

УДК 532.526.4+537.84

UDC 532.526.4+537.84

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО МГД ТЕЧЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ МАГНИТНОМ ПОЛЕ****SIMULATION OF TURBULENT MHD FLOW IN A RECTANGULAR CAVITY IN A ROTATING MAGNETIC FIELD**Трунев Александр Петрович  
к.ф.-м.н., Ph.D.Alexander Trunev  
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада**Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada*

В работе рассматриваются численные решения уравнений магнитной гидродинамики, описывающие турбулентные течения проводящей жидкости в прямоугольной полости во вращающемся магнитном поле при больших значениях магнитного числа Тейлора и числа Рейнольдса. Известно, что в природных системах существует механизм турбулентного перемешивания, ведущий к увеличению вязкости сплошной среды. В этой связи предлагаются методы регуляризации уравнений Навье-Стокса, аналогичные природным механизмам перемешивания.

Сформулированы модели течений с учетом свойств турбулентной среды. Предложена модификация уравнения неразрывности с учетом конечной величины пульсаций давления. Показано, что за счет пульсаций давления условие не сжимаемости может нарушаться даже для течений с малыми числами Маха.

Модификация уравнения неразрывности в системе уравнений Навье-Стокса путем введение турбулентной вязкости позволяет осуществить регуляризацию системы уравнений Навье-Стокса для решения задач с быстро изменяющимися динамическими параметрами, например, в случае течения проводящей жидкости во вращающемся с большой частотой магнитном поле.

Показано, что модификация уравнения неразрывности с учетом турбулентных пульсаций приводит к системе нелинейных уравнений параболического типа.

Построена численная модель турбулентного МГД течения в прямоугольной полости при быстром изменении параметров течения. В численных расчетах установлено, что под воздействием вращающегося магнитного поля в проводящей жидкости возникают объемные силы, вызывающие нестационарное вихревое течение, что согласуется с экспериментальными данными. Обнаружен тип крупномасштабной неустойчивости турбулентного течения, связанный с развитием вторичного течения в форме вихрей

The article deals with numerical solutions of MHD equations describing turbulent flow of a conducting fluid in a rectangular cavity in the rotating magnetic field at large values of the magnetic Taylor number, and Reynolds number. It is known that there is a mechanism of turbulent mixing in natural systems, leading to an increase in the viscosity of the continuous medium. In this regard, we suggest methods of regularization of the Navier-Stokes equations, similar to the natural mechanisms of mixing. The models based on the properties of currents of the turbulent environment proposed. A modification of the continuity equation taking into account the final magnitude of pressure fluctuations was considered. It is shown that due to pressure fluctuation the incompressibility condition can be violated even for flows with low Mach numbers. Modification of continuity in the system of Navier-Stokes equations by the introduction of turbulent viscosity allows the regularization of the Navier-Stokes equations to solve the problems with rapidly changing dynamic parameters, for example, in the case of a conducting fluid flow in a magnetic field rotating with a high frequency. It was shown that the modification of the continuity equation taking into account turbulent fluctuations leads to a system of nonlinear equations of parabolic type. A numerical model of turbulent MHD flow in a rectangular cavity with rapid change in flow parameters was proposed. In numerical calculations revealed that under the influence of a rotating magnetic field in a conducting fluid there are forces occur, causing unsteady vortex flow, which is consistent with experimental data. We have discovered a type of large scale instability of the turbulent flow, connecting with the secondary flow in a form of vortices

Ключевые слова: МГД-ТЕЧЕНИЕ,  
ТУРБУЛЕНТНОСТЬ, УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСАKeywords: MHD FLOW, NAVIER-STOKES,  
TURBULENCE**Doi: 10.21515/1990-4665-124-079**

## Введение

Течения проводящей жидкости во вращающемся магнитном поле исследовались в работах [1-10] и других. Экспериментально было обнаружено, что в случае течения в цилиндре при отношении высоты цилиндра к диаметру 1:1 потеря устойчивости течения происходит при значении магнитного числа Тейлора  $Ta_c = 1.232 \times 10^5$  [4]. Для прямоугольной полости аналогичное число составляет  $Ta_c = 1.3 \times 10^5$  [10]. При увеличении магнитного числа Тейлора, в области  $Ta_c \geq 2.6 \times 10^5$  наблюдаются крупномасштабные нестационарные явления, которые обусловлены турбулентностью [2-10]. В связи с большим прикладным значением турбулентных МГД течений проводящей жидкости в металлургии, электрохимии и в процессах роста кристаллов [11] были развиты численные модели [6-10].

Отметим, что в численных моделях вихревого МГД течения во вращающемся магнитном поле [6, 10] используется нестационарное уравнение Навье-Стокса, в котором сила, обусловленная действием магнитного поля, усредняется по времени в соответствии с гипотезой [3]. Кроме того, используется калибровка для векторного потенциала  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , но при этом считается, что электростатический потенциал вносит свой вклад в процесс генерации замкнутых токов в проводящей жидкости. Такой подход представляется несколько противоречивым, поэтому мы сформулировали нестационарную модель, основанную на методе регуляризации уравнения Навье-Стокса для турбулентных течений [12].

В работе [12] рассмотрено общее соотношение для плотности, скорости и давления в турбулентных потоках, которое позволяет осуществить

регуляризацию системы уравнений Навье-Стокса при числе Маха  $M \rightarrow 0$  для решения задач с быстро изменяющимися динамическими параметрами.

Заметим, что вопрос о единственности и гладкости решений уравнений Навье-Стокса был сформулирован в виде шестой проблемы тысячелетия [13-14]. Для этой проблемы имеются, как математические доказательства существования и единственности решения задачи с периодическими граничными условиями [15-16], так и доказательства потери единственности решений при взрывной неустойчивости за конечное время [17].

В работе [19] развита численная модель турбулентного течения в полости в форме прямоугольника или прямоугольного параллелепипеда при ускорении внешнего потока. Установлено, что в этом случае в полости формируется вихревое течение, которое характеризуется не затухающим со временем интегралом энергии.

В настоящей работе мы использовали численную модель турбулентного течения в прямоугольной полости [19] для моделирования течений проводящей жидкости во вращающемся магнитном поле. При моделировании объемной силы электромагнитного происхождения используется стандартное предположение [1-10] о малости индуцированных магнитных полей в сравнении с внешним полем. Полученные результаты по средним параметрам течения согласуются с экспериментальными данными [10].

### **Динамическая модель электромагнитного поля в полости**

Рассмотрим контейнер прямоугольной формы, наполненный электропроводной жидкостью с плотностью  $\rho_0$  и проводимостью  $\sigma$ , помещенный во внешнее магнитное поле, вращающееся с угловой частотой  $\omega$ . Будем предполагать, что в декартовой системе координат магнитное поле вращается вокруг оси ОУ, нормальной к двум сторонам контейнера – рис 1.

Для описания электромагнитного поля в полости и в стенках контейнера следует в уравнениях динамики электромагнитного поля учесть токи, наведенные в проводящей жидкости и в стенках.

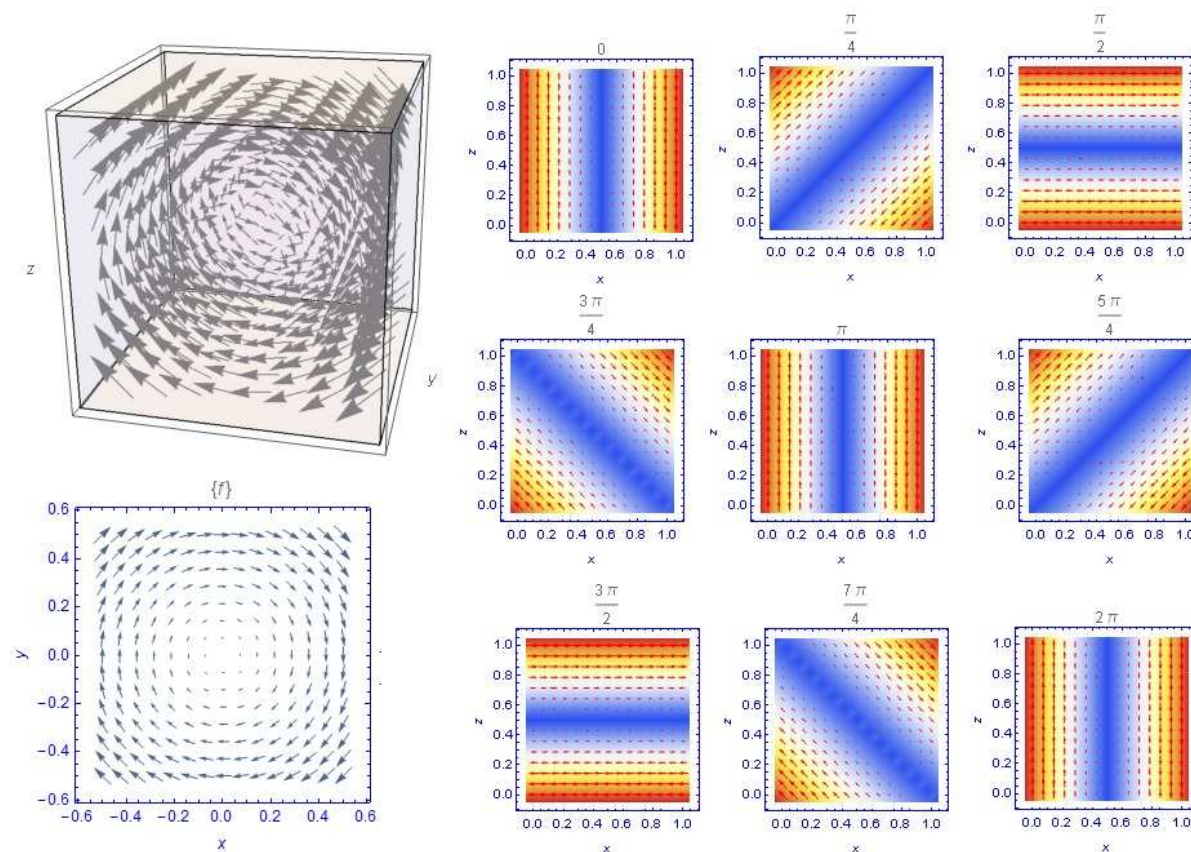


Рис. 1. Вихревое течение в прямоугольной полости (вверху слева), векторное поле объемной силы в сечении  $y = 0$  в различных фазах колебаний (указаны над рисунками) и среднее поле объемной силы (внизу слева).

Необходимо различать случаи, когда стенки контейнера являются изоляторами, проводниками или некоторой их комбинацией. В настоящей работе мы рассмотрим случай непроводящих стенок, что соответствует условиям, при которых были получены данные [10]. Считая, что в объеме жидкости выполняется закон Ома,  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , находим систему уравнений,

описывающих вектор индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$ , векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и электрическое поле  $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= 0, \\ \mathbf{E} &= -\mathbf{A}_t, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \\ \frac{1}{c^2} \mathbf{A}_{tt} - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu \mathbf{j} = -\mu \sigma \mathbf{A}_t\end{aligned}\quad (1)$$

Первое уравнение (1) является стандартным и используется в работах [3-10] и других. Оно означает, что скалярный потенциал не зависит от времени, поэтому можно положить его равным нулю во всем объеме полости. Однако, например, в работах [6, 10] скалярный потенциал используется для моделирования среднего значения силы. При этом предполагается, что нормальная компонента среднего значения тока на стенках полости равна нулю, а в объеме полости

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{j} \rangle = 0 \quad (2)$$

В этой связи заметим, что уравнение (2) выполняется и для мгновенного значения тока в силу закона Ома, первого и второго уравнений (1). Действительно, имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{A}_t = -\sigma (\nabla \cdot \mathbf{A})_t = 0 \quad (3)$$

Поскольку предполагается, что стенки полости являются изоляторами, имеем  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = 0, \sigma \rightarrow 0$ , т.е. ток равен нулю в стенках полости независимо от величины электрического поля. Поэтому можно положить скалярный потенциал равным нулю во всем объеме полости. Таким образом, единственным граничным условием для векторного потенциала является заданное внешнее переменное магнитное поле, которое индуцирует электрическое поле и токи в объеме полости.

Заметим, что в магнитной гидродинамике используется выражение электрического поля в подвижном проводнике [20]

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times \mathbf{B} - [\mathbf{v}\mathbf{B}] \quad (4)$$

Как известно, именно второе слагаемое в правой части (4) служит источником электростатического потенциала [20]. Однако в обсуждаемом случае течения проводящей жидкости во вращающемся магнитном поле второе слагаемое в правой части (4) можно опустить в силу малости магнитного числа Рейнольдса  $Re_m = \mu\sigma UL \ll 1$ , где  $U, L$  – характерная скорость и масштаб течения соответственно [1-10]. Ниже в расчетах мы использовали следующие выражения, описывающие вектор индукции магнитного поля и векторный потенциал во внешней области:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B_0 (\cos \omega t, 0, -\sin \omega t), \\ \mathbf{A}_e &= \frac{[\mathbf{B}\mathbf{r}]}{2} = \frac{B_0}{2} (y \sin \omega t, -x \sin \omega t - z \cos \omega t, y \cos \omega t) \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что выражения (5) удовлетворяют в объеме течения уравнениям  $\nabla \cdot \mathbf{A}_e = 0, \nabla^2 \mathbf{A}_e = 0$ . Однако последнее уравнение (1) не выполняется для выражения векторного потенциала (5). Относительно этого уравнения заметим, что первое слагаемое  $\mathbf{A}_i / c^2$  можно опустить, так как в обсуждаемой задаче в области низких частот это выражение имеет порядок  $(\omega L / c)^2 \ll 1$ . В оставшемся уравнении положим  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_e$ , где  $\mathbf{A}_e, \mathbf{A}_i$  – основное и вторичное поле соответственно. В результате это уравнение принимает вид неоднородного уравнения параболического типа с нулевыми начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t} &= \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \mathbf{A}_i - \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A}_i = 0, \\ \mathbf{A}_i(0, \mathbf{r}) &= 0, \quad \mathbf{A}_i(t, \mathbf{r}_b) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{r}_b$  – координаты поверхности, ограничивающей объем течения. Система уравнений (6) может быть решена численно – рис. 2. В качестве параметров жидкости и внешнего поля были использованы данные [10]. Из

приведенных на рис. 2 результатов следует, что наведенное электрическое поле по амплитуде составляет не более 10% от основного поля в средней области течения и не более 1% в области максимальной скорости потока.

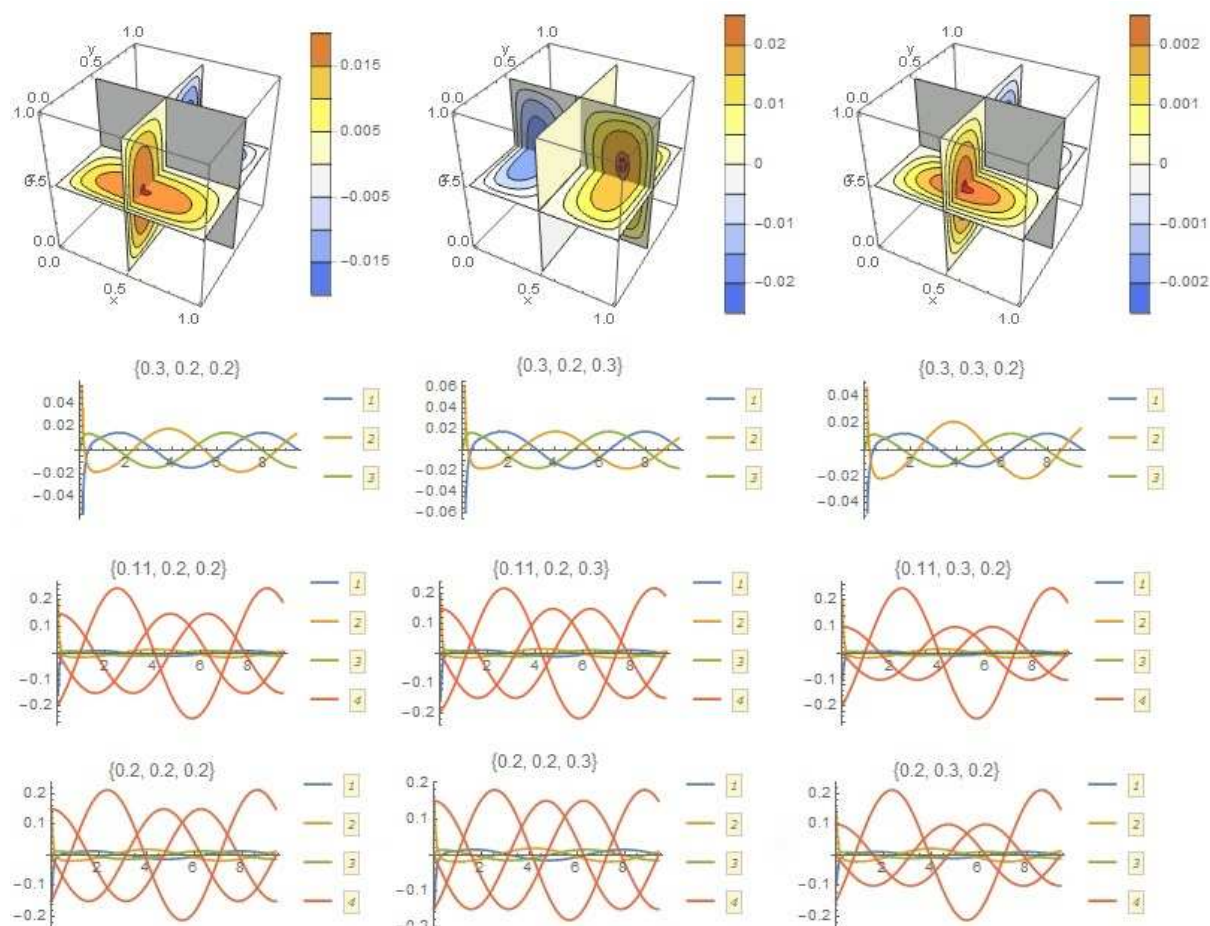


Рис. 2. Распределение составляющих вторичного электрического поля в объеме единичного куба и их изменение во времени в точках  $\{x, y, z\}$  (указаны над рисунками) – кривые 1, 2, 3. Для сравнения даны составляющие основного поля – кривые 4.

Отметим, также, что для данных типа (5) может быть получено решение задачи (6) в виде рядов Фурье. Соответствующие выражения опубликованы в различных руководствах и здесь не приводятся.

### Модель турбулентного течения

В работах [12, 19, 21-27] мы рассмотрели некоторые вопросы моделирования турбулентных течений. Основные результаты, касающиеся неизотермических потоков над шероховатой поверхностью с учетом силы плавучести, были получены в наших работах [21-27] и других.

Рассмотрим систему уравнений, описывающую течение несжимаемой жидкости с учетом объемных сил электромагнитного происхождения

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} &= \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{f}}{\rho_0} \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь обозначено:  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  - вектор скорости потока;  $\nu$  - кинематическая вязкость;  $P$  - давление;  $\rho_0$  - плотность среды,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r})$  - вектор объемной силы, обусловленной взаимодействием наведенных токов с магнитным полем,  $\mathbf{f} = [\mathbf{j}\mathbf{B}]$ .

Методы прямого численного моделирования турбулентных течений (DNS) опираются непосредственно на систему уравнений (7). При этом для вычисления профиля скорости часто используется приближенный метод Галеркина или метод моментов, а также метод Рунге и другие приближенные методы [13-18]. Теорема существования и единственности [13-17] касается именно приближенного, а не точного решения.

Но даже при наличии приближенного метода решения прямое численное моделирование турбулентности не всегда приводит к желаемому результату, так как система уравнений (7), сформулированная для несжимаемых течений, содержит в себе противоречие. Действительно, при выводе этой системы уравнений предполагается, что плотность среды не меняется, а это, в свою очередь, означает малость числа Маха потока [28]

$$M = U_0 / c_s \ll 1 \quad (8)$$



Здесь  $c_s$  – скорость звука. Однако, на таких решениях, которые описаны в работе [17], условие (8) может нарушаться, что приводит к необходимости учета сжимаемости среды. При этом желательно, чтобы тип системы уравнений (7) не изменился при всех ее модификациях. Известно множество способов регуляризации системы уравнений (7), как по давлению, так и по градиенту скорости [12-19].

Рассмотрим следующий подход к учету сжимаемости без изменения типа системы уравнений (7). Запишем уравнение неразрывности для сжимаемой среды в форме

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\rho^{-1} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho c_s^2} \frac{dP}{dt} \quad (9)$$

Оценка правой части уравнения (9) имеет порядок  $M^2 \omega_0$ , где  $\omega_0$  – характерная частота пульсаций давления. При выполнении условия (8) и для умеренных частот правую часть можно устремить к нулю, в результате приходим к первому уравнению (7). Однако для больших частот колебаний параметров потока, характерных для турбулентных режимов, условия (8) может оказаться недостаточно для того, что бы положить нулю правую часть уравнения (9). Область таких частот определяется неравенством  $M^2 \omega_0 \geq 1$ .

Следовательно, турбулентная среда не может считаться несжимаемой даже при малых числах Маха. Для такой среды необходимо сформулировать такое уравнение состояния, которое отражало бы связь параметров в турбулентном потоке. Рассмотрим функционал

$$\tilde{P} = \frac{1}{t} \int_0^t P dt \quad (10)$$

Функционал (10) обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t P dt = P \\ \tilde{P} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P dt = \langle P \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, используя функционал (10) можно описать мгновенное и среднее значение давления в турбулентном потоке. Вычисляя производную по времени от обеих частей выражения (10), находим

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \frac{P - \tilde{P}}{t} \quad (12)$$

Положим в правой части (12)  $t = 1/\omega_0$ , а соответствующий этому времени функционал (10) обозначим  $P_0$ . Теперь мы можем сформулировать необходимый критерий регуляризации в виде

$$\frac{dP}{dt} = \alpha \omega_0 (P - P_0) \quad (13)$$

Здесь  $\alpha, \omega_0, P_0$  – некоторые параметры, которые могут быть определены для потока в целом. В результате применения (13) к уравнению (10), находим

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha \omega_0 \frac{P - P_0}{\rho c_s^2} = -\frac{P - P_0}{\mu_T} \quad (14)$$

Где обозначено  $\mu_T = \rho c_s^2 / \alpha \omega_0$  - параметр, характеризующий вязкость в турбулентном потоке. Используя уравнение (14), можно переформулировать модель Навье-Стокса (7) в виде, удобном для численного интегрирования. Для этого запишем второе уравнение (7) в форме

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad (15)$$

Здесь  $\mathbf{F} = \mathbf{f} / \rho_0$ . Вычислим дивергенцию от обеих частей уравнения (15), тогда, используя (14) с постоянными параметрами  $\mu_T, P_0$  получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P = \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (16)$$

Здесь по повторяющимся индексам  $i, k = 1, 2, 3$  осуществляется суммирование,  $\nu_T = (\mu_T + \mu) / \rho_0$  - параметр турбулентной диффузии поля давления,  $\mu = \rho_0 \nu$  - динамическая вязкость. Наконец, мы можем записать систему уравнений (7) в форме системы уравнений параболического типа [12, 19]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \nu \nabla^2 u_i + F_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P &= \nu_T \nabla^2 P - \mu_T (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \mu_T \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что параметры турбулентной диффузии и вязкости возникают в системе (17) в силу уравнения (14). Параметр турбулентной диффузии в модели (17) имеет ясный физический смысл, как и происхождение напряжений Рейнольдса. Система уравнений (17) может быть использована для моделирования неустановившихся турбулентных течений [12, 19].

Другой вариант преобразованной системы уравнений Навье-Стокса может быть получен путем прямой подстановки выражения давления (14) в уравнение (15), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P_0}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{u})) + \frac{\mathbf{f}}{\rho_0} \quad (18)$$

Здесь параметры  $P_0, \mu_T$  следует считать заданными функциями координат и времени. Отметим, что в модели (18) турбулентность проявляется через механизм второй или объемной вязкости, а не через сдвиговые напряжения, как в стандартных моделях турбулентности, включая нашу модель [21-27].

Уравнение (18) было использовано в работе [19] для моделирования турбулентного течения в прямоугольной полости при ускорении внешнего потока. В настоящей работе мы используем численную модель [19] для

моделирования турбулентного течения проводящей жидкости в прямоугольной полости во вращающемся магнитном поле [6, 10].

### Численная модель 2D течения в прямоугольной полости

Рассмотрим двумерное нестационарное течение проводящей жидкости в прямоугольной полости с непроводящими стенками при наличии объемной силы, обусловленной внешним вращающимся магнитным полем. Запишем уравнение (18) для этого случая в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) u &= \nu \nabla^2 u + \frac{1}{\rho_0} \nabla_x (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{v})) + f_x(t, x, z) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) w &= \nu \nabla^2 w + \frac{1}{\rho_0} \nabla_z (\mu_T (\nabla \cdot \mathbf{v})) + f_z(t, x, z) \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь мы полагаем все функции зависящими от времени и двух координат  $u = u(t, x, z)$ ,  $w = w(t, x, z)$ ,  $\mathbf{v} = (u, 0, w)$ . Сформулируем задачу о течении в прямоугольной полости  $-L_x \leq x \leq L_x$ ,  $L_z \leq z \leq L_z$  при заданных граничных условиях на стенках полости:

$$\begin{aligned} u(0, x, z) &= 0, \quad w(0, x, z) = 0, \quad -L_x \leq x \leq L_x, \quad -L_z \leq z \leq L_z; \\ u(t, -L_x, z) &= u(t, L_x, z) = 0, \quad w(t, -L_x, z) = w(t, L_x, z) = 0; \\ u(t, x, -L_z) &= u(t, x, L_z) = 0, \quad w(t, x, -L_z) = w(t, x, L_z) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Ниже в расчетах мы использовали следующие выражения, описывающие вектор индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$ , векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , электрическое поле  $\mathbf{E}$ , индуцированный ток  $\mathbf{j}$  и объемную силу взаимодействия проводящей жидкости с магнитным полем:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= B_0(\cos \omega t, 0, -\sin \omega t), \\
 \mathbf{A} &= \frac{[\mathbf{Br}]}{2} = \frac{B_0}{2}(y \sin \omega t, -x \sin \omega t - z \cos \omega t, y \cos \omega t), \\
 \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\omega B_0}{2}(y \cos \omega t, -x \cos \omega t + z \sin \omega t, y \sin \omega t), \\
 \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{f} = [\mathbf{jB}] &= \frac{\sigma \omega B_0^2}{2}(-x \sin \omega t \cos \omega t + z \sin^2 \omega t, 0, z \sin \omega t \cos \omega t - x \cos^2 \omega t)
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Такого типа решение электродинамической части задачи (6) может быть получено в том случае, когда параметры системы удовлетворяют условию  $\mu\sigma\omega L^2 \ll 1$ . В этом случае система параболических уравнений (6) вырождается в уравнение Пуассона, решением которого является векторный потенциал во внешней области, что совпадает с (21). Отметим, что выражения (21) удовлетворяют в объеме течения уравнениям  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla^2 \mathbf{A} = 0, \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ .

Интересно, что для данных [10] соответствующий параметр составляет  $\mu\sigma\omega L^2 = 5.92$ , т.е. требование его малости не выполняется. Тем не менее, данные на рис. 2 свидетельствуют, что вторичное электрическое поле мало в сравнении с основным полем, даваемым выражением (21), поэтому им можно пренебречь.

Число Рейнольдса задачи (19)-(21) определяется в процессе решения. Для этого система уравнений (19) приводится к безразмерному виду с использованием масштабов длины, скорости и времени  $L = \max\{2L_x, 2L_z\}, U = \mu_T / \rho_0 L, T = \rho_0 L^2 / \mu_T$ . В результате система уравнений (19) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) u &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u + \nabla_x (\nabla \cdot \mathbf{v}) + k F_x(t, x, z) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) w &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 w + \nabla_z (\nabla \cdot \mathbf{v}) + k F_z(t, x, z) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} F_x &= -x \sin \omega t \cos \omega t + z \sin^2 \omega t, \\ F_z &= z \sin \omega t \cos \omega t - x \cos^2 \omega t. \end{aligned}$$

Здесь параметр  $k$  выражается через магнитное число Тейлора в виде

$$k = \text{Ta}(\mu / \mu_T)^2, \text{Ta} = \frac{\sigma \omega B_0^2 L^4}{2 \rho_0 \nu^2}. \quad (23)$$

Давление в полости определяется из уравнения (14), имеем

$$P = P_0 - \mu_T \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (24)$$

На рис. 3-4 представлены данные моделирования течения в прямоугольной полости с отношением сторон  $L_x / L_z = 1$ , с числом Рейнольдса  $\text{Re} = 10^3$  и с параметрами  $k = 1$ ,  $\omega = 2\pi$ . Заметим, что в нормированных координатах мы сместили центр полости в точку  $x = z = 1/2$ . Из приведенных данных следует, что в полости формируется нестационарное вихревое течение, качественная картина которого согласуется с данными [10].

Из приведенных на рис 3 данных следует, что максимальная амплитуда скорости превосходит 0.8. На рис. 4 представлено распределение модуля скорости потока и профили скорости в сечениях  $x = 1/2$ ,  $z = 1/2$  в моменты времени  $t = 4; 8; 12; 16$ . Отметим, что максимальная амплитуда скорости для каждого профиля монотонно возрастает со временем.

Увеличивая число Рейнольдса в 5 раз, находим турбулентный режим, в котором компоненты скорости испытывают колебания в пространстве и во времени – рис. 5-6.

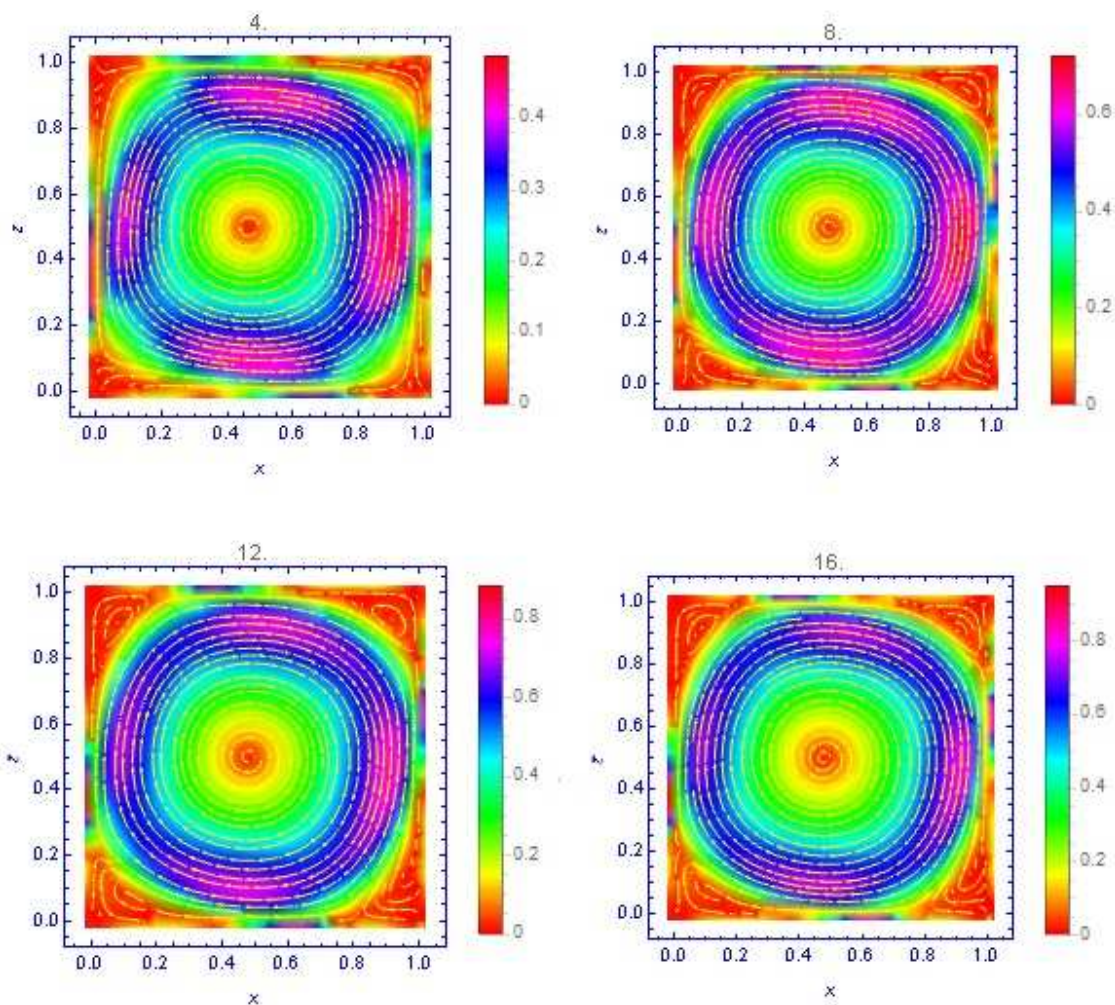


Рис. 3. Линии тока в различные моменты времени, иллюстрирующие вихревой характер течения проводящей жидкости в прямоугольной полости во вращающемся магнитном поле (цифры над рисунками соответствуют безразмерному времени, цвет – величине модуля скорости). Параметры модели (22):  $k = 1$ ,  $Re = 10^3$ ,  $\omega = 2\pi$ .

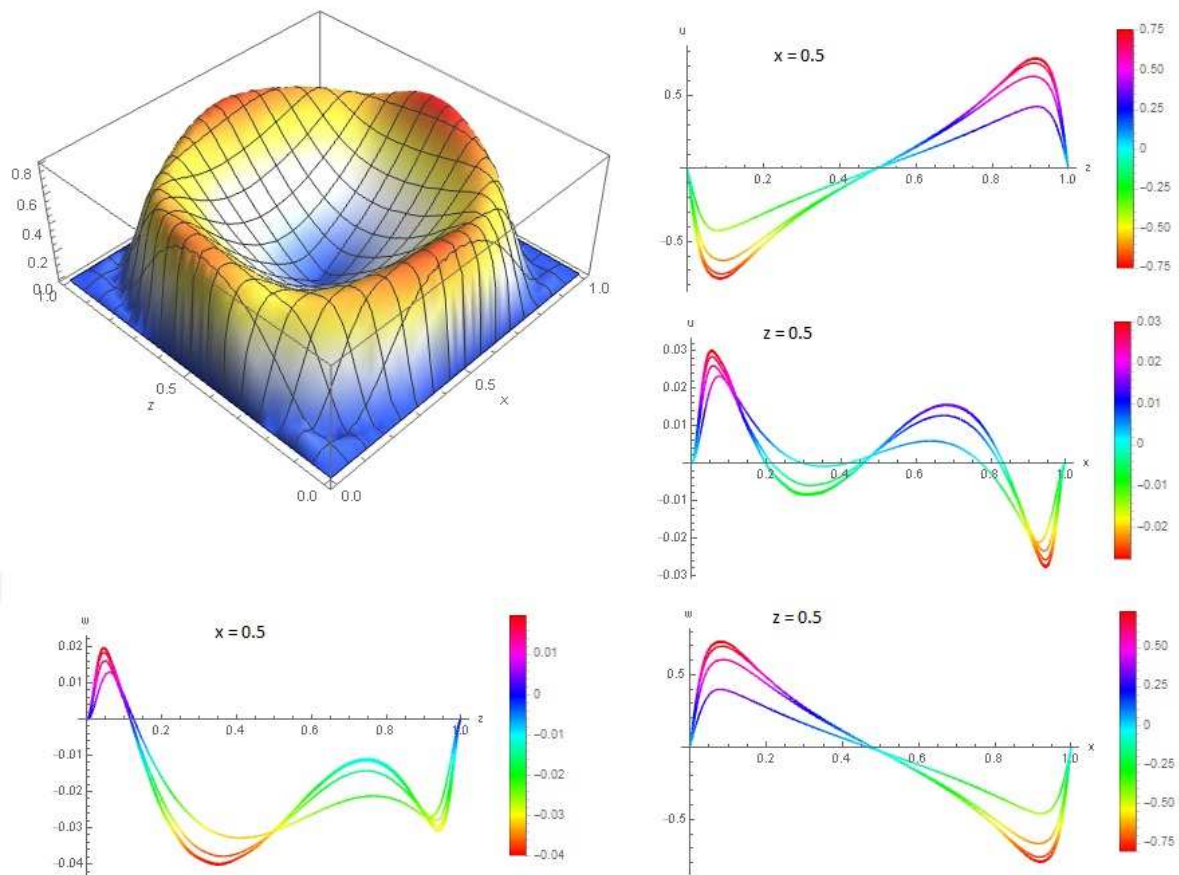


Рис. 4. Модуль скорости в момент времени  $t = 20$  (слева сверху) и профили составляющих скорости в сечениях  $x = 1/2, z = 1/2$  в различные моменты времени  $t = 4; 8; 12; 16$ .



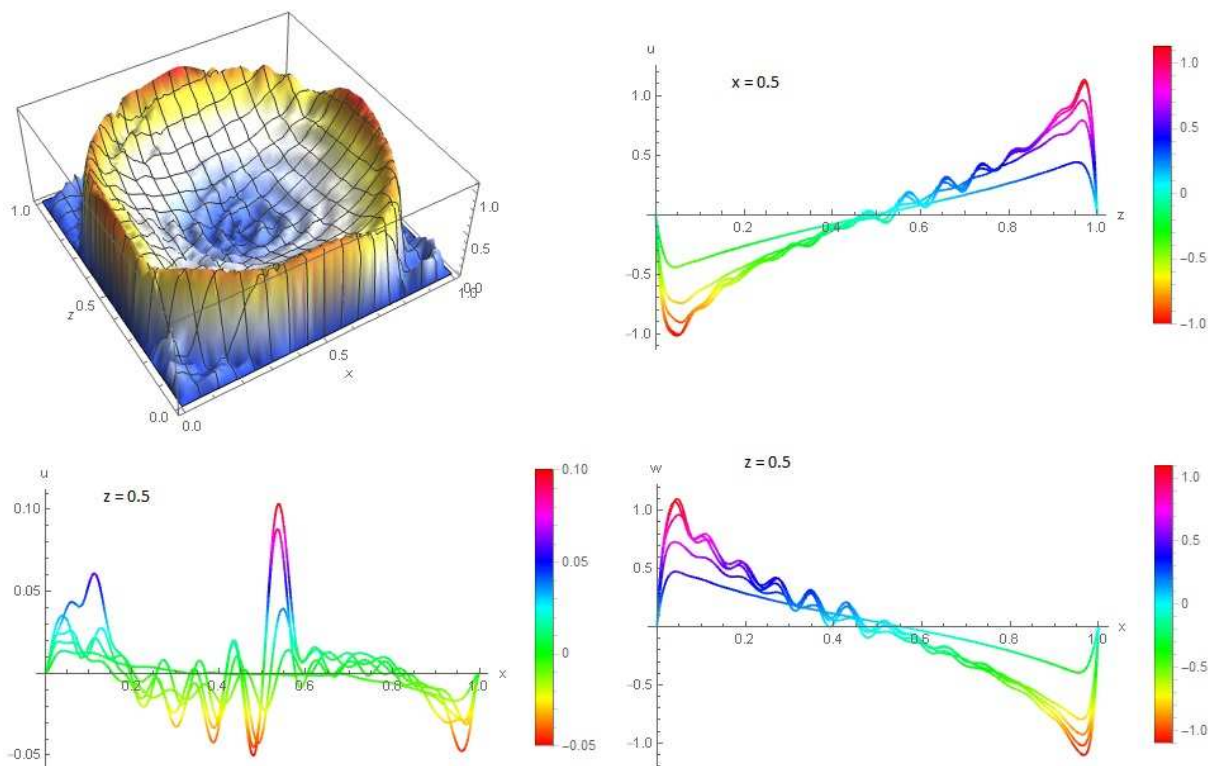


Рис. 5. Модуль скорости в момент времени  $t = 16$  (слева сверху) и профили составляющих скорости в сечениях  $x = 1/2, z = 1/2$  в различные моменты времени  $t = 3.2; 6.4; 9.8; 12; 15.2$ ., рассчитанные по модели (22) для течения проводящей жидкости во вращающемся магнитном поле с параметрами  $k = 1, Re = 5 \cdot 10^3, \omega = 2\pi$ .

Из приведенных на рис. 6 данных следует, что переход к турбулентности осуществляется в некоторый момент времени, когда амплитуда скорости достигнет определенного значения. Такого типа неустойчивость является свойством решений в модели (22) и ранее была обнаружена при обтекании

крыла с ускорением потока [12], а также для турбулентного течения в прямоугольной полости, взаимодействующего с внешним потоком [19].

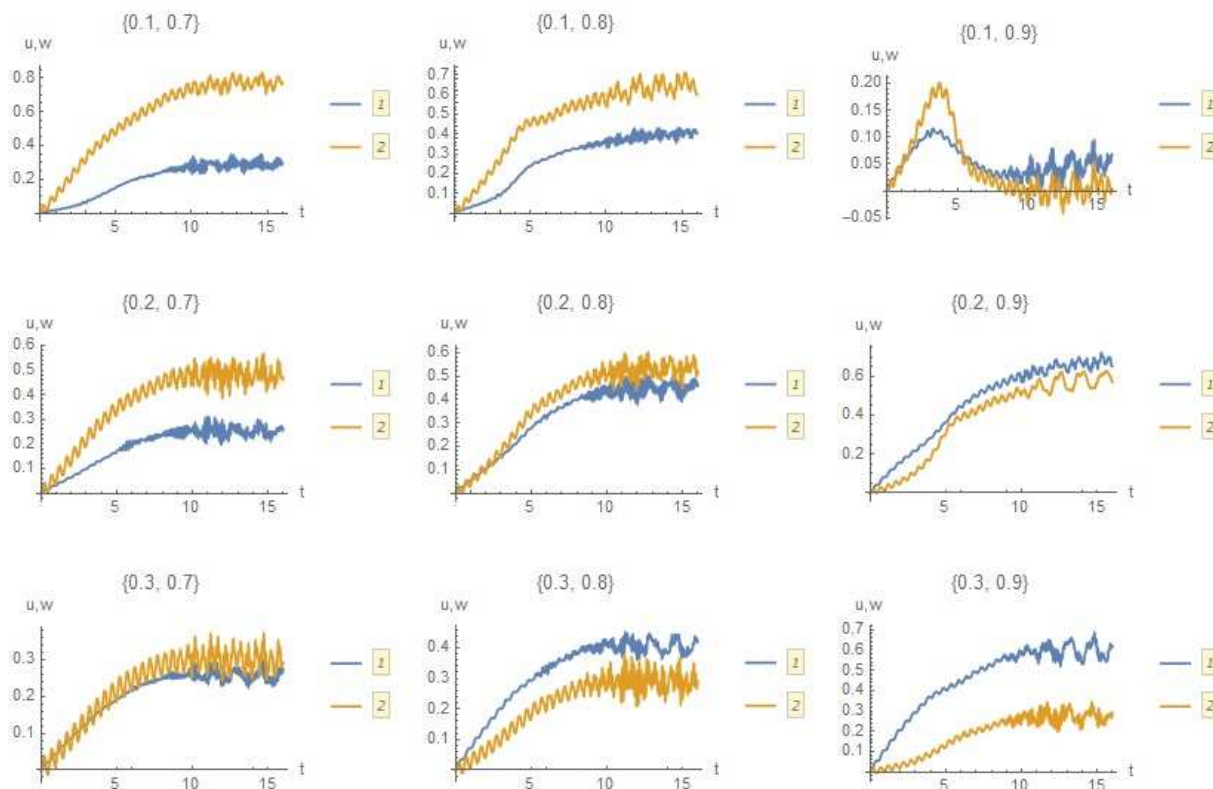


Рис. 6. Зависимость составляющих скорости течения от времени в различных точках, указанных над рисунками в формате  $\{x, z\}$ . Параметры модели (22):  $k = 1$ ,  $Re = 5 \cdot 10^3$ ,  $\omega = 2\pi$ .

Интересной особенностью модели (22) является то, что она описывает как устойчивый режим течения – рис. 3-4, так и неустойчивый режим – рис. 5-6. Вообще говоря, течение с периодически изменяющейся объемной силой не может быть стационарным в обсуждаемой области параметров. Поэтому модели типа [6-10], в которых используется среднее значение силы электромагнитного происхождения, могут служить лишь для качественного

описания явлений. Тем не менее, в работе [10] было получено удовлетворительное согласие расчетных профилей течения с экспериментальными данными, что, видимо, объясняется слабой чувствительностью модели трехмерного вязкого течения к изменению характера действующей силы при усреднении параметров течения по времени [17].

### Численная модель турбулентного 3D течения в полости

Рассмотрим трехмерное нестационарное течение проводящей жидкости во вращающемся магнитном поле в прямоугольной полости. Используя масштабы длины, скорости и времени  $L = \max\{2L_x, 2L_z\}, U = \mu_T / \rho_0 L, T = \rho_0 L^2 / \mu_T$ , запишем уравнение (18) для этого случая в безразмерно форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) u &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u + \nabla_x (\nabla \cdot \mathbf{v}) + kF_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v + \nabla_y (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) w &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 w + \nabla_z (\nabla \cdot \mathbf{v}) + kF_z \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь мы полагаем все функции зависящими от времени и трех координат:  $u = u(t, x, y, z), v = v(t, x, y, z), w = w(t, x, y, z), \mathbf{v} = (u, v, w)$ . Сформулируем задачу о течении в области  $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z$  при заданной внешней силе (21) и с условиями прилипания на твердой поверхности:

$$\begin{aligned} u(0, x, y, z) &= 0, v(0, x, y, z) = 0, w(0, x, y, z) = 0, 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z; \\ u(t, 0, y, z) &= u(t, L_x, y, z) = 0, u(t, x, 0, z) = u(t, x, L_y, z) = 0, \\ v(t, 0, y, z) &= v(t, L_x, y, z) = 0, v(t, x, 0, z) = v(t, x, L_y, z) = 0, \\ w(t, 0, y, z) &= w(t, L_x, y, z) = 0, w(t, x, 0, z) = w(t, x, L_y, z) = 0, \\ u(t, x, y, 0) &= v(t, x, y, 0) = w(t, x, y, 0) = 0, \\ u(t, x, y, L_z) &= v(t, x, y, L_z) = w(t, x, y, L_z) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

На рис. 7 представлены данные моделирования течения в прямоугольной полости с отношением сторон  $L_x = L_y = L_z = 1$ , с числом Рейнольдса  $Re = 2 \cdot 10^3$  и с параметрами  $k = 1$ ,  $\omega = 2\pi$ . Центр полости находится в точке  $x = y = z = 1/2$ .

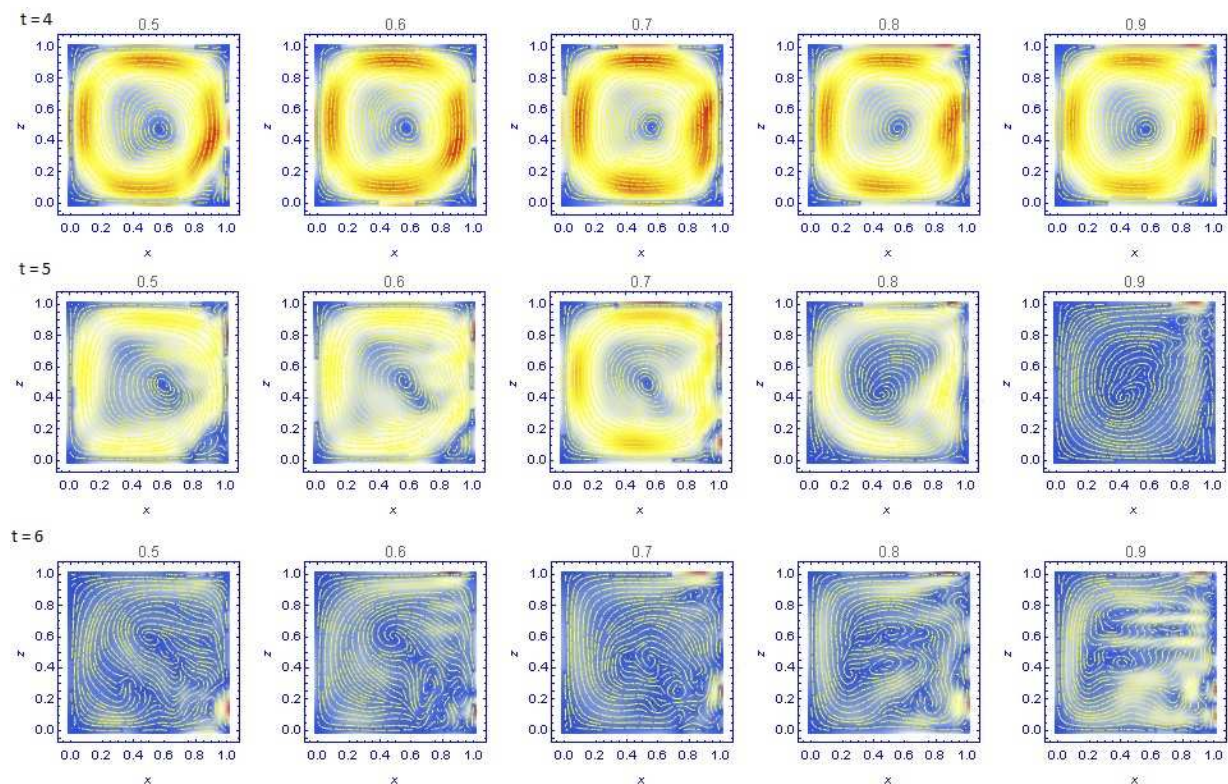


Рис. 7. Линии тока в различные моменты времени и в различных сечениях  $y = const$ , иллюстрирующие разрушение вихревой структуры 3D течения проводящей жидкости в прямоугольной полости во вращающемся магнитном поле (цифры над рисунками соответствуют сечениям  $y = const$ ). Параметры модели (25):  $k = 1$ ,  $Re = 2 \cdot 10^3$ ,  $\omega = 2\pi$ .

Из приведенных на рис 7 данных следует, что к моменту времени  $t = 4$  в полости формируется нестационарное вихревое течение, качественная картина которого согласуется с данными [10] и с данными полученными

выше по модели (22) – рис.3. Однако в момент времени  $t = 5$  основной вихрь начинает разрушаться по всему объему течения. К моменту времени  $t = 6$  вихрь распадается на множество мелких вихрей.

Рассмотрим конкретный дизайн экспериментальной установки [10], имеем:

$$\omega = 100\pi / s, L = 0.0675 \text{ m}, \sigma = 3.29 \cdot 10^6 \text{ S / m}, \nu = 0.34 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / s, \rho_0 = 6403 \text{ kg / m}^3.$$

Предположим, что турбулентная вязкость превосходит молекулярную вязкость в тысячу раз,  $\mu_T / \mu = 10^3$ . Следовательно, масштабы длины, скорости и времени составляют  $L = 0.0675, U = \mu_T / \rho_0 L \approx 5.037 \text{ mm / s}, T = \rho_0 L^2 / \mu_T \approx 13.4 \text{ s}$ .

Отметим, что масштаб скорости практически совпадает с максимальной величиной скорости при значении магнитного числа Тейлора  $Ta = 10^5$  по данным [10]. В этих единицах безразмерная частота и число Рейнольдса составят  $\omega T = 4210, Re = 10^3$ . Следовательно, частоты колебаний в наших примерах и по данным [10] отличаются в 670.042 раз. Согласно (23) мы должны положить  $k = 67$ , чтобы согласовать модели (22), (25) и [10] по амплитуде воздействия внешней силы. При этих значениях параметров, как в модели (22), так и в модели (25), формируется устойчивое течение в полном соответствии с данными [10].

Для нахождения неустойчивого течения в модели (25) положим турбулентную вязкость  $\mu_T / \mu = 5 \cdot 10^3$ , при сохранении частоты колебаний магнитного поля, тогда имеем  $k = 2.68, Re = 5 \cdot 10^3, \omega = 4210$ . Результаты расчетов при указанных значениях параметров приведены на рисунке 8. Сравнивая данные на рис. 7 и 8 находим, что неустойчивость развивается по сходному сценарию в случае низкочастотного и высокочастотного воздействия - рис.7, 8 соответственно.

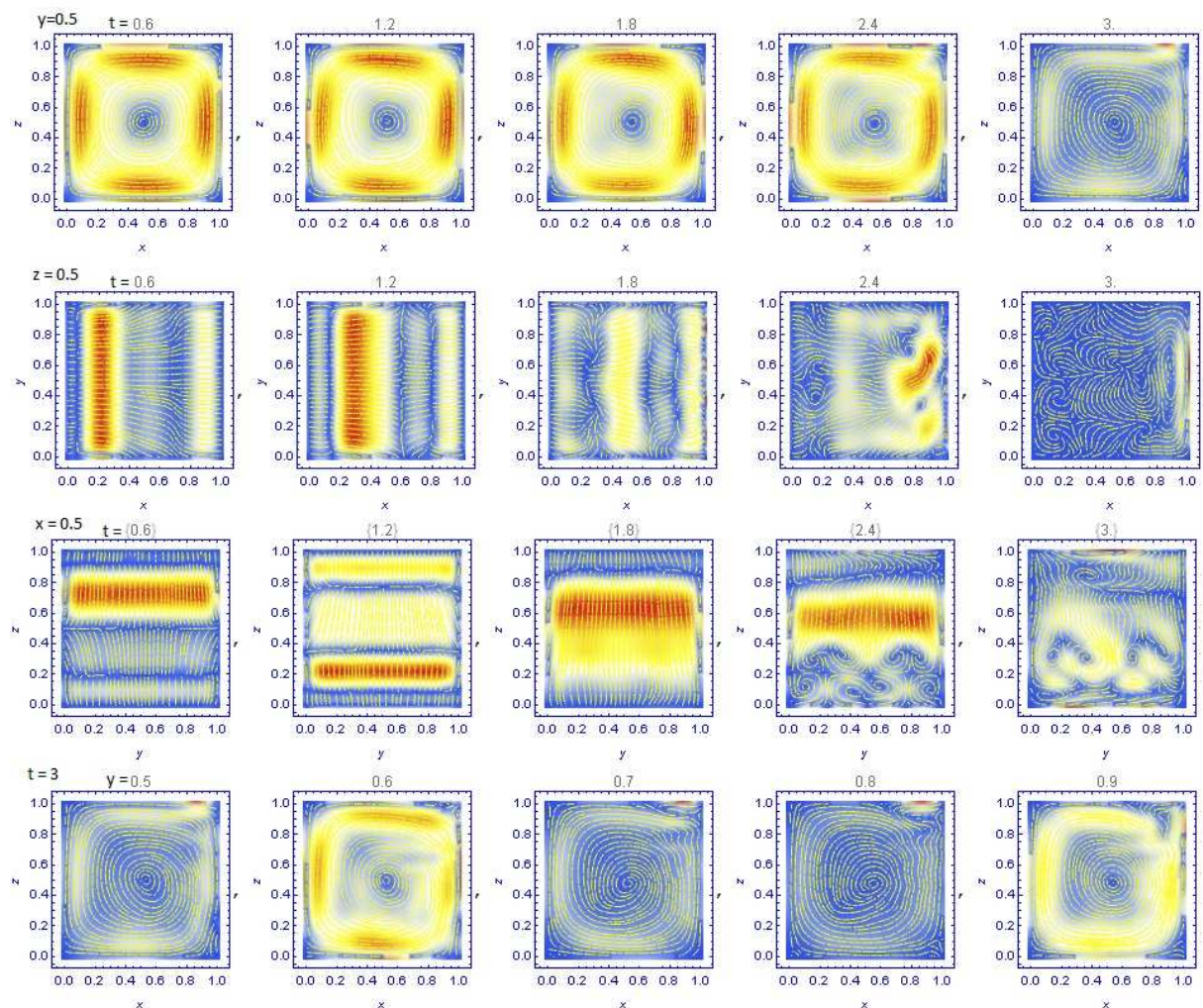


Рис. 8. Линии тока в различные моменты времени и в различных сечениях, иллюстрирующие разрушение вихревой структуры 3D течения проводящей жидкости в прямоугольной полости во вращающемся магнитном поле. Параметры модели (25):  $k = 2.68$ ,  $Re = 5 \cdot 10^3$ ,  $\omega = 4210$ .

Отметим, что время развития неустойчивости в безразмерных единицах практически совпадает для двух случаев, приведенных на рис. 7-8, хотя параметры частоты различаются почти на три порядка. Этот тип крупномасштабной неустойчивости связан с развитием вторичного течения в

форме вихрей, которые буквально взрывают основное течение – рис. 7-8. Как известно, в аналогичном течении в цилиндре основной тип неустойчивости связан с развитием вихрей Тейлора-Гёртлера [8], однако эти вихри не были обнаружены в течениях металла во вращающемся магнитном поле в прямоугольной полости [10].

Наконец, заметим, что развитые модели турбулентных течений могут быть использованы в моделировании МГД течений в технических приложениях в электрохимии, в металлургии и установках по выращиванию кристаллов [11].

#### Библиографический список

1. Moffatt H.K. On fluid flow induced by a rotating magnetic field// J. Fluid Mech., 22, 3, pp. 521-528, 1965.
2. Robinson T. An experimental investigation of a magnetically driven rotating liquid-metal flow//J. Fluid Mech., 60, 4, pp. 641-664, 1973.
3. Davidson P.A., Hunt J.C.R. Swirling recirculating flow in liquid-metal column generated by a rotating magnetic field//J. Fluid Mech., 185, p. 67-106, 1987.
4. Davidson P. Swirling flow in an axisymmetric cavity of arbitrary profile, driven by a rotating magnetic field//J. Fluid Mech., 254, p. 653-663, 1992.
5. Grants I., Gerbeth G. Stability of axially symmetric flow driven by a rotating magnetic field in a cylindrical cavity// Journal of Fluid Mech., vol . 431, 1, p. 407-426, 2001.
6. Stiller J., Frana K. Transitional and weakly turbulent flow in a rotating magnetic field// Physics of Fluids, 18, 074105, 2006.
7. Stiller J., Frana K. A numerical study of flows driven by a rotating magnetic field in a square container// European J. Mechanics B/Fluids, 27, pp. 491-500, 2008.
8. Vogt T., et al. On the formation of Taylor-Gortler vortices in RMF-driven spin-up flow// Exp. Fluids, 52, pp. 1-10, 2012.
9. Travnicov V., et al. Flow oscillation driven by a rotating magnetic field in liquid metal columns with an upper free surface// J. Crystal Grows, 339, pp. 52-60, 2012.
10. Galindo V., et al. Rotating magnetic field driven spin-up flow in a rectangular cavity//arXiv:1612.01174v1, 6 Dec 2016.
11. Gerbeth G., Eckert K., Odenbach S. Electromagnetic flow control in metallurgy, crystal growth and electrochemistry// The European Physical J. Special Topics, 220, 1, 2013.
12. Трунев А.П. Физические механизмы турбулентной вязкости и моделирование турбулентности на основе уравнений Навье-Стокса// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. –

№04(118). С. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf>

13. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость// УМН, -2003., - Т. 58, - №2 (350), - С. 45-78.

14. Fefferman C. L. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. The millennium prize problems/ Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006, pp. 57-67.

15. Отелбаев М. Существование сильного решения уравнения Навье-Стокса// Математический журнал, Том 13, №4 (50), 2013.

16. Давлатов Ш.О. Существование единственного гладкого решения уравнения Навье-Стокса//arXiv:1603.09665 (math.GM)

17. Terence Tao. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation// arXiv:1402.0290v3 [math.AP] 1 Apr 2015.

18. Teman R. Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20<sup>th</sup> century/ Development of Mathematics 1950-2000, Birkhauser, Basel, 2000, 1049-1106.

19. Трунев А.П. Моделирование турбулентного течения в полости на основе уравнений Навье-Стокса / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №05(119). С. 1111 – 1133. – IDA [article ID]: 1191605079. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/79.pdf>

20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М., Наука, 1982.

21. Trunев A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.

22. Trunев A. P. Similarity theory and model of turbulent dusty gas flow over large-scale roughness/ Int. Conf. On Urban Air Quality: Monitoring and Modelling, University of Hertfordshire, Institute of Physics, London, p. 3.8, 1996.

23. Trunев A. P. Similarity theory for turbulent flow over natural rough surface in pressure and temperature gradients/ Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub., Southampton, pp. 275-286, 1996.

24. Trunев A. P., Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scales, Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.

25. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование диффузии примесей в приземном слое атмосферы. - РАН, Sochi, 160 p., 1999.

26. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование турбулентного переноса в атмосфере. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №05(059). С. 179 – 243; №06(060). С. 412 – 491.

27. Трунев А.П. Теория турбулентности и модель влияния плотности шероховатости // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 348 – 382.

28. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика – 3 изд. – М.: Наука. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.



## References

1. Moffatt H.K. On fluid flow induced by a rotating magnetic field// *J. Fluid Mech.*, 22, 3, pp. 521-528, 1965.
2. Robinson T. An experimental investigation of a magnetically driven rotating liquid-metal flow//*J. Fluid Mech.*, 60, 4, pp. 641-664, 1973.
3. Davidson P.A., Hunt J.C.R. Swirling recirculating flow in liquid-metal column generated by a rotating magnetic field//*J. Fluid Mech.*, 185, p. 67-106, 1987.
4. Davidson P. Swirling flow in an axisymmetric cavity of arbitrary profile, driven by a rotating magnetic field//*J. Fluid Mech.*, 254, p. 653-663, 1992.
5. Grants I., Gerbeth G. Stability of axially symmetric flow driven by a rotating magnetic field in a cylindrical cavity// *Journal of Fluid Mech.*, vol . 431, 1, p. 407-426, 2001.
6. Stiller J., Frana K. Transitional and weakly turbulent flow in a rotating magnetic field// *Physics of Fluids*, 18, 074105, 2006.
7. Stiller J., Frana K. A numerical study of flows driven by a rotating magnetic field in a square container// *European J. Mechanics B/Fluids*, 27, pp. 491-500, 2008.
8. Vogt T., et al. On the formation of Taylor-Gortler vortices in RMF-driven spin-up flow// *Exp. Fluids*, 52, pp. 1-10, 2012.
9. Travnicov V., et al. Flow oscillation driven by a rotating magnetic field in liquid metal columns with an upper free surface// *J. Crystal Grows*, 339, pp. 52-60, 2012.
10. Galindo V., et al. Rotating magnetic field driven spin-up flow in a rectangular cavity//arXiv:1612.011740v1, 6 Dec 2016.
11. Gerbeth G., Eckert K., Odenbach S. Electromagnetic flow control in metallurgy, crystal growth and electrochemistry// *The European Physical J. Special Topics*, 220, 1, 2013.
12. Trunev A.P. Fizicheskie mehanizmy turbulentnoj vjzskosti i modelirovanie turbulentnosti na osnove uravnenij Nav'e-Stoksa// *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]*. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №04(118). S. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf>
13. Ladyzhenskaja O.A. Shestaja problema tysjacheletija: uravnenija Nav'e-Stoksa, sushhestvovanie i gladkost// *UMN*, -2003., - T. 58, - №2 (350), - S. 45-78.
14. Fefferman C. L. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. The millennium prize problems/ *Clay Math. Inst.*, Cambridge, MA, 2006, pp. 57-67.
15. Otelbaev M. Sushhestvovanie sil'nogo reshenija uravnenija Nav'e-Stoksa// *Matematicheskij zhurnal*, Tom 13, №4 (50), 2013.
16. Davlatov Sh.O. Sushhestvovanie edinstvennogo gladkogo reshenija uravnenija Nav'e-Stoksa//arXiv:1603.09665 (math.GM)
17. Terence Tao. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation// arXiv:1402.0290v3 [math.AP] 1 Apr 2015.
18. Teman R. Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century/ *Development of Mathematics 1950-2000*, Birkhauser, Basel, 2000, 1049-1106.
19. Trunev A.P. Modelirovanie turbulentnogo techenija v polosti na osnove uravnenij Nav'e-Stoksa / A.P. Trunev // *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]*. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №05(119). S. 1111 – 1133. – IDA [article ID]: 1191605079. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/79.pdf>
20. Landau L.D., Lifshic E.M. *Jelektrodinamika sploshnyh sred.* – M., Nauka, 1982.

21. Trunев A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.
22. Trunев A. P. Similarity theory and model of turbulent dusty gas flow over large-scale roughness/ Int. Conf. On Urban Air Quality: Monitoring and Modelling, University of Hertfordshire, Institute of Physics, London, p. 3.8, 1996.
23. Trunев A. P. Similarity theory for turbulent flow over natural rough surface in pressure and temperature gradients/ Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub., Southampton, pp. 275-286, 1996.
24. Trunев A. P., Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scales, Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.
25. Trunев A.P. Teorija turbulentnosti i modelirovanie diffuzii primesej v prizemnom sloe atmosfery. - RAN, Sochi, 160 p., 1999.
26. Trunев A.P. Teorija turbulentnosti i modelirovanie turbulentnogo perenosa v atmosfere. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №05(059). S. 179 – 243; №06(060). S. 412 – 491.
27. Trunев A.P. Teorija turbulentnosti i model' vlijanija plotnosti sherohovatosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 348 – 382.
28. Landau L. D, Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika. T.6. Gidrodinamika – 3 izd. – M.: Nauka. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.