УДК 528.48

# К ВОПРОСУ ПРЕДРАСЧЕТА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ТОЧЕК В СЕТЯХ ИЗ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ С ИЗМЕРЕННЫМИ СТОРОНАМИ

Соколов Ю.Г., – к.т.н., профессор
Тимошенко Н.А., – ассистент
Данильченко П.М., – к. с.-х. н., доцент
*Кубанский государственный аграрный университет*

В статье показано, что так называемые «переходные коэффициенты» А, В, С и Д, участвующие в составлении условных уравнений, характеризуют геометрию фигур и могут быть использованы для оценки точности положения точек сети. Предлагается использовать рекуррентную формулу для определения средних квадратических ошибок пунктов, полученных в результате накопления ошибок, определяемых последовательными линейными засечками.

Ключевые слова: КООРДИНАТЫ ТОЧЕК, СЕТИ ИЗ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ, РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЗАСЕЧКИ, ПЕРЕХОДНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

В работах [1,2] показано, что для определения коэффициентов условных уравнений для уравнивания геодезических сетей из четырехугольников с измеренными сторонами, требуется знать, так называемые «переходные коэффициенты» А, В, С и Д, имеющие следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
A &= q-(2q-1)\cdot\cos^2 a_B-\frac{1}{2}h\cdot\sin 2a_B\left[1+\frac{q(1-q)}{h^2}\right];\\
B &= h-(2q-1)\frac{\sin 2a_B}{2}-h\cdot\sin^2 a_B\left[1+\frac{q(1-q)}{h^2}\right];\\
C &= -h-(2q-1)\frac{\sin 2a_B}{2}+h\cdot\cos^2 a_B\left[1+\frac{q(1-q)}{h^2}\right];\\
D &= q-(2q-1)\sin^2 a_B+\frac{1}{2}h\cdot\sin^2 a_B\left[1+\frac{q(1-q)}{h^2}\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $a_B$ - дирекционный угол базовой линии АВ (рисунок 1).

$$q=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{S_2}{B}\right)^2-\left(\frac{S_1}{B}\right)^2\right];\ h=\sqrt{\left(\frac{S_2}{B}\right)^2-q^2}\ .$$

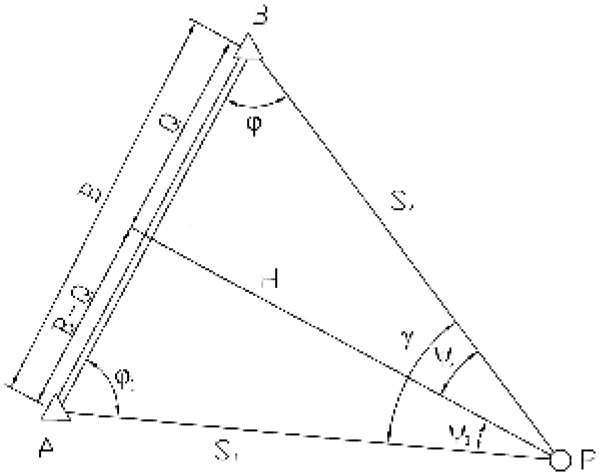


Рисунок 1 – К упрощению коэффициентов А, В, С, Д

Полученные коэффициенты А, В, С и Д можно существенно упростить. Учитывая, что $\frac{H}{B}=h$, $\frac{Q}{H}=tqy_2$ и $\frac{B-Q}{H}=tqy_1$, запишем для коэффициента А следующее выражение:

$$A=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{S_2^2-S_1^2}{B^2}\right]\cos 2a+\frac{1}{2}\cos 2a+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{H}{B}\sin 2a\,\frac{\cos(y_1-y_2)}{\cos y_1\cdot\cos y_2}.$$

Из рисунка 1 видно, что $\cos y_1=\frac{H}{S_1}$, $\cos y_2=\frac{H}{S_2}$. Тогда для А получим:

$$A=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\left(S_2^2-S_1^2\right)}{B^2}\cdot\cos 2a-\frac{S_1\cdot S_2}{B\cdot H}\sin 2a\cdot\cos(y_1-y_2)\right]. \qquad (2)$$

На основании теоремы синусов запишем:

$$\frac{S_2}{\sin j_1}=\frac{B}{\sin g};$$

$$\frac{S_2}{B}=\frac{\sin j_1}{\sin g}=\frac{\cos y_1}{\sin g};$$

$$\frac{S_1}{B}=\frac{\cos y_2}{\sin g}.$$

В результате после несложных тригонометрических преобразований получим:

$$\frac{S_2^2-S_1^2}{B^2}=-\frac{\sin(y_1-y_2)}{\sin g} \qquad (3)$$

Кроме того, из соотношения $\frac{S_2}{H/S_1}=\frac{B}{\sin g}$ найдем $\sin g=\frac{B\cdot H}{S_1\cdot S_2}$. (4)

Подставляя выражения (3) и (4) в (2), получим:

$$A=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\sin(y_1-y_2)}{\sin g}\cos 2a-\frac{\cos(y_1-y_2)}{\sin g}\sin 2a\right] \text{ или } A=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{\sin[(y_1-y_2)-2a_B]}{\sin g}\right\}. \qquad (5)$$

Переходя через углы $y_1$ и $y_2$ к дирекционным углам сторон $S_1$ и $S_2$, получим:

$$A=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\sin(a_1+a_2)}{\sin g}\right]=\frac{\sin a_2}{\sin g}\cdot\cos a_1. \qquad (6)$$

Аналогичным образом находим выражения для остальных коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} B&=\frac{\sin a_2}{\sin g}\cdot\sin a_1;\\ C&=-\frac{\cos a_2}{\sin g}\cdot\cos a_1;\\ D&=-\frac{\cos a_2}{\sin g}\cdot\sin a_1.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Следует заметить, что приведенные коэффициенты характеризуют геометрию фигур (четырехугольников), т.к. соблюдается равенство

$$A^2+B^2+C^2+D^2=\frac{1}{\sin^2 g}. \qquad (8)$$

Это подтверждается и известной формулой оценки точности положения пункта, определенного линейной засечкой:

$$m^2=\frac{2m^2}{\sin^2 g}, \qquad (9)$$

где $m_S$ - средняя квадратическая ошибка линейных измерений.

Таким образом, по углам $g$ можно предрассчитать ожидаемую точность определения положения точек сети (рисунок 2).

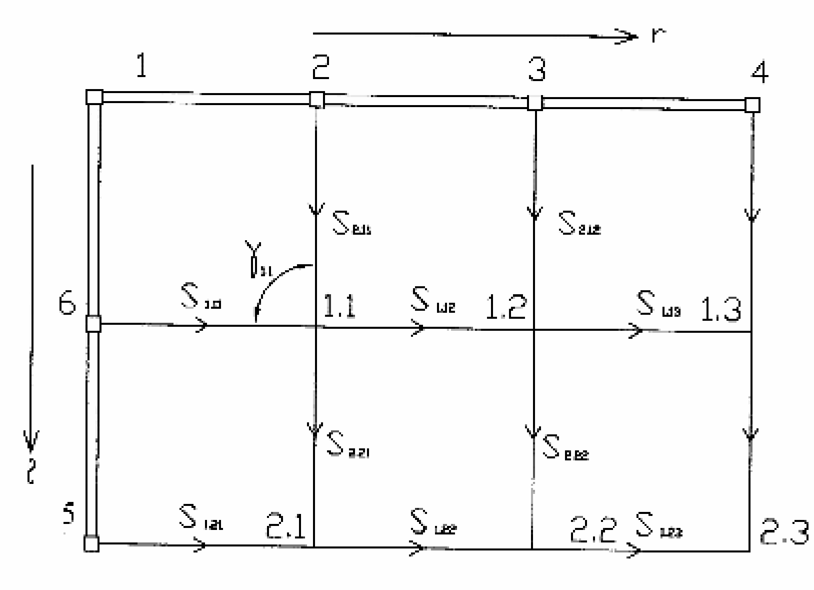


Рисунок 2 – Сеть из четырехугольников с измеренными сторонами.

Так, без учета ошибок исходных данных (точек 1, 2,..., 5,6) средняя квадратическая ошибка ($M_{1.2}$) точки 1.2 будет складываться из ошибки точки 1.1 и ошибки линейной засечки точки 1.2

$$M_{1.2}^2 = m_{1.1}^2 + m_{1.2}^2 = 2m_S^2\left(\frac{1}{\sin^2 g_{1.1}} + \frac{1}{\sin^2 g_{1.2}}\right). \qquad (10)$$

Аналогично можно найти

$$\left.\begin{aligned}
&M_{2.1}^2 = m_{1.1}^2 + m_{2.1}^2 = 2m_S^2\left(\frac{1}{\sin^2 g_{1.1}} + \frac{1}{\sin^2 g_{2.1}}\right)\\
&M_{2.2}^2 = M_{2.1}^2 + M_{1.2}^2 + m_{2.2}^2 = 2m_S^2\left(\frac{2}{\sin^2 g_{1.1}} + \frac{1}{\sin^2 g_{1.2}} + \frac{1}{\sin^2 g_{2.1}} + \frac{1}{\sin^2 g_{2.2}}\right)\\
&M_{2.3}^2 = M_{2.2}^2 + M_{1.3}^2 + m_{2.3}^2 = 2m_S^2\left(\frac{3}{\sin^2 g_{1.1}} + \frac{2}{\sin^2 g_{1.2}} + \frac{1}{\sin^2 g_{1.3}} + \frac{1}{\sin^2 g_{2.1}} + \frac{1}{\sin^2 g_{2.2}} + \frac{1}{\sin^2 g_{2.3}}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

То есть для вычисления средних квадратических ошибок $M_{l,r}$ узловых точек сети применяется рекуррентная формула вида

$$M_{l.r}^2 = M_{l.r-1}^2 + M_{l-1.r}^2 + m_{l.r}^2 \qquad (12)$$

Как видно из (4), применяя рекуррентную формулу, приходится опираться на значения двух ранее найденных средних квадратических ошибок точек, что достаточно трудоемко, т.к. углы $g$ по мере удаления определяемых точек от исходных повторяются различное число раз. Поэтому для вычисления средних квадратических ошибок узловых точек целесообразно составить таблицу, используя которую, можно легко находить значения коэффициентов $K_{l.r}$, характеризующих число повторений углов $g$ в зависимости от местоположения определяемой точки.

Для сети размером $r \times l$, состоящей из квадратов, $\left(g_{1.1} = g_{1.2} = \ldots = g_{l.r} = 90^{\circ}\right)$ величину выражений в скобках можно найти по формуле [3].

$$V_{l.r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r} - 1, \qquad (13)$$

где $n=l+r$.

Например, для точки с координатами $l$=4 и $r$=4, получим

$n=l+r$=8, ($n$-$r$+$1$)=8-4+1=5, $K_{4.4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 1 = 69$ .

Литература

1. Соколов Ю.Г. Патент РФ № 2178869, 2002 г.

2. Соколов Ю.Г., Тимошенко Н.А. Об уравнивании заполняющих геодезических сетей из четырехугольников с измеренными сторонами. Земельный кадастр: Сборник научных трудов. – Выпуск № 4, Ростов – на – Дону, 2002 г., с 63-67.

3. Соколов Ю.Г., Григулецкий В.Г., Тимошенко Н.А. Об оценке точности проектов заполняющих сетей четырелатерации. Оросительные мелиорации в Краснодарском крае. Сборник научных трудов КГАУ, Выпуск 364, Краснодар, 2000 г., с 191-199.