

УДК 530.12+524.7

UDC 530.12+524.7

01.00.00 Физико-математические науки

Physic and Math

**РОЖДЕНИЕ ЦВЕТНОЙ МАТЕРИИ В ПОТОКАХ
РИЧЧИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ****COLOR MATTER GENERATION IN THE RICCI
FLOW IN GENERAL RELATIVITY**

Трунев Александр Петрович

к.ф.-м.н., Ph.D.

*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто,
Канада*

Alexander Trunev

Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.

*Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto,
Canada*

В настоящей работе исследована ограниченная задача многих тел с логарифмическим потенциалом в общей теории относительности. Рассматривается метрика, обладающая осевой симметрией и содержащая логарифмические особенности. В численных расчетах изучены свойства гравитационных потенциалов в задаче об установлении статического состояния, при котором несколько сингулярностей сохраняют начальное положение на оси системы. Это достигается за счет релятивистских эффектов, не имеющих аналогов в теории тяготения Ньютона.

Рассматривается движение релятивистских частиц в логарифмическом потенциале с источниками, распределенными на поверхности тора. Показано, что траектории частиц в таких системах образуют тор покрытый иглами. Установлено, что в потоках Риччи в общей теории относительности возможно рождение материи трех видов – с положительной и с отрицательно плотностью энергии, а также цветной материи, гравитационный потенциал которой является комплексным. Показано, что этот тип материи связан с проявлением квантово-механических свойств, что согласуется с гипотезой Шредингера о происхождении квантовой механики.

Предполагается, что наиболее вероятным кандидатом на роль цветной материи является система кварков, поскольку для описания динамики кварков используется логарифмический потенциал, а сами кварки не наблюдаются в свободном состоянии

In this article, we investigate the restricted problem of many bodies with a logarithmic potential in the general theory of relativity. We consider the metric having axial symmetry and containing a logarithmic singularity. In numerical calculations, we studied the properties of the gravitational potential in the problem of establishing a static condition in which multiple singularities retain the initial position on the axis of the system. This is achieved due to relativistic effects, which have no analogues in Newton's theory of gravitation. The motion of relativistic particles in a logarithmic potential sources distributed on the surface of a torus simulated. It is shown that the trajectory of the particles in these systems form a torus covered with needles. It was found, that the Ricci flow in the general theory of relativity could be born three kinds of matter - positive and negative energy density, as well as the color of matter, the gravitational potential of which is complex. It has been shown that this type of material is associated with the manifestation of the quantum-mechanical properties, which is consistent with the hypothesis of the origin of Schrodinger quantum mechanics. It is assumed that the most likely candidate for the role of the color of matter is the system of quarks as to describe the dynamics of quarks using the logarithmic potential, and the quarks themselves are not observed in the free state

Ключевые слова: ПРОБЛЕМА МНОГИХ ТЕЛ,
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ПОТОКИ
РИЧЧИ

Keywords: MANY-BODY PROBLEM, GENERAL
RELATIVITY, RICCI FLOW

Doi: 10.21515/1990-4665-122-082

Введение

Логарифмический потенциал используется в теории взаимодействия кварков [1-4] и в теории движения частиц в галактиках [5-7]. Все это указывает на особую роль логарифмических потенциалов в физике, в масштабах от кварков до галактик [8]. Задача многих тел в общей теории относительности рассматривалась в работах [6-20] и других. В работах [10-12] было показано, что уравнений поля для пустого пространства достаточно для описания движения материи представленной в виде точечных сингулярностей. В другом подходе к описанию движения материальных тел используется тензор энергии-импульса [14-19]. В этом случае в теорию привлекаются гипотезы, связанные с определением понятия материя. Однако в свете последних открытий в астрофизике, указывающих на значительный вклад темной материи и темной энергии в динамику расширяющейся Вселенной [21-22], вопрос о виде тензора энергии-импульса материи не может быть решен однозначно.

С другой стороны, для описания движения инертной материи в рамках общей теории относительности Эйнштейн и Инфельд сформулировали программу [12]: «Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля».

В работах [5-8] исследовано движение частиц в метрике галактик, в метрике с двумя центрами тяготения, представленных сингулярностями гравитационного поля и в логарифмическом потенциале. В работе [9] сформулирована ограниченная задача многих тел в потоках Риччи в общей

теории относительности. Изучено расширение метрики [23] на случай трех [24] и более сингулярностей.

В настоящей работе изучен вопрос о релятивистском движении в задаче многих тел с логарифмическим потенциалом. Рассматриваются аксиально-симметрические статические метрики в общей теории относительности. Показано, что в таких метриках существует движение пробных частиц, не имеющее классического аналога. Это движение рассматривается как основа для построения динамической теории преонов, кварков и лептонов.

Аксиально-симметрические поля

Уравнения Эйнштейна имеют вид [25-28]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = g_{\mu\nu}\Lambda + \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Здесь $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно. Ниже положим $\Lambda = 0$, что обусловлено малостью влияния этого параметра в ограниченной задаче многих тел.

Решения уравнений Эйнштейна, обладающие осевой симметрией, рассматривались в работах [5-9, 22-27, 29] и других (обзор публикаций дан, например, в [26-27]). Метрика таких пространств, при некоторых предположениях, может быть приведена к виду

$$ds^2 = e^\mu dt^2 - e^{-\mu} (e^\nu d\rho^2 + e^\nu dz^2) - e^{-\mu} \rho^2 d\phi^2 \quad (2)$$

Здесь $\mu(\rho, z), \nu(\rho, z)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна.

Вычисляя компоненты тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ в метрике (2) и полагая для вакуума

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0,$$

находим уравнения поля:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = 0, \\ \omega_2 &= \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \\ \omega_3 &= \frac{\partial v}{\partial z} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \\ \omega_4 &= \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Можно проверить, что не все уравнения (3) являются независимыми и что выполняются следующие два соотношения [26]

$$\omega_4 \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} + \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial \rho}, \quad \rho \omega_1 \frac{\partial \mu}{\partial z} \equiv \frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial \rho} \tag{4}$$

Следовательно, можно в качестве системы уравнений для определения двух функций $\mu(\rho, z), v(\rho, z)$ выбрать, например, первое и четвертое уравнения (3), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Разрешая систему уравнений (5) приходим к определению статических полей гравитации в случае осевой симметрии. Отметим, что в нерелятивистском пределе потенциал $\mu = 2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Из второго уравнения (5) находим оценку $v \sim \mu^2 = 4\varphi^2/c^4$.

Рассмотрим решения системы уравнений (3) вида

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} + a \ln \rho, \\ \nu &= -\frac{m_1^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_1)^2)^2} - \frac{am_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_2)^2)^2} - \frac{am_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \quad (6) \\ &+ \frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \frac{(\rho^2 + (z - L_1)(z - L_2))}{(L_1 - L_2)^2} + \frac{a^2}{2} \ln \rho \end{aligned}$$

В частном случае, полагая в (6) $a = 0$, приходим к выражению потенциалов, впервые полученных в работе [23]

$$\begin{aligned} \mu_s(\rho, z, L_1, L_2) &= -\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}}, \\ \nu_s(\rho, z, L_1, L_2) &= -\frac{m_1^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_1)^2)^2} - \frac{m_2^2 \rho^2}{4(\rho^2 + (z - L_2)^2)^2} + \quad (7) \\ &\frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_1)^2}} \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \frac{(\rho^2 + (z - L_1)(z - L_2))}{(L_1 - L_2)^2} - \frac{m_1 m_2}{(L_1 - L_2)^2} \end{aligned}$$

Поскольку выражения (7) используются в численных расчетах, мы добавили ко второму потенциалу константу, с целью исключить особенность, возникающую при условии $L_1 = L_2$.

Отметим, что выражения (7) подверглись критике со стороны Эйнштейна и Розена [29], как лишенные физического смысла. Действительно, в нерелятивистском случае потенциал μ в (7) сводится к выражению $\mu = 2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Но тогда этот потенциал сводится к потенциалу двух точечных масс $m_{1,2}$, расположенных на оси симметрии системы в точках $z = L_{1,2}$.

Поскольку точечные массы $m_{1,2}$ в метрике (2) не испытывают взаимного перемещения, хотя должны притягиваться согласно теории Ньютона, автор [23] делает ошибочный вывод, что не верна теория относительности Эйнштейна. В действительности, однако, в теории Ньютона существует статическое решение для двух тяготеющих масс, движущихся по круговым

орбитам в синодической системе координат - неинерциальной системе отсчета вращающейся синхронно с периодом обращения тел [30-31].

Как известно, синодическая система координат применяется в постановках ограниченной задачи трех тел в классической механике [30-31], что может быть использовано в формулировке аналогичной задачи в общей теории относительности [9]. Различие же этих двух задач заключается в наличии потенциала ν , который не имеет аналогов в теории Ньютона, но играет роль аналогичную эффектам неинерциальной системы отсчета в классической механике.

Полагая в (6) $m_1 = m, L_1 = 0, m_2 = 0$, получим

$$\begin{aligned}\mu &= -\frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + a \ln \rho, \\ \nu &= -\frac{m^2 \rho^2}{4(\rho^2 + z^2)^2} - \frac{am}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{a^2}{2} \ln \rho\end{aligned}\quad (8)$$

Отметим, что выражение потенциала μ в форме (8) согласуется с выражением гравитационного потенциала, полученным в нерелятивистском приближении путем обработки данных для 50 галактик [5]. Рассмотрим решение первого уравнения (5), содержащее N сингулярностей на оси, имеем

$$\mu = -\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\sqrt{\rho^2 + (z - L_i)^2}} \quad (9)$$

Определение второго потенциала системы (5) для заданной функции (9) не представляет труда, но соответствующие выражения получаются довольно громоздкими, поэтому здесь не приводятся. Отметим, что в частном случае трех тел потенциал ν был получен в работе [24]. В общем же случае можно использовать теорию потоков Риччи для нахождения второго потенциала системы (5) [9].

Рассмотрим решение второго уравнения (5), содержащее N особенностей логарифмического типа [7-8]

$$v = -\sum_{i=1}^N b_i \ln \sqrt{(\rho - \rho_i)^2 + (z - L_i)^2} \quad (10)$$

Потенциал (10) не имеет аналогов в теории Ньютона. Для определения первого потенциала системы (5) для заданной функции (10) используем теорию потоков Риччи [9, 32-42].

Отметим, что для большого числа частиц, характерного для барионной материи, потенциал (10) является доминирующим, что непосредственно следует из оценок $v \sim N, \mu^2 \sim v$. Следовательно, $\mu \sim \sqrt{N} \ll N$, поэтому силы гравитации типа Ньютона, определяемые из потенциала (9), малы в сравнении с силами гравитации типа Эйнштейна, определяемые согласно (10). Рассмотрим динамику частиц в потенциалах типа (10).

Динамика релятивистских частиц

Движение релятивистских частиц в гравитационном поле в общем случае описывается уравнением

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (11)$$

Γ_{kl}^i – символы Кристоффеля второго рода. Символы Кристоффеля вычисляются в метрике (2) согласно

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \frac{\mu_\rho}{2}, \Gamma_{20}^0 = \frac{\mu_z}{2}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{\mu_\rho}{2} e^{2\mu-v}, \Gamma_{11}^1 = \frac{v_\rho - \mu_\rho}{2}, \Gamma_{21}^1 = \frac{v_z - \mu_z}{2}, \Gamma_{22}^1 = \frac{-v_\rho + \mu_\rho}{2}, \Gamma_{33}^1 = \frac{\rho\mu_\rho - 2}{2} re^{-v}, \\ \Gamma_{00}^2 &= \frac{\mu_z}{2} e^{2\mu-v}, \Gamma_{11}^2 = \frac{-v_z + \mu_z}{2}, \Gamma_{21}^2 = \frac{v_\rho - \mu_\rho}{2}, \Gamma_{22}^2 = \frac{v_z - \mu_z}{2}, \Gamma_{33}^2 = \frac{\rho^2 \mu_z}{2} e^{-v}, \\ \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{\rho} - \frac{\mu_\rho}{2}, \Gamma_{32}^3 = -\frac{\mu_z}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь индексы 0,1,2,3 соответствуют координатам t, ρ, z, ϕ .

Рассмотрим уравнения движения (11) с коэффициентами аффинной связности (12), в общем случае имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial z} &= 0, \\ \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{e^{2\mu-\nu}}{2} t_s^2 \mu_r + \frac{e^{-\nu}}{2} r \phi_s^2 (r \mu_r - 2) + r_s z_s (\nu_z - \mu_z) + \frac{z_s^2}{2} (\mu_r - \nu_r) - \frac{r_s^2}{2} (\mu_r - \nu_r) &= 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{e^{-\nu}}{2} (e^{2\mu} t_s^2 + r^2 \phi_s^2) \mu_z + r_s z_s (\nu_r - \mu_r) - \frac{z_s^2}{2} (\mu_z - \nu_z) + \frac{r_s^2}{2} (\mu_z - \nu_z) &= 0, \\ \frac{d^2 \phi}{ds^2} - \frac{\phi_s}{r} (r z_s \mu_z + r_s (r \mu_r - 2)) &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $r = \rho, t_s = dt / ds, r_s = dr / ds, z_s = dz / ds, \phi_s = d\phi / ds$. Построим формальное разложение уравнений (13) по малому параметру $\nu \sim \mu^2 \ll 1$, в первом приближении имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial z} &= 0, \\ \frac{d^2 r}{ds^2} - r \phi_s^2 - \frac{dz}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{1}{2} (t_s^2 + z_s^2 + r^2 \phi_s^2 - r_s^2) \frac{\partial \mu}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{dr}{ds} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{1}{2} (t_s^2 - z_s^2 + r^2 \phi_s^2 + r_s^2) \frac{\partial \mu}{\partial z} &= 0, \\ \frac{d^2 \phi}{ds^2} - \frac{\phi_s}{r} (r z_s \mu_z + r_s (r \mu_r - 2)) &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Из общих соображений следует, что в нерелятивистской теории необходимо положить в уравнениях (14) $t_s = 1$, а все тройные произведения отбросить как малые поправки. В результате этих упрощений находим систему уравнений, описывающих динамику частицы во внешнем гравитационном поле в теории Ньютона

$$\begin{aligned} t = s, \quad \frac{d^2 r}{ds^2} - r \phi_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \quad \frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{2 \phi_s r_s}{r} &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь мы можем восстановить размерность времени, полагая $s = ct$ и учесть, что в нерелятивистском случае потенциал μ в (15) сводится к выражению $\mu = 2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона. Учитывая, что последнее уравнение (15) имеет первый интеграл, находим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r\phi_t^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0, \quad r^2 \phi_t = const. \end{aligned} \quad (16)$$

В классической механике систему уравнений (16) упрощают, оставляя только первое и последнее уравнения

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\phi_t^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad r^2 \phi_t = const. \quad (17)$$

Таким образом, мы показали, что система уравнений (16), описывающих динамику релятивистских частиц в метрике (2) может быть сведена к стандартной модели классической механики (21), описывающей динамику нерелятивистской частицы в центрально-симметрическом поле. Однако при этом метрика (2) с потенциалами (6), (7), (8) или (9) не сводится к галилеевой метрике, что обусловлено наличием сингулярностей [6-9].

Основное свойство метрики (2) заключается в том, что система N тел представляется как статическая система, что достигается за счет релятивистских эффектов, которые обеспечиваются вторым потенциалом системы (5), не имеющим аналогов в теории Ньютона. Используя это свойство метрики (2), можно сформулировать ограниченную задачу $N+1$ тел как движение одного тела в статической системе N тел, обладающей, например, потенциалом (9). В этом случае постановка ограниченной задачи

для $N+1$ тел в теории тяготения Ньютона сводится к решению системы уравнений (16) с потенциалом (9) [9].

Рассмотрим противоположный случай, когда $\mu/\nu \sim 1/\sqrt{N} \ll 1$. Это, в частности, выполняется в случае системы состоящей из большого числа частиц, обладающей логарифмическим потенциалом типа (10). В первом приближении положим в системе уравнений (13) $\mu = 0$, тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{ds^2} &= 0, \quad \frac{d^2 r}{ds^2} - e^{-\nu} r \phi_s^2 + r_s z_s \nu_z + \frac{1}{2} (r_s^2 - z_s^2) \nu_r = 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + r_s z_s \nu_r - \frac{1}{2} (r_s^2 - z_s^2) \nu_z &= 0, \\ r^2 \phi_s &= M = const. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь M – момент импульса частицы. Первое уравнение (18) может быть проинтегрировано, в результате находим $t = s$. Отметим, что в частном случае движения в плоскости (r, z) система уравнений (18) при замене переменных сводится к модели [7-8], описывающей плоское движение в бД.

Численное моделирование движения частиц

При заданном потенциале (10) система уравнений может быть решена численно. Для отображения траектории движения введем координаты $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = z$. На рис. 1 приведены типичные траектории движения релятивистских частиц в метрике (2) с потенциалами (10), вычисленные при начальных данных:

$$\begin{aligned} M &= 0.1; N = 60, b_i = 0.1, \rho_i = 6 + 4 \sin(i2\pi / N), \\ z_i &= 6 + 4 \cos(i2\pi / N), i = 0, \dots, 59; r(0) = 5.06663, r'(0) = 0.01209, \\ z(0) &= 5.01891, z'(0) = 0.02091, \phi(0) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

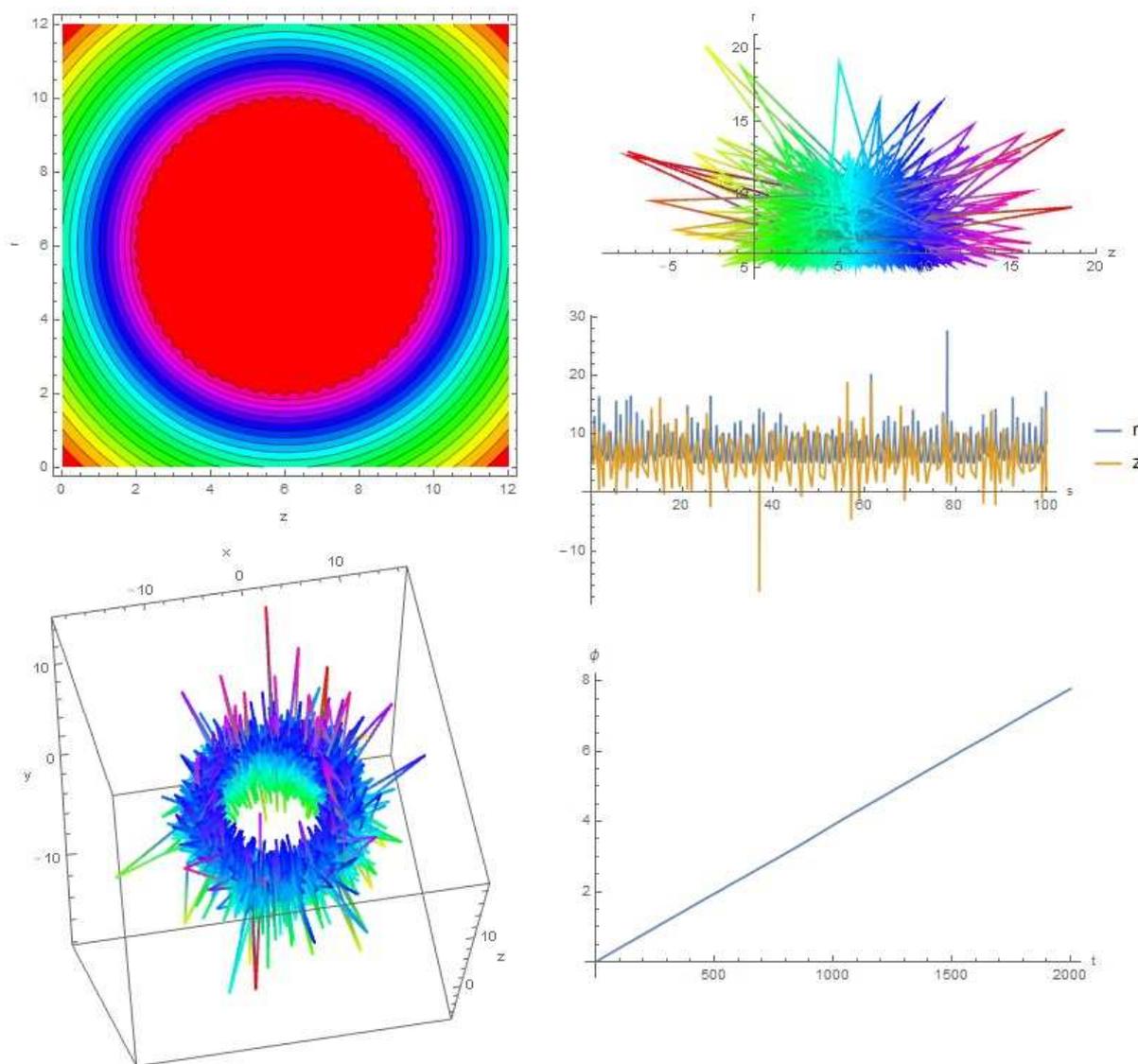


Рис. 1. Траектории частиц в метрике (2), полученные путем численного решения системы уравнений (18) с потенциалом (10) и с начальными данными (19).

Траектория движения в логарифмическом потенциале (10) выглядит как тор покрытый иглами – нижний левый рис. 1. В плоскости (r, z) траектория похожа на клубок спутанных ниток – верхний правый рис. 1, что является основным признаком хаотического поведения.

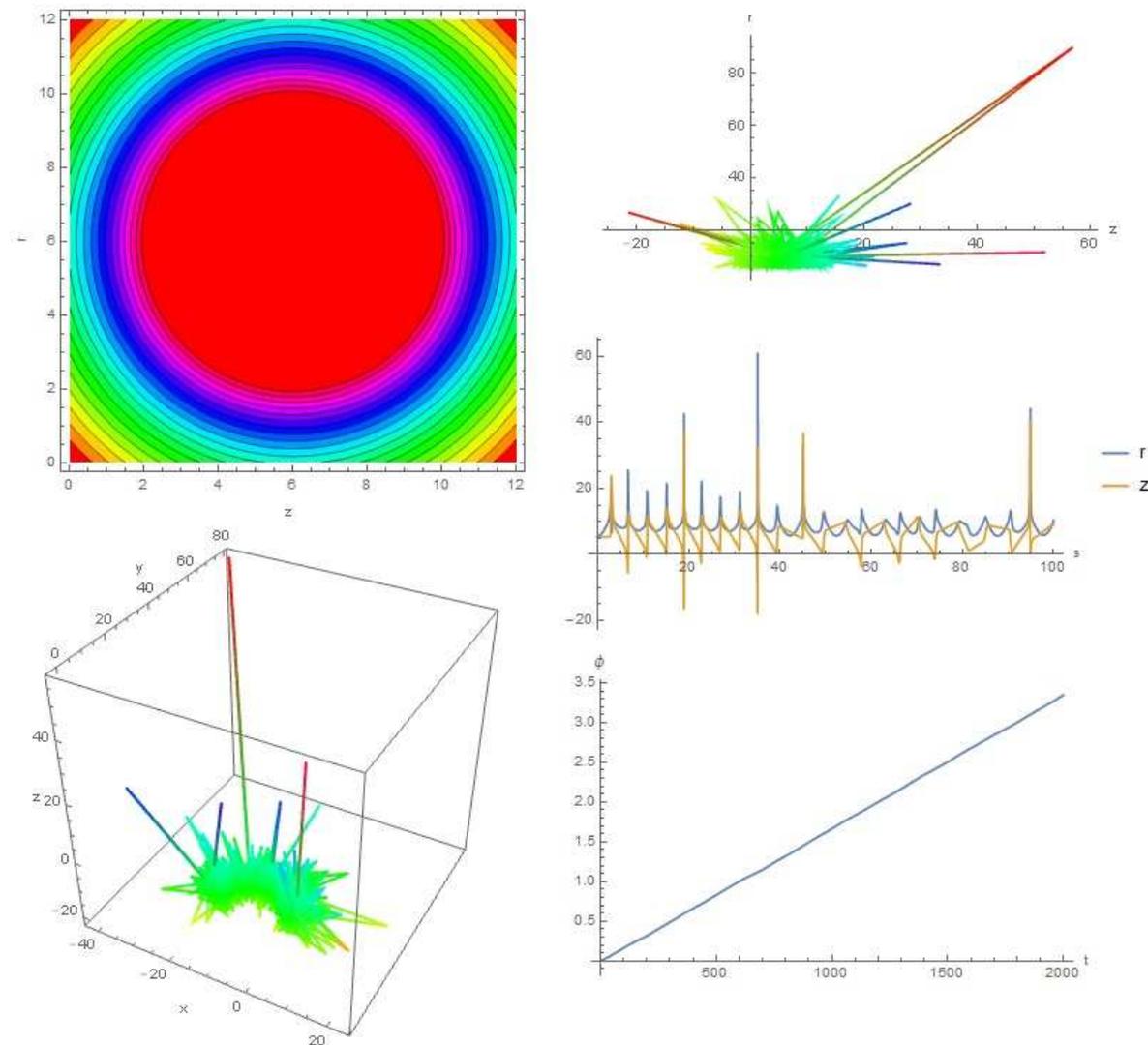


Рис. 2. Линии уровня функции $v(r, z)$ и траектории частиц в метрике (2), полученные путем численного решения системы уравнений (18) с потенциалом (10) и с начальными данными (20).

На рис. 2 приведены траектории движения релятивистских частиц в метрике (2) с потенциалами (10), вычисленные при начальных данных:

$$\begin{aligned}
 M &= 0.1; N = 100, b_i = 0.05, \rho_i = 6 + 4 \sin(i2\pi / N), \\
 z_i &= 6 + 4 \cos(i2\pi / N), i = 0, \dots, 99; r(0) = 5.58501, r'(0) = 0.01209, \\
 z(0) &= 5.2843, z'(0) = 0.02091, \phi(0) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

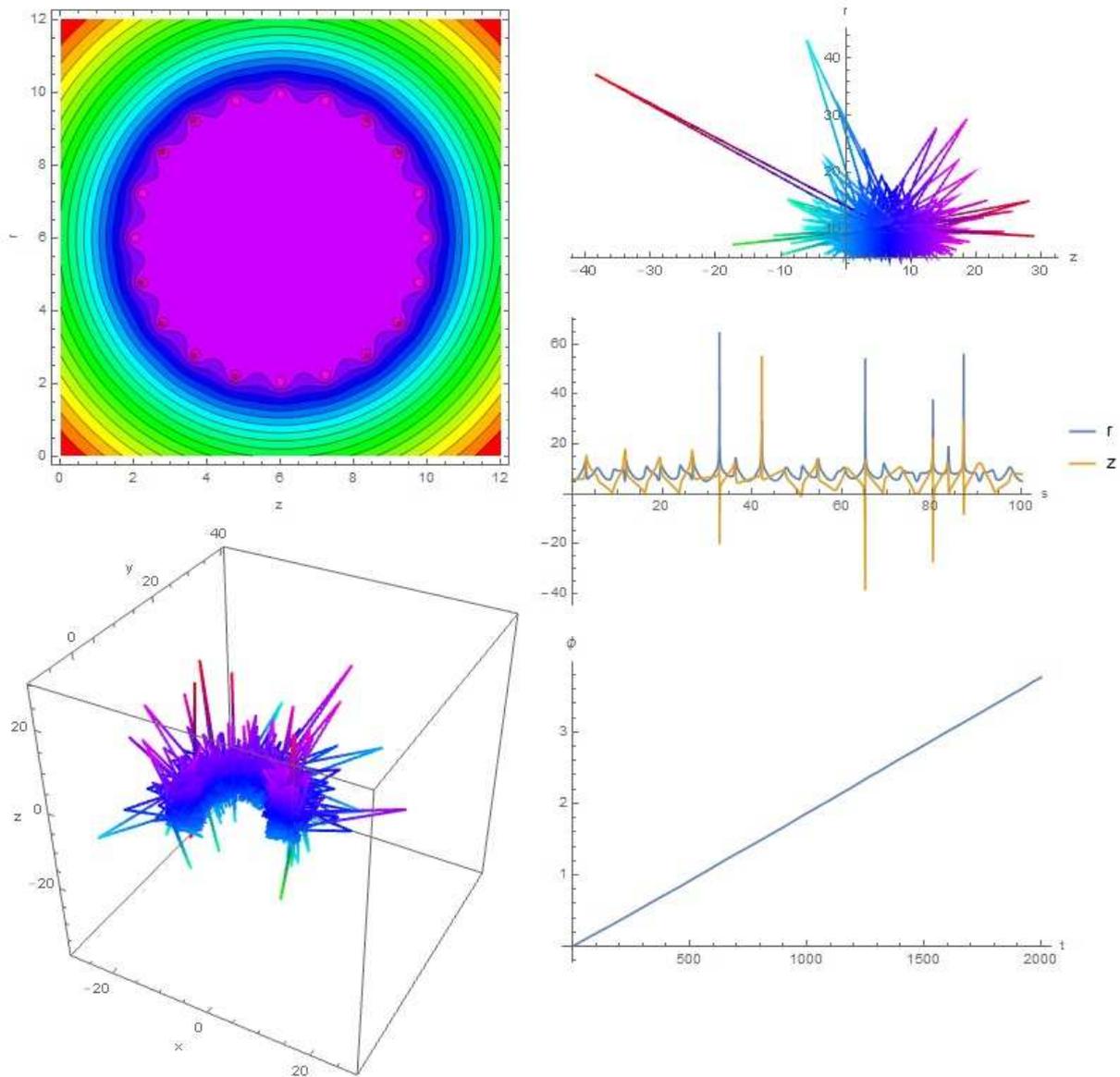


Рис. 3. Линии уровня функции $v(r, z)$ и траектории частиц в метрике (2), полученные путем численного решения системы уравнений (18) с потенциалом (10) и с начальными данными (21).

На рис. 3 приведены траектории движения частиц в метрике (2) с потенциалами (10), вычисленные при начальных данных:

$$\begin{aligned} M &= 0.2; N = 20, b_i = .25, \rho_i = 6 + 4 \sin(i2\pi / N), \\ z_i &= 6 + 4 \cos(i2\pi / N), i = 0, \dots, 19; \\ r(0) &= 5.06127, r'(0) = 0.01209, \\ z(0) &= 5.83642, z'(0) = 0.02091, \phi(0) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Вообще говоря, приведенные на рис. 1-3 данные не всегда удовлетворяют критерию $\mu/\nu \sim 1/\sqrt{N} \ll 1$, хотя формально пара $\mu = 0, \nu = -\sum_{i=1}^N b_i \ln \sqrt{(\rho - \rho_i)^2 + (z - L_i)^2}$ является точным решением системы уравнений (5). Однако при этом не выполняются второе и третье уравнения системы (3). Чтобы удовлетворить и этим уравнениям, следует учесть их, например, через граничные условия для первого уравнения (5). Для решения такого рода задач была сформулирована модель [40-42]. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Моделирование изменения метрики в потоках Риччи

Для моделирования изменения метрики используем потоки Риччи [32-42], которые описываются уравнением

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} = D_0 R_{ik} \quad (22)$$

Здесь D_0 – коэффициент диффузии, которые в стандартной теории [32-39] полагают равным $D_0 = -2$, однако в метрике (2) следует положить $D_0 = 2$, тогда (5) сводится к системе уравнений параболического типа:

$$\begin{aligned} e^{\nu-\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \\ e^{\nu-\mu} \frac{\partial \nu}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Сравнивая (23) и (5) находим, что для установившихся потоков при условиях $\mu_t = v_t = 0$ система (23) сводится к (5). Обоснованием для такого перехода от статической системы (5) к системе уравнений параболического типа (23) может служить теория, развитая в работах [32-39] и других.

Физический смысл расширения статической модели (5) до модели (23), описывающей потоки Риччи, заключается в том, что по начальным и граничным условиям можно определить к каким решениям сходится решение системы уравнений (5), содержащее особенности, например, решение (10).

Используя второе и третье уравнения (3), можно исключить производные потенциала μ из уравнений (23), действительно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0. \Rightarrow \\ \frac{\partial \mu}{\partial \rho} = \pm \frac{\sqrt{v_\rho \pm \sqrt{v_\rho^2 + v_z^2}}}{\sqrt{\rho}}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial z} = \pm \frac{\sqrt{-v_\rho \pm \sqrt{v_\rho^2 + v_z^2}}}{\sqrt{\rho}} \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя выражения производных μ в уравнения (23), находим

$$\begin{aligned} e^{v-\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \pm \frac{\sqrt{v_\rho \pm \sqrt{v_\rho^2 + v_z^2}}}{\rho^{3/2}} \\ e^{v-\mu} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \pm \frac{\sqrt{v_\rho^2 + v_z^2}}{\rho} \end{aligned} \quad (25)$$

Следовательно, в случае $\mu/v \sim 1/\sqrt{N} \ll 1$ мы имеем не одну, а четыре модели, которые описывают гравитационные поля, порождающие материю трех видов по механизму [42]. Выбирая в первом уравнении (25) плюс под знаком радикала, имеем две системы уравнений с положительной и отрицательной плотностью «материи» соответственно

$$\begin{aligned}
 e^{v-\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \pm \frac{\sqrt{v_\rho} + \sqrt{v_\rho^2 + v_z^2}}{\rho^{3/2}} \\
 e^{v-\mu} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\sqrt{v_\rho^2 + v_z^2}}{\rho}
 \end{aligned}
 \tag{25.1}$$

Выбирая же знак минус, находим, что гравитационный потенциал $\mu = 2\varphi/c^2$, где φ - гравитационный потенциал в теории гравитации Ньютона, является комплексным

$$\begin{aligned}
 e^{v-\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \pm i \frac{\sqrt{-v_\rho} + \sqrt{v_\rho^2 + v_z^2}}{\rho^{3/2}} \\
 e^{v-\mu} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\sqrt{v_\rho^2 + v_z^2}}{\rho}
 \end{aligned}
 \tag{25.2}$$

Материю, гравитационный потенциал которой является комплексным, будем называть цветной, поскольку наиболее вероятным кандидатом на роль цветной материи является система кварков. Действительно, для описания динамики кварков используется логарифмический потенциал [1-4], а сами кварки не наблюдаются в свободном состоянии.

В этой связи заметим, что Шредингер в письме к Эйнштейну [43] указал на существование такого рода гравитационных потенциалов, которые порождают квантово-механические явления: «...я уже давно думаю, что следует отождествлять Ψ -волны с волнами нарушения гравитационного потенциала - конечно, не с теми, которые ты исследовал впервые, но с теми, которые обладают действительной массой, т.е. не исчезающим T_{ik} . Это значит, я думаю, что нужно в абстрактной общей теории относительности, содержащей T_{ik} еще как «*asylum ignorantial*» (по твоему собственному выражению), ввести материю не в качестве массивных точек или чего-нибудь подобного, а как квантованные гравитационные волны». Отметим, что эта гипотеза Шредингера получила развитие в моделях [44-46] и других.

Рассмотрим задачу об установлении потенциалов системы (25) в прямоугольной области $r_0 \leq \rho \leq R, -L/2 \leq z \leq L/2$ при заданных начальных условиях

$$t = 0: \mu = 0, v(0, \rho, z) = v_0(\rho, z, \{b_i, L_i\}) = -\sum_{i=1}^N b_i \ln \sqrt{\rho^2 + (z - L_i)^2}. \quad (26)$$

Здесь r_0 - граница области, отделяющая область численного интегрирования от оси системы, содержащей логарифмические особенности, согласно (26).

Краевые условия для потенциалов сформулируем в виде

$$\begin{aligned} t > 0: v(t, r_0, z) &= v_0(r_0, z, \{b_i, L_i\}), \quad \mu(t, r_0, z) = 0; \\ v(t, R, z) &= v_0(R, z, \{b_i, L_i\}), \quad \mu(t, R, z) = 0; \\ v(t, \rho, -L/2) &= v_0(\rho, -L/2, \{b_i, L_i\}), \quad \mu(t, \rho, -L/2) = 0; \\ v(t, \rho, L/2) &= v_0(\rho, L/2, \{m_i, L_i\}), \quad \mu(t, \rho, L/2) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

На рис. 4-5 представлены результаты моделирования установления потенциалов в потоках Риччи, выполненные по (25), (26) и (27) при следующих значениях параметров:

$$N = 20; b_i = 1, r_0 = 10^{-2}, R = 2, L = 4. \quad (28)$$

Для всех радикалов в системе (25) выбраны положительные знаки. На рис. 4 показан процесс установления потенциала v в различных точках, указанных над рисунками. На рис. 5 представлены линии уровня функций μ, v в различные моменты времени, указанные над рисунками. Из приведенных данных следует, что потенциалы системы стремятся в каждой точке к некоторым значениям. Потенциал v достигает максимальных и минимальных значений на границах области, тогда как потенциал μ имеет локальные экстремумы внутри области интегрирования.

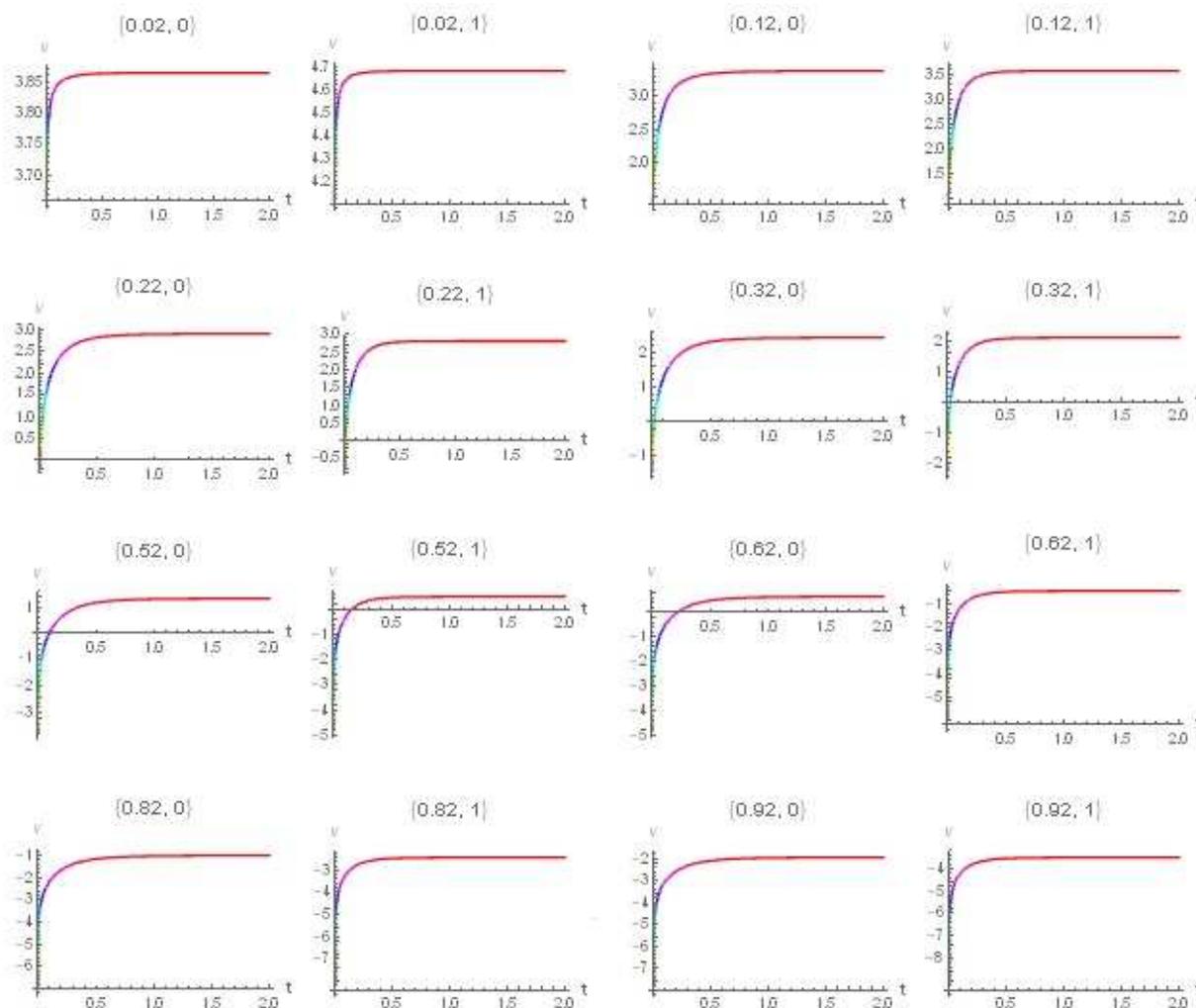


Рис. 4. Зависимости функции v от времени в различных точках $\{\rho, z\}$ в задаче с данными (28): координаты точек указаны над рисунками.

Результаты, приведенные на рис. 5. показывают, что требование $\mu/\nu \sim 1/\sqrt{N} \ll 1$ выполняется не во всей области, а только в некоторой ее части. Однако к потенциалу ν всегда можно добавить константу такую, что требование $|\mu/\nu| \ll 1$ будет выполняться во всей области интегрирования.

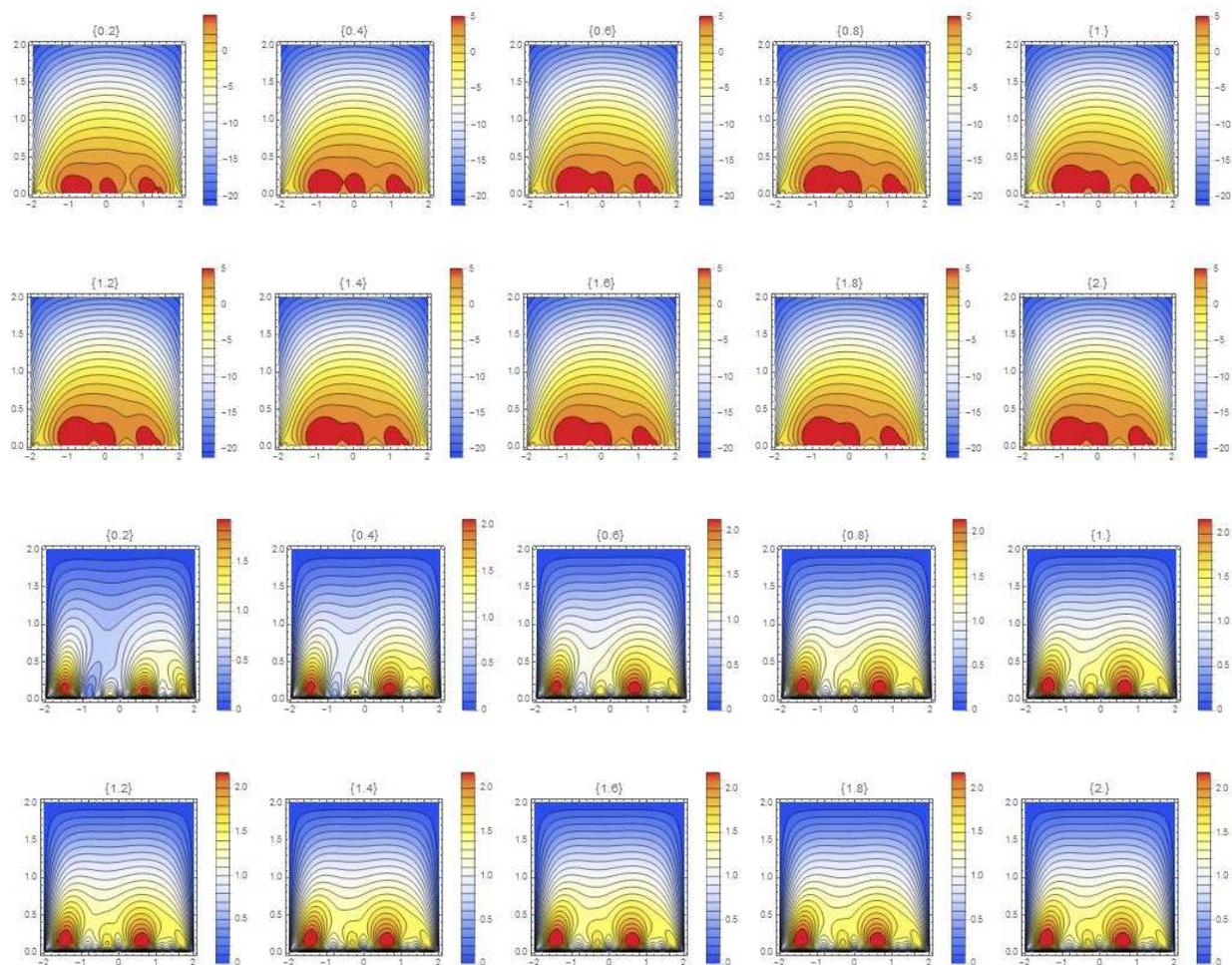


Рис. 5. Линии уровня функции v (верхние два ряда) и функции μ (нижние два ряда) в различные моменты времени в задаче с данными (28): значения параметра времени t указаны над рисунками.

Наконец заметим, что приведенные выше данные по движению частиц в логарифмическом потенциале (10) являются примером релятивистского движения в метрике (2) с особенностями, отличными от особенности в метрике Шварцшильда [47], широко используемой в моделировании гравитационных волн [48-50]. Полученные результаты [9, 40-42] свидетельствуют о многообразии явлений, которые могут быть описаны в

общей теории относительности в потоках Риччи. Так, например, движение частиц в модели (13) с потенциалами (25) можно рассматривать как основу для построения динамической теории преонов, кварков и лептонов. Однако решение этой задачи выходит за рамки настоящей работы.

Библиографический список

1. Quigg C., Rosner Jonathan L. Quarkonium level spacings//Physics Letters B, Volume 71, Issue 1, p. 153-157.
2. Khelashvili A. A., Khmaladze V. Yu., Chachava N. D. Many-particle problem with logarithmic potentials and its application to quark bound states// Theoretical and Mathematical Physics, January 1985, Volume 62, Issue 1, pp 90-95.
3. Imbo T.D. Simple Baryon-Meson Mass Relations From A Logarithmic Interquark Potential// arXiv:hep-ph/9701352v1, 23 Jan, 1997.
4. Patricio Gaete. On finite interquark potential in $D = 3$ driven by minimal length//arXiv: 1407.0407v1, 1 Jul 2014.
5. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрика галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>
6. Трунев А.П. Динамика релятивистских частиц в метрике галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №02(116). С. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf>.
7. Трунев А.П. Динамика частиц в метрике с логарифмическим потенциалом / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №06(120). С. 1067 – 1092. – IDA [article ID]: 1201606070. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/70.pdf>
8. Трунев А.П. Логарифмический закон в динамических системах от кварков до галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №06(120). С. 1470 – 1494. – IDA [article ID]: 1201606099. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/99.pdf>.
9. Трунев А.П. Ограниченная задача многих тел в потоках Риччи в общей теории относительности / Трунев А.П. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №08(122). – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/70.pdf>, 1,563 у.п.л. – IDA [article ID]: 1221608070. <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-122-070>

10. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion//Ann. Math., 39, 65-100, 1938.
11. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and Problems of Motion II//Ann. Math., 41, 455-564, 1940.
12. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1, 209—241, 1949.
13. Infeld L., Plebansky J. Motion and Relativity.- Pergamon Press, NY, 1960.
14. Фок В.А. О движении конечных масс в общей теории относительности// ЖЭТФ, 9, №4, 375, 1939.
15. Papapetrou A. Equations of Motion in General Relativity// Proc. Phys. Soc. A 64, 57, 1951.
16. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: ГИТЛ, 1956.
17. Levi-Civita T. The n–Body Problem in General Relativity. – Springer, 1964.
18. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.
19. Рябушко А.П. Движение тел в общей теории относительности – Мн.: Вышэйшая школа, 1979.
20. Musielak Z.E., Quarles B. The three-body problem// arXiv:1508.02312v1, 10 Aug 2015.
21. P.A.R. Ade et al. [Planck Collaboration]. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters// arXiv:1303.5076
22. Linde A. Inflationary cosmology after Planck 2013//arXiv:1402.0526, 2014.
23. Silberstein L. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//Phys. Rev. 49, 268, 1936.
24. Dexter J. Booth. A static three-center solution to Einstein's gravitational field equations//International Journal of Theoretical Physics, December 1975, Volume 14, Issue 6, pp 361-366.
25. Synge J.L. Relativity: the General Theory. - Amsterdam, 1960.
26. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
27. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.
28. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.
29. Einstein A., Rosen N. Two-Body Problem in General Relativity Theory//Phys. Rev. 49, 404 – Published 1 March 1936.
30. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. – М., Наука, 1965.
31. Szebehely V. Theory of Orbits: Restricted Problem of Three Bodies. – Academic Press, NY, 1967.
32. Hamilton R.S. Three manifolds with positive Ricci curvature// Jour. Diff. Geom. 17, 255-306, 1982.
33. Hamilton R.S. Four manifolds with positive curvature operator. Jour. Diff. Geom. 24, 153-179, 1986.
34. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces// Contemp. Math. 71, 237-261, 1988.
35. Hamilton R.S. The Harnack estimate for the Ricci flow// Jour. Diff. Geom. 37, 225-243, 1993.
36. Hamilton R.S. A compactness property for solutions of the Ricci flow// Amer. Jour. Math. 117, 545-572, 1995.

37. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// arXiv:math/0211159, 11 Nov 2002.
38. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds//arXiv:math/0307245, 17 Jul 2003.
39. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds//arXiv:math/0303109, 10 Mar 2003.
40. Трунев А.П. Столкновение частиц в потоках Риччи / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №07(121). С. 1787 – 1808. – IDA [article ID]: 1211607111. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/111.pdf>.
41. Трунев А.П. Гравитационные волны в потоках Риччи при слиянии сингулярностей / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №07(121). С. 1907 – 1928. – IDA [article ID]: 1211607121. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/121.pdf>.
42. Трунев А.П. Рождение материи при столкновении сингулярностей в потоках Риччи / Трунев А.П. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №08(122). – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/69.pdf>, 1,563 у.п.л. – IDA [article ID]: 1221608069. <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-122-069>
43. Erwin Schrödinger. Letter Schrödinger to Einstein, Jul 19, 1939.
44. Трунев А.П. Гравитационные волны и квантовая теория Шредингера / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>.
45. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №05(099). С. 1003 – 1023. – IDA [article ID]: 0991405069. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/69.pdf>
46. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность и квантовая теория. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 с.
47. Schwarzschild K. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.
48. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.
49. Abbott B.P. et al. Properties of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, 11 Feb 2016; arXiv:1602.03840.
50. Abbott B.P. et al. The basic physics of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, Aug 5 2016; arXiv:1608.01940.

References

1. Quigg C., Rosner Jonathan L. Quarkonium level spacings//Physics Letters B, Volume 71, Issue 1, p. 153-157.
2. Khelashvili A. A., Khmaladze V. Yu., Chachava N. D. Many-particle problem with logarithmic potentials and its application to quark bound states// Theoretical and Mathematical Physics, January 1985, Volume 62, Issue 1, pp 90-95.
3. Imbo T.D. Simple Baryon-Meson Mass Relations From A Logarithmic Interquark Potential// arXiv:hep-ph/9701352v1, 23 Jan, 1997.
4. Patricio Gaete. On finite interquark potential in $D = 3$ driven by minimal length//arXiv: 1407.0407v1, 1 Jul 2014.
5. Trunев A.P. Obshhaja teorija odnositel'nosti i metrika galaktik / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>
6. Trunев A.P. Dinamika reljativistskih chastic v metrike galaktik / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №02(116). S. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf>.
7. Trunев A.P. Dinamika chastic v metrike s logarifmicheskim potencialom / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №06(120). S. 1067 – 1092. – IDA [article ID]: 1201606070. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/70.pdf>
8. Trunев A.P. Logarifmicheskij zakon v dinamicheskikh sistemah ot kvarkov do galaktik / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №06(120). S. 1470 – 1494. – IDA [article ID]: 1201606099. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/99.pdf>.
9. Trunев A.P. Ogranichennaja zadacha mnogih tel v potokah Richchi v obshhej teorii odnositel'nosti / Trunев A.P. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №08(122). – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/70.pdf>, 1,563 u.p.l. – IDA [article ID]: 1221608070. <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-122-070>
10. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion//Ann. Math., 39, 65-100, 1938.
11. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and Problems of Motion II//Ann. Math., 41, 455-564, 1940.
12. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1, 209—241, 1949.
13. Infeld L., Plebansky J. Motion and Relativity.- Pergamon Press, NY, 1960.
14. Fok V.A. O dvizhenii konechnyh mass v obshhej teorii odnositel'nosti// ZhJeTF, 9, №4, 375, 1939.

15. Papapetrou A. Equations of Motion in General Relativity// Proc. Phys. Soc. A 64, 57, 1951.
16. Fok V.A. Teorija prostranstva, vremeni i tjadotenija. – M.: GITL, 1956.
17. Levi-Civita T. The n–Body Problem in General Relativity. – Springer, 1964.
18. Brumberg V.A. Reljativistskaja nebesnaja mehanika. – M.: Nauka, 1972.
19. Rjabushko A.P. Dvizhenie tel v obshhej teorii odnositel'nosti – Mn.: Vyshjeshaja shkola, 1979.
20. Musielak Z.E., Quarles B. The three-body problem// arXiv:1508.02312v1, 10 Aug 2015.
21. P.A.R. Ade et al. [Planck Collaboration]. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters// arXiv:1303.5076
22. Linde A. Inflationary cosmology after Planck 2013//arXiv:1402.0526, 2014.
23. Silberstein L. Two-Centers Solution of the Gravitational Field Equations, and the Need for a Reformed Theory of Matter//Phys. Rev. 49, 268, 1936.
24. Dexter J. Booth. A static three-center solution to Einstein's gravitational field equations//International Journal of Theoretical Physics, December 1975, Volume 14, Issue 6, pp 361-366.
25. Synge J.L. Relativity: the General Theory. - Amsterdam, 1960.
26. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
27. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.
28. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.
29. Einstein A., Rosen N. Two-Body Problem in General Relativity Theory//Phys. Rev. 49, 404 – Published 1 March 1936.
30. Puan Kare A. Lekcii po nebesnoj mehanike. – M., Nauka, 1965.
31. Szebehely V. Theory of Orbits: Restricted Problem of Three Bodies. – Academic Press, NY, 1967.
32. Hamilton R.S. Three manifolds with positive Ricci curvature// Jour. Diff. Geom. 17, 255-306, 1982.
33. Hamilton R.S. Four manifolds with positive curvature operator. Jour. Diff. Geom. 24, 153-179, 1986.
34. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces// Contemp. Math. 71, 237-261, 1988.
35. Hamilton R.S. The Harnack estimate for the Ricci flow// Jour. Diff. Geom. 37, 225-243, 1993.
36. Hamilton R.S. A compactness property for solutions of the Ricci flow// Amer. Jour. Math. 117, 545-572, 1995.
37. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// arXiv:math/0211159, 11 Nov 2002.
38. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds//arXiv:math/0307245, 17 Jul 2003.
39. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds//arXiv:math/0303109, 10 Mar 2003.
40. Trunev A.P. Stolknovenie chastic v potokah Richchi / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №07(121).

S. 1787 – 1808. – IDA [article ID]: 1211607111. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/111.pdf>.

41. Trunев A.P. Gravitacionnye volny v potokah Richchi pri slijanii singuljarnostej / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №07(121). S. 1907 – 1928. – IDA [article ID]: 1211607121. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/121.pdf>.

42. Trunев A.P. Rozhdenie materii pri stolknovenii singuljarnostej v potokah Richchi / Trunев A.P. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №08(122). – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/69.pdf>, 1,563 u.p.l. – IDA [article ID]: 1221608069. <http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-122-069>

43. Erwin Schrödinger. Letter Schrödinger to Einstein, Jul 19, 1939.

44. Trunев A.P. Gravitacionnye volny i kvantovaja teorija Shredingera / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>.

45. Trunев A.P. Geometricheskaja turbulentnost' / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №05(099). S. 1003 – 1023. – IDA [article ID]: 0991405069. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/69.pdf>

46. Trunев A.P. Geometricheskaja turbulentnost' i kvantovaja teorija. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 s.

47. Schwarzschild K. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv: physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.

48. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger// Phys. Rev. Let., PRL 116, 061102, 12 Feb., 2016.

49. Abbott B.P. et al. Properties of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, 11 Feb 2016; arXiv:1602.03840.

50. Abbott B.P. et al. The basic physics of the binary black hole merger GW150914/The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration, Aug 5 2016; arXiv:1608.01940.