

УДК 539.3

UDC 539.3

**РАСЧЕТ ТЕПЛООБРАЗОВАНИЯ В
ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННОМ
РЕЗИНОВОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ
ГАРМОНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ**

**CALCULATION OF WARMING IN
PRELIMINARY DEFORMED RUBBER
CYLINDER AT HARMONIOUS LOADING**

Старостенко Игорь Николаевич
старший преподаватель
Краснодарский университет МВД России,
Краснодар, Россия

Starostenko Igor Nikolaevich
Senior lecturer
Krasnodar university of the Ministry of Internal
Affairs of Russia, Krasnodar, Russia

В настоящей статье на основании определяющих соотношений, полученных в работе, решена задача о гармоническом нагружении предварительно сжатого резинового цилиндра

In the present article the problem about harmonious loading of preliminary compressed rubber cylinder is solved on the basis of the defining parities received during work

Ключевые слова: МЕХАНИКА
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА,
ГАРМОНИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ,
СТАТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ, МЕТОД
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ФУНКЦИЯ
ПРИРАЩЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

Keywords: MECHANICS OF THE DEFORMABLE
FIRM BODY, HARMONIOUS LOADING, STATIC
DEFORMATION, THE METHOD OF FINAL
ELEMENTS, FUNCTION OF THE INCREMENT OF
TEMPERATURE

1. Постановка задачи. Постановка задачи включает:

- вариационные уравнения движения

$$\int_{V_0} [t^{ij} du_{j,i} + (r_0^j - F^j) du_j] dV_0 - \int_{\Sigma_s^0} \bar{k}(\bar{u}) P^j du_j d\Sigma_s^0 = 0; \quad (1)$$

- связь между компонентами ковариантного метрического тензора и градиентами деформации

$$g_{ij} = x_{,i}^m x_{,j}^m, \bar{X} \in V_0; \quad (2)$$

- «закон сжимаемости»

$$I_{g3} - F^2 = b_0 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(s - c_1)}{b_0 c_2}} \right], b_0 = -c_2 / c_3; \quad (3)$$

- определяющие выражения для напряжений

$$S^{ij} = I_{g3}^{-0,5} G_0 k T \left\{ d^{ij} + \frac{c^2 f(T)}{2[f(T) + a_0 T]} \left[g_{ij} - \frac{1}{3} I_{g1} d^{ij} - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^t R(t, \tau) (g_{ij}(\tau) - \frac{1}{3} I_{g1}(\tau)) d\tau \right] + \right.$$

$$+ \frac{c^2 f(T)}{3[f(T) + a_1 T]} \left[\frac{I_{g1} - 3}{2} - 3g^{[1]}(T) \right] d^{ij} + s I_{g3} g^{ij} \Bigg\}, \quad (4)$$

энтропии

$$\begin{aligned} S = S_0 + C_3 \ln \frac{T}{T_0} - 0,5 G_0 k \left\langle I_{g1} + \frac{c^2 f(T)}{4[f(T) + a_0 T]} \times \right. \\ \times \left[\left[g_{ij} - \int_0^t R(t, t) g_{ij}(t) dt \right] \left[g_{ij} - \int_0^t R(t, h) g_{ij}(h) dh \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \left[I_{g1} - \int_0^t R(t, t) I_{g1}(t) dt \right] \left[I_{g1} - \int_0^t R(t, h) I_{g1}(h) dh \right] \right\rangle + \\ + \frac{c^2 f(T)}{3[f(T) + a_1 T]} \left[\frac{I_{g1} - 3}{2} - 3b_{[1]} \Theta \right]^2 + s(I_{g3} - F^2) - \\ - 0,5 c_2 b_0^2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(s - c_1)}{b_0 c_2}} \right]^2 - \frac{1}{3} c_3 b_0^3 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(s - c_1)}{b_0 c_2}} \right]^3 \Bigg\rangle - \\ - 0,5 G_0 k T \frac{f}{T} \left\langle I_{g1} + \frac{c^2 f(T)}{4[f(T) + a_0 T]} \right\rangle \left[\left[g_{ij} - \int_0^t R(t, t) g_{ij}(t) dt \right] \times \right. \\ \times \left[\left[g_{ij} - \int_0^t R(t, h) g_{ij}(h) dh \right] - \frac{1}{3} \left[I_{g1} - \int_0^t R(t, t) I_{g1}(t) dt \right] \right] \times \\ \times \left[\left[I_{g1} - \int_0^t R(t, h) I_{g1}(h) dh \right] \right] \Bigg\} + \frac{c^2 f(T)}{3[f(T) + a_1 T]} \left[\frac{I_{g1} - 3}{2} - 3b_{[1]} \Theta \right]^2 + \\ + s(I_{g3} - F^2) - 0,5 c_2 b_0^2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(s - c_1)}{b_0 c_2}} \right]^2 - \\ - \frac{1}{3} c_3 b_0^3 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(s - c_1)}{b_0 c_2}} \right]^3 \Bigg\rangle, \quad (5) \end{aligned}$$

диссипативной функции

$$w^* = G_0 k T \frac{c^2 f(T)}{8[f(T) + a_0 T]} \left\{ g_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t R(t, t) g_{ij}(t) dt + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t R(t, h) g_{ij}(h) dh \Big] - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_0^t R(t, t) R(t, h) g_{ij}(t) g_{ij}(h) dt dh - \\
 & - \frac{1}{3} I_{g1} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t R(t, t) I_{g1}(t) dt + \int_0^t R(t, h) I_{g1}(h) dh \right] + \\
 & + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_0^t R(t, t) R(t, h) I_{g1}(t) I_{g1}(h) dt dh \Big\}; \tag{6}
 \end{aligned}$$

- вариационное уравнение притока тепла

$$\begin{aligned}
 & \int_{V_0} [(T \mathbf{q} - w^*) d\Theta + \sqrt{I_{g3}} \Lambda g^{mn} T_{,n} d\Theta_{,m}] dV_0 + \\
 & + \int_{\Sigma_\phi} \bar{k}(\mathbf{u}) k_T (T - T_\phi) d\Theta d\Sigma_\phi = 0; \tag{7}
 \end{aligned}$$

- условия закрепления

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Sigma_u; \tag{8}$$

- начальные условия по перемещениям

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{v}_1(\mathbf{X}); \tag{9}$$

скоростям

$$\mathbf{q}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{v}_2(\mathbf{X}); \tag{10}$$

температуре

$$T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}); \tag{11}$$

- условие теплообмена на внешней поверхности Σ_ϕ

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = k_T (T - T_\phi). \tag{12}$$

В формулах (1)-(12): V_0 - область, занимаемая телом в недеформированном состоянии; $\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_u$ - ее поверхность, состоящая из двух кусков, на одном из которых заданы распределенные нагрузки \mathbf{P} , на другом - перемещения \mathbf{u}_0 ; \mathbf{X} - координаты Лагранжа; $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ -

координаты Эйлера; $\dot{\mathbf{u}}$ - вектор перемещения; r_0 - плотность материала в исходном состоянии; $\dot{\mathbf{F}}$ - вектор объемной силы; $\bar{k}(\dot{\mathbf{u}})$ - кратность изменения элементарной площадки; d - символ вариации функции; t^{ij} - компоненты тензора условных напряжений; g_{ij} - компоненты метрического тензора с инвариантами I_{g_i} ; d^{ij} - символ Кронекера; G_0 - общее число активных молекулярных цепей в единице объема; k - постоянная Больцмана; c^2 , a_0 , a_1 , b_0 , c_2 - структурно-механические параметры резины; $b_{[1]}$, C_s - теплофизические параметры резины; $F(T)$, $f(T)$, $g^{[1]}(T)$ - известные функции температуры; S - функция типа гидростатического давления; $R(t, t)$ - функция релаксации; $\Theta = T - T_0$ - приращение температуры; Λ - коэффициент теплопроводности; k_T - коэффициент теплоотдачи; $\dot{\mathbf{v}}_1(\dot{\mathbf{X}})$, $\dot{\mathbf{v}}_2(\dot{\mathbf{X}})$, $T_0(\dot{\mathbf{X}})$ - известные функции координат; T_ϕ - температура внешнего тела.

Система (1)-(12) замкнута [2]. Задача заключается в нахождении вектор-функции $\dot{\mathbf{u}}(\dot{\mathbf{X}}, t)$ и скалярных функций $S(\dot{\mathbf{X}}, t)$, $T(\dot{\mathbf{X}}, t)$, удовлетворяющих системе (1)-(12).

2. Уточнение внешних воздействий. Граничные условия имеют вид

$$\dot{\mathbf{u}}_0(\dot{\mathbf{X}}, t) = \begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_{(0)}(\dot{\mathbf{X}}, t), & t \leq t_N; \\ \dot{\mathbf{u}}_{(0)}(\dot{\mathbf{X}}, t) + \dot{\mathbf{u}}_{*0}(\dot{\mathbf{X}}, t_1) + \dot{\mathbf{u}}_{c0}(\dot{\mathbf{X}}, t_1) \cos \omega t_1 - \dot{\mathbf{u}}_{s0}(\dot{\mathbf{X}}, t_1) \sin \omega t_1, & t_1 \geq 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(\dot{\mathbf{X}}, t) = \begin{cases} \dot{\mathbf{P}}_{(0)}(\dot{\mathbf{X}}, t), & t \leq t_N; \\ \dot{\mathbf{P}}_{(0)}(\dot{\mathbf{X}}, t) + \dot{\mathbf{P}}_{*0}(\dot{\mathbf{X}}, t_1) + \dot{\mathbf{P}}_{c0}(\dot{\mathbf{X}}, t_1) \cos \omega t_1 - \dot{\mathbf{P}}_{s0}(\dot{\mathbf{X}}, t_1) \sin \omega t_1, & t_1 \geq 0, \end{cases} \quad (14)$$

где $\dot{\mathbf{u}}_{(0)}$, $\dot{\mathbf{P}}_{(0)}$ - медленные функции времени, задающие процесс предварительного нагружения; $\dot{\mathbf{u}}_{*0}$, $\dot{\mathbf{u}}_{c0}$, $\dot{\mathbf{u}}_{s0}$, $\dot{\mathbf{P}}_{*0}$, $\dot{\mathbf{P}}_{c0}$, $\dot{\mathbf{P}}_{s0}$ - амплитуды

догружающих воздействий, $t_1 = t - t_N$, t_N - длительность предварительного нагружения. Условия (13), (14) позволяют линеаризовать задачу в окрестности промежуточного состояния и рассматривать малые моногармонические колебания предварительно деформированного вязкоупругого тела.

3. Построение приближенного решения. Приближенное решение задачи (1)-(12) ищем в виде

$$\mathbf{r} \mathbf{u}(\dot{X}, t) = \begin{cases} \mathbf{r} u^{(0)}(\dot{X}, t), & t \leq t_N; \\ \mathbf{r} u^{(0)}(\dot{X}, t) + \mathbf{r} u_*(\dot{X}, t_1) + \mathbf{r} u_c(\dot{X}, t_1) \cos \omega t_1 - \mathbf{r} u_s(\dot{X}, t_1) \sin \omega t_1, & t_1 \geq 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\mathbf{r} S(\dot{X}, t) = \begin{cases} \mathbf{r} S^{(0)}(\dot{X}, t), & t \leq t_N; \\ \mathbf{r} S(\dot{X}, t) + \mathbf{r} S_*(\dot{X}, t_1) + \mathbf{r} S_c(\dot{X}, t_1) \cos \omega t_1 - \mathbf{r} S_s(\dot{X}, t_1) \sin \omega t_1, & t_1 \geq 0, \end{cases} \quad (16)$$

$$\Theta = \Theta(\dot{X}, t). \quad (17)$$

где $\mathbf{r} u^{(0)}(\dot{X}, t)$, $\mathbf{r} S^{(0)}(\dot{X}, t)$ - части решения, отвечающие предварительному нагружению; $\mathbf{r} u_*(\dot{X}, t_1)$, $\mathbf{r} u_c(\dot{X}, t_1)$, $\mathbf{r} u_s(\dot{X}, t_1)$, $\Theta(\dot{X}, t)$ - медленные функции времени.

Для исключения из системы «быстрых» функций используем метод усреднения [3]. Линеаризованную задачу разделим на две подзадачи, первую из которых задает система квазилинейных дифференциальных уравнений движения относительно амплитудных переменных $\mathbf{r} u_c(\dot{X}, t)$, $\mathbf{r} u_s(\dot{X}, t)$, $\mathbf{r} S_c(\dot{X}, t)$, $\mathbf{r} S_s(\dot{X}, t)$ с соответствующими начальными условиями, а также краевую задачу статики относительно функций $\mathbf{r} u_*(\dot{X}, t)$, $\mathbf{r} S_*(\dot{X}, t)$, вторую - определяет уравнение энергии (7). Особенностью изучаемой задачи в целом является присутствие в ней термомеханического

сопряжения, а также зависимости от параметров предварительного нагружения.

В конечноэлементной формулировке задача имеет вид

$$\begin{cases} A_{MN}^{ij} u_{*i}^N + D_M^j s_* = P_{*j}^M, \\ D_N^i u_{*i}^N - a^{(0)} s_* = 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} A_{MN}^{ij(c)} u_{ci}^N + D_M^j s_c + B_{MN}^{ij(c)} u_{si}^N + C_{MN}^{ij(c)} u_{ci}^N = P_{cj}^M, \\ D_N^i u_{ci}^N - a^{(0)} s_c = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} A_{MN}^{ij(s)} u_{si}^N + D_M^j s_s + B_{MN}^{ij(s)} u_{ci}^N + C_{MN}^{ij(s)} u_{ci}^N = P_{sj}^M, \\ D_N^i u_{si}^N - a^{(0)} s_s = 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$\|C\| \frac{d\mathbf{\Theta}^{(e)}}{dt} + \|D\| \mathbf{\Theta}^{(e)} + \|E\| \mathbf{\Theta}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} - \mathbf{A}^{(e)}, \quad (21)$$

где $\|C\|$, $\|D\|$, $\|E\|$ - соответственно матрицы теплоемкости, теплопроводности и теплоотдачи, $\mathbf{B}^{(e)}$ - вектор обобщенной диссипации, $\mathbf{A}^{(e)}$ - вектор, обусловленные различием начальных температур тела и окружающей среды. Коэффициенты матричных уравнений (18)-(21) зависят от уровня предварительной деформации и текущего значения температуры.

Дискретизация по времени выполним в виде простейшей шаговой процедуры. Применительно к шагу с номером $(r + 1)$ алгоритм имеет вид:

1) По известному распределению температуры $T(\dot{X}, t_r)$ в момент времени $t = t_r$ решаем задачу механики, определяем поля амплитуд перемещений $\mathbf{u}_*(\dot{X}, t_r)$, $\mathbf{u}_c(\dot{X}, t_r)$, $\mathbf{u}_s(\dot{X}, t_r)$ и амплитудные значения функции типа гидростатического давления $s_*(\dot{X}, t_r)$, $s_c(\dot{X}, t_r)$, $s_s(\dot{X}, t_r)$;

2) Формируем и решаем систему уравнений притока тепла, в результате находим распределение температуры $T(\dot{X}, t_{r+1})$ на $(r + 1)$ -ом временном слое;

3) С учетом модифицированного температурного поля вновь переходим к пункту 1) алгоритма и процесс замыкается.

5. Саморазогрев предварительно сжатого резинового цилиндра.

Решим задачу для кубообразного цилиндра $d = h = 0,06$ м с неоднородными кинематическими граничными условиями. На торцах, контактирующих с металлической арматурой, заданы встречные перемещения с одинаковыми амплитудами, а свободная от нагрузок боковая поверхность цилиндра находится в условиях конвективного теплообмена с воздухом. Систему координат связываем с главными центральными осями цилиндра: для определенности координатную плоскость $x^1 O x^2$ считаем горизонтальной, ось x^3 направляем вертикально вверх и совмещаем с осью цилиндра. Амплитуды догружающих вертикальных перемещений принимаем равными 0,003м (10% от начальной полувысоты). Интегрирование задачи выполняем при однородных механических начальных условиях, кроме того, полагаем, что в начальный момент времени температура во всех точках тела одинакова и равна температуре окружающей среды. Используются призматические конечные элементы с билинейной аппроксимацией перемещений, температуры и постоянной функцией типа гидростатического давления. Расчеты выполнены при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned}
 T_0(\dot{X}) = T_\phi = T_s = 295 & & w = 40 \Gamma u; & & a_s = 1,5 \cdot 10^{-4} K^{-1}; \\
 ; & & & & \\
 b_{[1]} = 1,0 \cdot 10^{-4} K^{-1}; & & \Lambda = 0,22 \cdot Bm / (m \cdot K) & & k_T^{(m)} = 1153 Bm / (m^2 K) \\
 ; & & & & ;
 \end{aligned}$$

$$k_T^{(e)} = 8,8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К}) \quad C_p = 2000 \text{ КДж}/(\text{м}^3 \text{ К}) \quad r_0 = 1200 \text{ кг}/\text{м}^3,$$

; ;

где $k_T^{(M)}$ - коэффициент теплоотдачи на границе контакта резины и металла, $k_T^{(e)}$ - соответственно резины и воздуха [4,5].

Фактически решены следующие три задачи:

- 1) Предварительной деформации нет. Контакт между резиной и металлом идеальный (без трения);
- 2) Предварительной деформации нет. На границе контакта резина сцеплена с металлом;
- 3) Цилиндр поджимаем на 20% от первоначальной высоты, контакт идеальный.

В практических расчетах было реализовано 24 внешних цикла по механической задаче, внутри каждого из которых за 10 шагов осуществлялось интегрирование уравнения энергии. Решение построено на временном интервале $t_1 \in [0, 12000]$ с.

На рис. 1-4 даны функции избыточной температуры по двум горизонтальным сечениям цилиндра плоскостями $X^3 = 0$, $X^3 = 0,4375h$ в момент времени $t_1 = 12000$ с. Видно, что во всех случаях максимум температуры реализуется в центре области. Изображенные фигуры являются поверхностями вращения. На рис. 5 показаны графики роста температуры в центре цилиндра для каждой задачи. Графики носят «мягкий» характер, по истечению определенного времени температура стабилизируется.

Влияние предварительного поджатия неоднозначно. С одной стороны поджатие способствует росту некомпенсированной теплоты, с другой - приводит к количественной перестройке матриц

теплопроводности и теплоотдачи и, в конечном итоге, к снижению избыточной температуры в рассматриваемой точке. В итоге температура в предварительно деформированном цилиндре может оказаться несколько ниже, чем в изначально недеформированном теле. Наибольшая стартовая скорость разогрева зарегистрирована в задаче 2 и обусловлена наличием неоднородного напряженно-деформированного состояния. По мере приближения к торцам цилиндра, где происходит интенсивный теплообмен с металлической арматурой, температура падает.

Для исследования влияния числа шагов по параметру изменения внешних воздействий на интервале $t_1 \in [0, 500c]$ первая задача была решена при $\Delta t_1 = 0,1\Delta t$, $\Delta t_1 = 0,01\Delta t$. Десятикратное увеличение числа шагов вносит поправку $\sim 2\%$.

В критериях разрушения температура играет определяющую роль, это доказывает актуальность полученных решений.

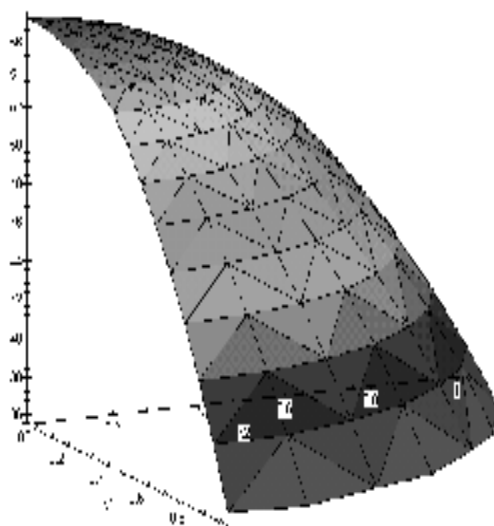
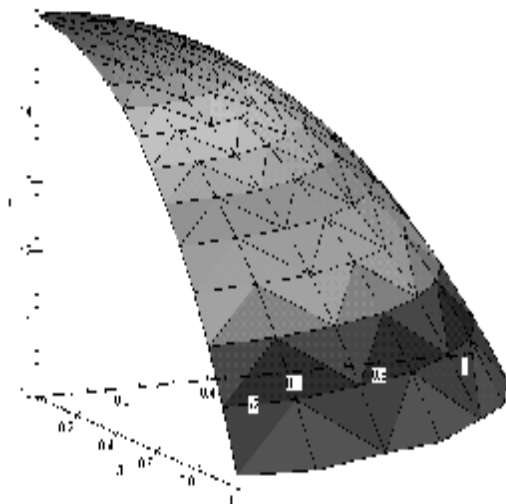


Рис. 1. Функция приращения температуры по сечению $X^3 = 0$ (задача 1)



**Рис. 2. Функция приращения температуры по сечению $X^3 = 0,4375H$
(задача 1)**

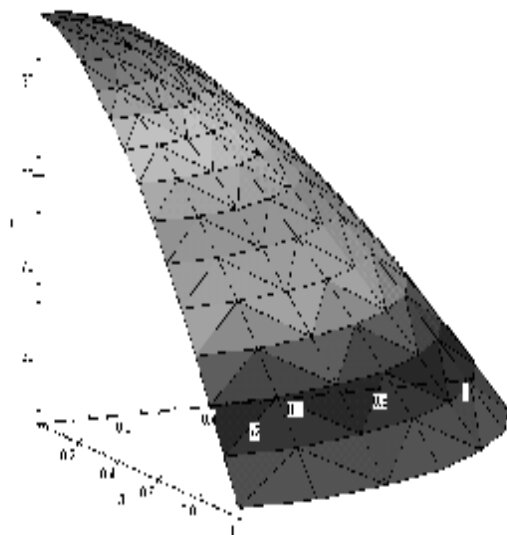


Рис. 3. Функция приращения температуры по сечению $X^3 = 0$ (задача 2)

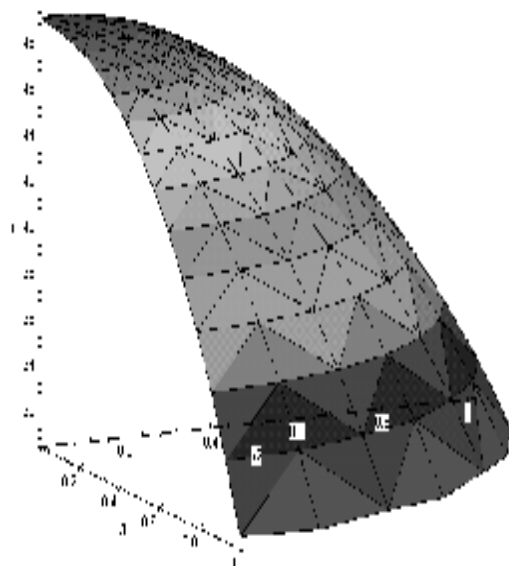


Рис. 4. Функция приращения температуры по сечению $X^3 = 0$ (задача 3)

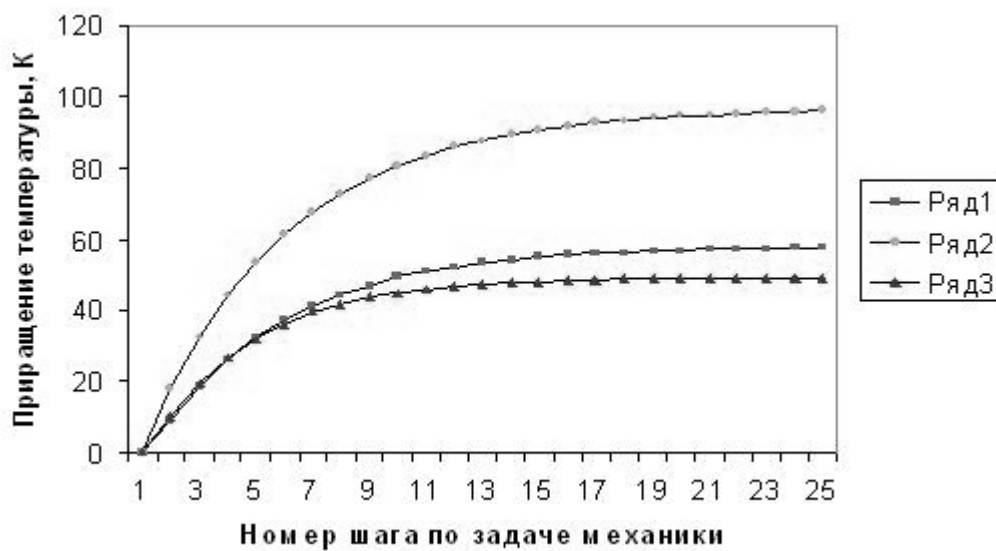


Рис. 5. Рост избыточной температуры во времени для задач 1 - 3

Литература

1. Фролов Н.Н., Дунаев И.М. Нелинейная теория термовязкоупругости структурно - неоднородных слабосжимаемых эластомеров. // Изв. вузов. Сев. - Кавк. регион. Естеств. науки. 1999. Вып. 1. С. 57 - 61.
2. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. - 287 с.
3. Филатов А.Н. Метод усреднения в дифференциальных и интегро - дифференциальных уравнениях. - Ташкент: ФАН, 1971, 277 с.
4. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / Дымников С. И., Лавендел Э. Э., Павловскис А.-М.-А. и др. - Рига: Зинанте, 1980. - 238 с.
5. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Гуменюк Б.П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. - Киев: Наукова думка, 1985. - 288 с.