!} = \frac{5}{6}; \frac{\gamma_4}{4!} = \frac{5}{6}; \frac{\gamma_5}{5!} = \frac{7}{10}; \frac{\gamma_6}{6!} = \frac{11}{18}; \frac{\gamma_7}{7!} = \frac{39}{70}; \frac{\gamma_8}{8!} = \frac{2776}{5040}$$

Возникает вопрос существует ли предел дроби и чему он равен?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n!} = ?$$

Пусть A – nxn матрица с вещественными коэффициентами и α – наибольшее положительное слагаемое среди $n!$ алгебраических слагаемых в detA, а β – наименьшее отрицательное слагаемое, тогда выполняется неравенство:

$$|\det A| \leq \left| \frac{n!+h}{2} \cdot |\alpha| - \frac{n!-h}{2} \cdot |\beta| \right| \qquad (4)$$

Неравенство (4) для некоторых матриц дает более точную оценку, чем неравенства Адамара (2) и (3). Например, для матрицы $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ по формулам Адамара $|\det(A_3)| \leq 3\sqrt{3}$, а по соотношению (4) имеем:

$$|\det(A_3)| \leq \left| \frac{3! + h_3}{2} \cdot 1 - \frac{3! - h_3}{2} \cdot 1 \right| = \left| \frac{6+4}{2} - \frac{6-4}{2} \right| = 4;$$

и так как $\det A_3 = 4$, то это точная оценка!

Пусть A=(ij) – вещественная матрица порядка n, введем следующие функции, зависящие от порядка матрицы A:

$$f(n) = \max|\det(A)|, \text{если } a_{ij} = 0 \text{ или } 1 \text{ для всех } 1 \leq i,j \leq n,$$

$$g(n) = \max|\det(A)|, \text{если } a_{ij} = 1 \text{ или} -1 \text{ для всех } 1 \leq i,j \leq n,$$

$$h(n) = \max|\det(A)|, \text{если } a_{ij} = -1 \text{ или } 1 \text{ для всех } 1 \leq i,j \leq n,$$

$$F(n) = \max|\det(A)|, \text{если } 0 \leq a_{ij} \leq 1 \text{ для всех } 1 \leq i,j \leq n,$$

$$G(n) = \max|\det(A)|, \text{если} -1 \leq a_{ij} \leq 1 \text{ для всех } 1 \leq i, j \leq n.$$

Е. Коном [3] доказано, что выполняются соотношения $f(n) = F(n), g(n) = h(n) = G(n), g(n) = 2^{n-1} \cdot f(n-1)$ для любого натурального n. Таким образом, все пять сформулированных задач о нахождении значений функции $f(n), g(n), h(n), F(n), G(n)$ – эквивалентны.

Кроме того, Адамар доказал [4], что справедливо неравенство:

$$f(n) \leq 2^{-n} \cdot (n+1)^{\frac{n+1}{2}} \quad (5)$$

причем равенство в (5) выполняется для данного натурального n только если существует матрица Адамара порядка $n+1$.

Теорема 4. Пусть H – матрица Адамара порядка n, имеют подматрицу Адамара M порядка $m < n$. Тогда $m \leq \frac{n}{2}$.

В то же время приведенные выше (ранее) примеры показывают, что обобщенная матрица Адамара порядка $4k+1$ может содержать в качестве подматрицы матрицу Адамара порядка $4k$.

С помощью компьютерных вычислений, разными авторами вычислены для небольших n значения функции $f(n)$ [6]:

n=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f(n)=	1	1	2	3	5	9	32	56	144	320	1458	3645	9477	26244

Из приведенных примеров можно заметить индексное свойство обобщенных матриц Адамара: они обладают свойством нормальности $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A$. Однако неизвестно будет ли каждая обобщенная матрица Адамара обладать этим свойством, т.е. быть нормальной матрицей.

В [7] дана хорошая нижняя граница для детерминанта обобщенной матрицы Адамара A порядка $m \geq 4$:

$$|\det(A)| \geq 4 \cdot m^{m/2-1} \quad (6)$$

В этой статье обобщенная матрица Адамара называется максимальной детерминантной матрицей.

Пусть A – обобщенная матрица Адамара порядка 5, приведенная нами ранее в примерах, тогда |det(A)|=48, а из неравенства (6) получаем

$$|\det(A)| \geq 4 \cdot 5^{3/2} = 20 \cdot \sqrt{5} \approx 44{,}6$$

т. е. это хорошая нижняя оценка.

В заключении отметим, что задача построения матриц Адамара и обобщенных матриц Адамара любого порядка n^2 вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n^2}$, требуется составить из них nxn матрицу A , имеющую максимальный |det(A)|.

Например, если $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 4, \alpha_5 = 5, \alpha_6 = 6, \alpha_7 = 7, \alpha_8 = 8, \alpha_9 = 9,$

то матрица A=$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 1 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ имеет максимальный detA=412 и найти такую матрицу не сложно. Если же взять 16 чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, то найти 4x4 матрицу из этих чисел с максимальным детерминантом гораздо сложнее:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 6 & 2 \\ 3 & 8 & 16 & 7 \\ 14 & 1 & 9 & 10 \\ 5 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}; \qquad detA = 40800$$

Никакого алгоритма для решения этой задачи, исключая матрицы Адамара, пока не найдены. Другие обобщения матриц Адамара для нечетных порядков содержатся в [10] и [9].

Литература

1. J. Hadamard, Resolution d'une question relative discriminants, Bull des Sci. Math. 17(1893), 240-246.

2. Ю. В. Таранников, Комбинаторные свойства дискретных структур и приложения к криптологии, М. МУНМО, 2011.

3. J.H.E. Cohn, On the value of determinants, Proc, Amer, Math. Soc, 14 (1963), 581-588.

4. S.S. Again, Hadamare matrices and their Application, Aecture Notes in Mathematics, 1168, springer-Verlag, 1985.

5. J.H.E. Cohn, Hadamar matrices and some generalizations, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 515-518.

6. K.J. Haradan, Hadamar Matrices and their Applications, Princeton University Press, 2007.

7. R.R. Brent, J.H. Osborn, General lower bounds of maximal determinants of binary matrices. Preprint, 2012.

8. В.М. Сидельников, Теория кодирования, М. Физматлит, 2008.

9. Н.А. Болонин, Л.А. Мироновский, Матрицы Адамара нечётного порядка// Информационные управляющие системы, 2008, N3, С.46-50.

10. Н.А. Болонин, М.Б. Сергеев, Л.А. Мироновский, Вычисление матриц Адамара-Мерсенна// Информационные управляющие системы, 2012, N5, С. 92-94.

References

1. J. Hadamard, Resolution d'une question relative discriminants, Bull des Sci. Math. 17(1893), 240-246.

2. Ju. V. Tarannikov, Kombinatornye svojstva diskretnyh struktur i prilozhenija k kriptologii, M. MUNMO, 2011.

3. J.H.E. Cohn, On the value of determinants, Proc, Amer, Math. Soc, 14 (1963), 581-588.

4. S.S. Again, Hadamare matrices and their Application, Aecture Notes in Mathematics, 1168, springer-Verlag, 1985.

5. J.H.E. Cohn, Hadamar matrices and some generalizations, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 515-518.

6. K.J. Haradan, Hadamar Matrices and their Applications, Princeton University Press, 2007.

7. R.R. Brent, J.H. Osborn, General lower bounds of maximal determinants of binary matrices. Preprint, 2012.

8. V.M. Sidel'nikov, Teorija kodirovanija, M. Fizmatlit, 2008.

9. N.A. Bolonin, L.A. Mironovskij, Matricy Adamara nechjotnogo porjadka// Informacionnye upravljajushhie sistemy, 2008, N3, C.46-50.

10. N.A. Bolonin, M.B. Sergeev, L.A. Mironovskij, Vychislenie matric Adamara-Mersenna// Informacionnye upravljajushhie sistemy, 2012, N5, C. 92-94.