УДК 303.732.4+514.84+515.1+530.1

01.00.00 Физико-математические науки

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ЗАКОН И КОЭФФИЦИЕНТ ЭМЕРДЖЕНТНОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D., директор
Scopus Author ID: 6603801161
SPIN-код автора: 4945-6530
A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

Луценко Евгений Вениаминович
д.э.н., к.т.н., профессор
Кубанский государственный аграрный университет, Россия, 350044, Краснодар, Калинина, 13, prof.lutsenko@gmail.com

В работе рассмотрены различные примеры физических систем, состояние которых определяется логарифмическим законом – статистические квантовые и классические системы, и релятивистское движение в многомерных пространствах. Установлено, что статистики Ферми-Дирака, Бозе-Эйнштейна и Максвелла-Больцмана можно описать единым уравнением, которое следует из уравнения Эйнштейна для систем, обладающих центральной симметрией. Построен коэффициент эмерджентности классических и квантовых систем. Установлена взаимосвязь статистических и динамических параметров в теории супергравитации в пространствах произвольной размерности. Показано, что описание движения большого числа частиц может быть сведено к задаче о движении на гиперсфере. Радиальное движение в такой модели сводится к известным распределениям квантовой и классической статистики. Модель углового движения сводится к системе нелинейных уравнений, описывающих взаимодействие пробной частицы с источниками логарифмического типа. Уравнение Гамильтона-Якоби проинтегрировано при самых общих предположениях в случае центрально-симметрической метрики. Получена зависимость действия от параметров системы и метрики. Показано, что в случае фермионов действие достигает экстремума в четырехмерном пространстве. В случае же бозонов существует локальный экстремум действия в пространствах любой размерности

Ключевые слова: КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ, КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА, СТАТИСТИКА ФЕРМИ-ДИРАКА, СТАТИСТИКА БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА, СТАТИСТИКА МАКСВЕЛЛА-БОЛЬЦМАНА, СИСТЕМНАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ, ЭМЕРДЖЕНТНОСТЬ, ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ,

UDC 303.732.4+514.84+515.1+530.1

Physic and mathematics

LOGARITHMIC LAW AND EMERGENCE PARAMETER OF CLASSICAL AND QUANTUM SYSTEMS

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D., C.E.O.
Scopus Author ID: 6603801161

A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

Lutsenko Evgeny Veniaminovich
Dr.Sci.Econ., Cand.Tech.Sci., professor
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

The work discusses various examples of physical systems which state is determined by the logarithmic law - quantum and classical statistical systems and relativistic motion in multidimensional spaces. It was established that the Fermi-Dirac statistics and Bose-Einstein-Maxwell-Boltzmann distribution could be described by a single equation, which follows from Einstein's equations for systems with central symmetry. We have built the rate of emergence of classical and quantum systems. The interrelation between statistical and dynamic parameters in supergravity theory in spaces of arbitrary dimension was established. It is shown that the description of the motion of a large number of particles can be reduced to the problem of motion on a hypersphere. Radial motion in this model is reduced to the known distributions of quantum and classical statistics. The model of angular movement is reduced to a system of nonlinear equations describing the interaction of a test particle with sources logarithmic type. The Hamilton-Jacobi equation was integrated under the most general assumptions in the case of centrally-symmetric metric. The dependence of actions on the system parameters and metrics was found out. It is shown that in the case of fermions the action reaches extremum in four-dimensional space. In the case of bosons there is a local extremum of action in spaces of any dimension

Keywords: COMPLEX SYSTEM, EMERGENCE, GENERAL RELATIVITY, INFORMATION THEORY, QUANTUM STATISTICS, FERMI-DIRAC STATISTICS, BOSE-EINSTEIN STATISTICS, MAXWELL-BOLTZMANN STATISTICS, QUANTUM THEORY, SUPERGRAVITY

СУПЕРГРАВИТАЦИЯ

Введение

Заслуга в изобретении логарифмов и таблиц логарифмов принадлежит Джону Неперу, который, будучи астрологом, был погружен в утомительные вычисления астрономических параметров. Желая облегчить жизнь астрономам и астрологам, Непер нашел способ сведения умножения, деления и извлечения квадратного и кубического корня возведения в степень к более простым операциям сложения, вычитания и деления на 2 и 3 соответственно [1-2]. Он, таким образом, определил функцию, обладающую свойствами: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$, $\ln(a^b) = b \ln a$. В дальнейшем оказалось, что логарифмическая функция является удобным инструментом для описания многих законов природы, а также для определения логарифмических мер – бит, байт, непер и т.п.

В работах [3-5] было установлено, что логарифмический закон наблюдается в классических и квантовых системах от кварков до галактик. Отметим, что в случае спиральных галактик логарифмический закон, описывающий зависимость гравитационного потенциала от расстояния до центра галактики, был установлен на основе обработки экспериментальных данных [6]. Было показано, что логарифмический закон является точным решением уравнений поля в теории гравитации Эйнштейна [6-7].

В гидродинамике известен логарифмический закон, описывающий зависимость средней скорости в турбулентном потоке от расстояния до стенки [8-18]. Этот закон первоначально был установлен путем обработки экспериментальных данных [8-9]. В наших работах [12-18] и других было показано, что логарифмический профиль скорости может быть выведен из уравнений Навье-Стокса.

В работе [3] было показано, что в случае центральной симметрии действие системы логарифмически зависит от параметров метрики аналогично логарифмической зависимости энтропии и коэффициента эмерджентности от числа состояний. Следовательно, действие, описывающее движение системы в гравитационном поле и энтропия имеют аналогичный смысл. В статистической физике распределения типа Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака и Максвелла-Больцмана возникают в такой системе, в которой достигается экстремум энтропии. В гравитационном поле аналогичные распределения возникают в системах обладающих центральной симметрией и метрикой, согласованной с метрикой Шварцшильда [3].

В [4] исследована проблема описания движения частиц в единой теории поля в 6D, в теории супергравитации в 112D и в метрике галактик. В 6D исследована метрика, описывающая случай движения с двумя центрами симметрии. Показано, что в такой метрике существует класс точных решений, зависящих логарифмически от координат центров гравитации. Указан общий характер углового движения на гиперсфере и радиального движения в 6D в метрике с логарифмическим потенциалом. Доказано, что аналогичные решения с логарифмическим потенциалом существуют в метрике галактик в метрической теории гравитации Эйнштейна. Обсуждается связь полученных решений с нелинейной электродинамикой, с теорией взаимодействия кварков и с теорией Янга-Миллса.

В [5] рассмотрены различные примеры динамических систем, в которых движение определяется логарифмическим законом – системы кварков, гидродинамические системы, галактики.

В настоящей работе установлена взаимосвязь статистических и динамических параметров в теории супергравитации в пространствах произвольной размерности. Показано, что описание движения большого числа частиц может быть сведено к задаче о движении на гиперсфере. Радиальное движение в такой модели сводится к известным распределениям квантовой и классической статистики. Модель углового движения сводится к системе нелинейных уравнений, описывающих взаимодействие пробной частицы с источниками логарифмического типа.

Динамика частиц на гиперсфере

Рассмотрим систему, содержащую большое число частиц. В этом случае существует возможность описания динамики путем отображения в многомерное пространство [19-21]. Будем предполагать, что взаимодействие частиц осуществляется в многомерном пространстве в соответствии с теорией относительности.

Рассмотрим обобщение уравнений Эйнштейна для пустого пространства на случай произвольного числа измерений [22-23]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \tag{1}$$

Здесь k – некоторая функция, зависящая от размерности пространства, $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$ - тензор Риччи и метрический тензор соответственно.

В общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &R_{ik} = R^{j}_{ijk}, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\ &R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\mu}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}, \\ &\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{s}} \right) \end{aligned} \tag{2}$$

$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ - тензор Римана, Γ^{i}_{kl} – символы Кристоффеля второго рода.

Отметим, что в модели (1) сохраняются все результаты, связанные с определением, так называемых пространств Эйнштейна [24-25], поскольку соответствующие метрики являются решением первого уравнения (1).

В метрической теории существует два основных типа законов физики. Первый тип законов вытекает из равенства нулю ковариантной производной метрического тензора:

$$Dg_{ik} = 0 \rightarrow \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = 0 \qquad (3)$$

В стандартной теории поля [26] из уравнений (3) выводится связь символов Кристоффеля с метрическим тензором в форме

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)$$

Дальнейшее развитие теории строится на определении тензора кривизны и тензора Риччи в соответствии с выражениями (2). Заметим, что в общей теории относительности предполагается, что тензор энергии импульса материи связан с тензором Эйнштейна уравнением Эйнштейна [26].

Второй тип законов вытекает из равенства нулю ковариантной производной скорости,

$$Du^i = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \qquad (4)$$

Отметим, что совокупность законов физики в форме (3)-(4) при заданных функциях Γ^i_{kl} полностью описывает динамику полей и частиц в многомерных пространствах.

В работах [3, 22-23] представлена модель гравитации в многомерных пространствах размерностью D с метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 &= \psi(t,r)dt^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1{}^2 - \sin^2\phi_1 d\phi_2{}^2 - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 d\phi_3{}^2 - \\ &\ldots - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 \ldots \sin^2\phi_{N-1} d\phi_N{}^2 \end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N$ - углы на единичной сфере, погруженной в $D-1$ мерное пространство. Метрика (5) описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике элементарных частиц и в теории супергравитации. Например, 3-х сфера используется для представления

$\mathrm{Sp}(1) \cong \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)$ симметрии; 5-сфера описывает $\mathrm{SO}(6)/\mathrm{SO}(5) = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2)$ и т.п. Такой подход позволяет охватить все многообразие материи, которую производит фабрика природы, путем выбора уравнения состояния $p = p(\psi)$.

Уравнения поля в метрике (5) сводятся к одному уравнению второго порядка [22-23]

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -Kp\psi - \frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi}\psi_t^{\,2} + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \qquad (6)$$

В общем случае параметры модели и скалярная кривизна зависят только от размерности пространства, имеем

$$\begin{aligned} k &= D(D-5)/2 + 3, \\ K &= 2(D-3), \\ R &= -D^2 + 3D \end{aligned} \qquad (7)$$

Заметим, что движение частиц в метрике (5) разделяется на радиальное движение и движение на гиперсфере, которое в общем случае можно исследовать независимо от радиального движения. Будем предполагать, что существуют такие частицы, которые движутся в метрике (5) на гиперсфере с числом углов N. Как известно, движение массивных частиц в гравитационном поле в общем случае описывается уравнением (4). Пронумеруем координаты метрики (5) следующим образом

$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N, x_{N+1}, x_{N+2}$.

Система уравнений (4) в метрике (5) имеет вид [27-29]

$$\frac{d^2\phi_i}{ds^2} + 2\frac{d\phi_i}{ds}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{d\phi_j}{ds}\cot\phi_j - \cos\phi_i\sin\phi_i\sum_{j=i+1}^{N}\frac{d\phi_j}{ds}\frac{d\phi_j}{ds}\prod_{k=i+1}^{j-1}\sin^2\phi_k = 0,\ i = 1,...,N. \qquad (8)$$

Отметим, что в силу уравнений (8) все углы связаны между собой. Поэтому движение вдоль каждого угла может влиять на динамику всей системы. Это влияние является особенно сильным в окрестности полюсов системы, где $\phi_i \to 0, \pi$, при этом $\cot\phi_i \to \pm\infty$. Согласно системе уравнений (8) число таких полюсов равно $2(N-1)$.

Покажем, что логарифмический потенциал, используемый в теории кварков, является следствием движения на гиперсфере. Для доказательства перепишем уравнение (8) в виде

$$\frac{d^2\phi_i}{ds^2} + 2\frac{d\phi_i}{ds}\frac{d}{ds}\sum_{j=1}^{i-1}\ln(\sin\phi_j) - \cos\phi_i \sin\phi_i \sum_{j=i+1}^{N}\frac{d\phi_j}{ds}\frac{d\phi_j}{ds}\prod_{k=i+1}^{j-1}\sin^2\phi_k = 0,\ i = 1,\dots,N. \quad (8,a)$$

Отсюда следует, что в особых точках $\phi_j \to 0, \pi$ решение системы (8,а) зависит от логарифмических потенциалов $\ln(\sin\phi_j) \approx \ln\phi_j$, которые, как было показано в [4-5], могут быть связаны с наличием центров гравитации или зарядов.

Коэффициент эмерджентности классических и квантовых статистических систем

Если базовое множество содержит W элементов, то по Хартли количество информации, которое мы получаем, когда выбираем некоторый элемент, равно:

$$I = Log_2 W$$

Если базовые элементы могут взаимодействовать друг с другом, то они могут образовывать подсистемы.

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из ряда подсистем, которые пронумеруем целым числом $j = 1, 2, 3, \dots$. Каждая подсистема характеризуется числом состояний G_j и числом частиц N_j, которые находятся в этих состояниях и обладают энергией ε_j. Определим число возможных способов распределения N_j частиц по G_j состояниям. В случае статистики Ферми в каждом состоянии может находиться не более чем одна частица, поэтому число способов равно [30]

$$\Delta\Gamma_j = \frac{G_j!}{N_j!(G_j - N_j)!}$$

В случае статистики Бозе в каждом состоянии может находиться любое число частиц, следовательно, число способов равно [30]

$$\Delta\Gamma_j = \frac{(G_j + N_j - 1)!}{N_j!(G_j - 1)!} \tag{9}$$

Энтропия, общее число частиц и энергия системы равны по определению

$$S = \sum_j \ln\Delta\Gamma_j,\ N = \sum_j N_j,\ E = \sum_j \varepsilon_j N_j \tag{10}$$

Найдем числа $n_j = N_j / G_j$, которые соответствуют экстремуму энтропии при условии постоянства общего числа частиц и энергии системы. Если число состояний и число частиц в каждой подсистеме достаточно велико, $N_j, G_j >> 1$, то можно воспользоваться приближенной формулой для логарифма факториала $\ln N! \approx N\ln(N/e)$. В этом случае выражение энтропии квантовых систем упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned} S_F &= -\sum_j G_j[n_j \ln n_j - (1 - n_j)\ln(1 - n_j)], \\ S_B &= \sum_j G_j[(1 + n_j)\ln(1 + n_j) - n_j \ln n_j] \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь первое выражение соответствует энтропии системы фермионов, а второе – системы бозонов.

Используя метод Лагранжа, составим функционал $S_k + \alpha N + \beta E$, где α, β - некоторые постоянные. Экстремум энтропии достигается при условии

$$\frac{\partial}{\partial n_j}(S_k + \alpha N + \beta E) = 0$$

Отсюда находим два типа распределения

$$n_j = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta\varepsilon_j) \pm 1} \tag{12}$$

Отметим, что знак плюс соответствует распределению Ферми, а знак минус – распределению Бозе.

Следовательно, в случае статистики Ферми на образование подсистем накладывается ограничение на число частиц, которые могут находиться в одном состоянии. С учетом этого ограничения все элементы базового множества могут образовывать подсистемы в любых сочетаниях, а их общее число определяется выражением

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{13}$$

Здесь n – число состояний системы; m – число частиц находящихся в этих состояниях.

Ясно, что при фиксированном числе состояний в системе могут быть подсистемы из 1, 2, 3, …, W элементов. При этом подсистемы из 1-го элемента это сами базовые элементы, а подсистема из W элементов – это вся система в целом (булеан) [31].

На всех иерархических уровнях системы от 1-го до W, суммарно будет содержаться общее число подсистем:

$$N_{FD} = \sum_{m=1}^{W} C_n^m = \sum_{m=1}^{W} \frac{n!}{m!\,(n-m)\,!} \tag{14}$$

В работе [32] предложено считать, что количество информации в системе можно рассчитывать по формуле Хартли, полагая, что элементами системы являются не только ее базовые элементы, но и состоящие из них подсистемы, число которых в системе определяется выражением (14). Таким образом, количество информации в системе будет:

$$I_{FD} = Log_2 N_{FD} = Log_2 \sum_{m=1}^{W} C_n^m = Log_2 \sum_{m=1}^{W} \frac{n!}{m!\,(n-m)\,!} \tag{15}$$

Или окончательно:

$$I_{FD} = Log_2 \sum_{m=1}^{W} C_n^m \qquad (16)$$

Следовательно, выражение (15) представляет собой системное обобщение формулы Хартли для количества информации в квантовой системе, подчиняющейся статистике Ферми-Дирака с заданным числом состояний и с переменным числом частиц.

В работе [32] предложено оценивать уровень системности или сложности системы отношением количества информации в системе (с учетом входящих в нее подсистем всех уровней иерархии) к количеству информации во множестве образующих ее базовых элементов:

$$H_{FD}(n,W) = \frac{Log_2 \sum_{m=1}^{W} C_n^m}{Log_2 W} \qquad (17)$$

Это выражение было названо в работе [33] *коэффициентом эмерджентности Хартли*, в честь этого выдающегося ученого, внесшего большой вклад в становление научной теории информации, а также потому, что в нем использовано классическое выражение Хартли для количества информации и его системное обобщение (16).

Непосредственно из вида выражения для коэффициента эмерджентности Хартли (17) ясно, что он представляет собой относительное превышение количества информации в квантовой системе, подчиняющейся статистике Ферми-Дирака, при учете системных эффектов (смешанных состояний, иерархической структуры ее подсистем и т.п.) над количеством информации без учета системности.

В работе [33] показано, что при n=W выражение (16) приобретает вид:

$$N_{FD} = \sum_{m=1}^{W} C_W^m = 2^W - 1 \qquad (18)$$

Выражение (11) для количества информации в системе с учетом (18):

$$I_{FD} = Log_2(2^W - 1) \qquad (19)$$

Выражение (19) дает *оценку максимального количества информации*, которое может содержаться в системе при вхождении всех элементов во все подсистемы различных уровней иерархической структуры.

Из выражения (19) видно, что I достаточно быстро стремится к W, поскольку

$$\lim_{W \to \infty} I / W = 1 \qquad (20)$$

При W > 4 различие I и W в выражении (20) не превышает 1%. Таким образом, коэффициент эмерджентности Хартли (17) отражает уровень системности объекта, подчиняющегося статистике Ферми-Дирака. Этот коэффициент изменяется от 1 (системность минимальна, т.е. отсутствует) до W/Log_2W (системность максимальна).

Для каждого количества элементов системы существует свой максимальный уровень системности, который никогда реально не достигается из-за действия **правил запрета** на реализацию в системе ряда подсистем различных уровней иерархии. Например, не все сочетания букв русского алфавита образуют слова русского языка, и не все сочетания слов – предложения. В каждом состоянии может находиться только одна частица и т.п. По этой причине систему правил запрета в [33] предложено назвать информационным проектом системы. Различные системы, состоящие из равного количества одинаковых элементов, отличаются друг от друга именно по причине различия своих информационных проектов.

Одним из наиболее важных и известных в физике правил запрета, который действует на квантовые системы, подчиняющиеся статистике Ферми-Дирака, является принцип Паули [34].

Для статистики Бозе-Эйнштейна число различных подсистем рассчитывается по формуле (9), которую запишем в форме

$$C_{r+k-1}^{r} = \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} \tag{21}$$

Здесь k – число состояний, r – число частиц в системе. На всех иерархических уровнях квантовой системы, подчиняющейся статистике Бозе-Эйнштейна, от 1-го до W, суммарно будет содержаться общее число подсистем

$$N_{BE} = \sum_{r=1}^{W} C_{r+k-1}^{r} = \sum_{r=1}^{W} \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} \tag{22}$$

Предположим, что количество информации в квантовой системе, подчиняющейся статистике Бозе-Эйнштейна, можно рассчитывать по формуле Хартли, полагая, что элементами системы являются не только ее базовые элементы, но и состоящие из них подсистемы, количество которых в системе определяется выражением (22). Таким образом, количество информации в такой квантовой системе, подчиняющейся статистике Бозе-Эйнштейна, будет:

$$I_{BE} = Log_2 N_{BE} = Log_2 \sum_{r=1}^{W} C_{r+k-1}^{r} = Log_2 \sum_{r=1}^{W} \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} \tag{23}$$

Или окончательно:

$$I_{BE} = Log_2 \sum_{r=1}^{W} C_{r+k-1}^{r} \tag{24}$$

Выражение (24) представляет собой системное обобщение формулы Хартли для количества информации в квантовой системе, подчиняющейся статистике Бозе-Эйнштейна.

Соответственно, выражение для коэффициента эмерджентности Хартли для случая квантовых систем, подчиняющихся статистике Бозе-Эйнштейна, будет иметь вид:

$$H_{BE}(k,W) = \frac{Log_2 \sum_{r=1}^{W} C_{r+k-1}^{r}}{Log_2 W} \tag{25}$$

Отметим, что обе квантовые статистики – и Ферми-Дирака, и Бозе-Эйнштейна, асимптотически приближаются к статистике Максвелла-Больцмана в пределе высоких температур и низких плотностей, что непосредственно следует из выражения (12). В случае статистики Максвелла-Больцмана число подсистем, которое можно образовать при заданном значении числа состояний определяется согласно [30]

$$\Delta\Gamma_j = \frac{G_j^{\,N_j}}{N_j!}$$

Отсюда находим коэффициент эмерджентности классических систем в виде

$$H_{MB}(G,W) = \frac{Log_2 \sum_{N=1}^{W} G^N / N!}{Log_2 W} \tag{26}$$

Здесь N – число частиц, G – число состояний. По характеру поведения коэффициент эмерджентности классических систем при малом числе состояний и частиц занимает промежуточное положение между аналогичными коэффициентами, вычисленными для ферми- и бозе-систем – см. рис. 1 в [3].

С ростом числа состояний и числа частиц коэффициенты эмерджентности квантовых и классических систем отличаются между собой, как и коэффициенты квантовых систем ферми-частиц и бозе-частиц. Следовательно, коэффициент эмерджентности позволяет отличить классическую систему от квантовой системы, а квантовую систему ферми-частиц от квантовой системы бозе-частиц [3].

В работе [3] было показано, что распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна могут быть получены в метрике (5) как решения уравнения поля (6), согласованные с метрикой Шварцшильда, имеем

$$\begin{gathered} p = \frac{4m^2\psi}{C - 2K\psi} = \frac{2m^2}{K}\frac{-1}{1 \pm \exp(2mr - \mu)}, \\ \frac{dp}{d\psi} = \frac{C}{(C - 2K\psi)^2}, \quad C = \pm 2Ke^{-\mu} \end{gathered} \tag{27}$$

C – произвольная постоянная. Заметим, что в метрике Шварцшильда параметр m соответствует массе или энергии покоя системы. Мы предполагаем, что источник гравитации типа точечной массы обусловлен в метрике (5) наличием двух типов уравнения состояния, соответствующих бозонам и фермионам.

Сопоставим первое уравнение (27) с квантовыми статистиками (12):

- в случае бозонов $p = \frac{2m^2}{K}\frac{1}{\exp(2mr - \mu) - 1}, \quad C > 0, p(\psi) > 0, p'(\psi) > 0$; (28)

- в случае фермионов $p = -\frac{2m^2}{K}\frac{1}{\exp(2mr - \mu) + 1}, \quad C < 0, p(\psi) < 0, p'(\psi) < 0$.

Как известно, деление частиц, на фермионы и бозоны, первоначально возникло в статистической физике [30], и лишь благодаря теореме Паули была установлена связь спина со статистикой [34]. Однако уравнение состояния в форме (27) не содержит никакой информации о спинах частиц. Согласно (27), разделение на бозоны и фермионы является фундаментальным свойством гравитационного поля, тогда как спин описывает свойства симметрии системы.

Стационарные состояния квантовых и классических систем

Покажем, что для любой квантовой или классической системы, обладающей центральной симметрией и заданной энергией, существует такая метрика (5), что действие системы будет связано с некоторым решением уравнения поля (6). Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (5) имеет вид

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_1}\right)^2-\sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_2}\right)^2-\\&\sin^{-2}\phi_1\sin^{-2}\phi_2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_3}\right)^2-...-\sin^{-2}\phi_1\sin^{-2}\phi_2...\sin^{-2}\phi_{N-1}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_N}\right)^2=0\end{aligned}\tag{29}$$

Уравнение (29) можно проинтегрировать при некоторых предположениях, используя метод Шредингера [22-23]. Суть метода состоит в том, чтобы представить решение уравнения (29) в виде

$$S=S_{cl}+\hbar\ln\Psi_S\tag{30}$$

Здесь в теорию в явном виде вводится классическое действие - S_{cl}, постоянная Планка и волновая функция Ψ_S. Используя классическое действие, мы определяем те параметры задачи, которые могут считаться внешними для квантовой системы. В случае метрики (5) удобно будет выбрать в качестве переменных квантовой механики углы на единичной сфере, а в качестве координат классического действия – время и радиальную координату. Тогда уравнение (29) разделяется на два уравнения

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r}\right)^2=M^2\\&\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_1}\right)^2+\sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_2}\right)^2+...+\sin^{-2}\phi_1\sin^{-2}\phi_2...\sin^{-2}\phi_{N-1}\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_N}\right)^2=\frac{M^2}{\hbar^2}\Psi_S^2\end{aligned}\tag{31}$$

Здесь M – произвольная постоянная, связанная с угловым моментом системы. В случае стационарных состояний действие системы можно представить в виде $S_{cl} = -Et + S_1(r)$. Используя первое уравнение (31) и первый интеграл уравнения (6) в статическом случае, находим [3]

$$\begin{gathered} p\psi(C - 2K\psi) = \psi_r^2 \\ \frac{E^2}{\psi} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 = M^2 \end{gathered} \tag{32}$$

Выразим $p = p(\psi)$ из первого уравнения (32) и подставим во второе, тогда получим

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 2K\psi)}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 \tag{33}$$

Очевидно, что решения уравнения (33) при всех вещественных значениях параметров и метрики определены в комплексной плоскости. Действительно, уравнение (33) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 2K\psi)} \tag{34}$$

Отсюда следует, что функция действия в общем случае либо является комплексной, либо движение ограничено условием

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 2K\psi)} \ge 0 \tag{35}$$

Поскольку же метрика допускает любые движения, то отсюда следует, что функция действия является комплексной. Разрешая уравнение (34), находим в явном виде зависимость действия стационарных систем от метрики, энергии, углового момента и химического потенциала, с которым параметр C связан в силу (27) соотношением $C = \pm 2Ke^{-\mu}$. Здесь знак + соответствует бозонам, а противоположный знак – фермионам. Таким образом, имеем

$$S_1(\psi) = S_0 \pm \frac{E}{\sqrt{C}} \ln \psi$$
$$\mp \frac{E}{\sqrt{C}} \ln\left(2CE^2 - 2KE^2\psi - CM^2\psi + 2E\sqrt{C(C-2K\psi)(E^2 - M^2\psi)}\right) \qquad (36)$$
$$\mp \frac{M}{\sqrt{2K}} \ln\left(-2E^2K - CM^2 + 4KM^2\psi + 2M\sqrt{2K(C-2K\psi)(E^2 - M^2\psi)}\right)$$

Здесь логарифмическая функция определена в комплексной плоскости, S_0 – произвольная постоянная.

В случае $C = 0$ решение уравнения (34) имеет вид

$$S_1 = S_0 \mp \sqrt{\frac{2(M^2\psi - E^2)}{K\psi}} \pm \sqrt{\frac{2}{K}} M \ln\left[M\left(\sqrt{\psi}M + \sqrt{M^2\psi - E^2}\right)\right] \qquad (37)$$

Полученные зависимости (36)-(37) решают поставленную задачу. Таким образом, мы доказали, что действие любой механической системы – классической или квантовой, находящейся в стационарном состоянии, зависит от параметров, характеризующих движение и от метрики окружающего пространства. Следовательно, для каждого типа движения существует такое уравнение состояния $p = p(\psi)$, что движение полностью определяется метрикой и параметрами движения – энергией и угловым моментом, что и требовалось доказать.

Отметим, что зависимость действия от параметров метрики в форме (36) является аналогичной логарифмической зависимости энтропии и коэффициента эмерджентности от числа состояний в форме (11), (17) и (25). Действительно, в статистической физике распределение типа (12) возникает в такой системе, в которой достигается экстремум энтропии. В гравитационном поле аналогичное распределение (27) возникает в системе обладающей центральной симметрией и метрикой, согласованной с метрикой Шварцшильда. Оба этих свойства, как известно, соотносятся со свойствами материи. Всякая же материальная система движется так, что действие и энтропия достигают экстремума.

Однако выражение действия (36) не зависит от предположений о виде функции $p = p(\psi)$, так как получено из более общих уравнений (32). Уравнение (36) описывает действие любой механической системы, в которой можно разделить действие для орбитального и радиального движения согласно (31).

Используя (36) можно определить действительную и мнимую часть действия для бозонов и фермионов в зависимости от параметров C, K, описывающих влияние химического потенциала и размерности пространства соответственно – рис. 1. В случае фермионов действие достигает экстремума при размерности пространства равной 4, при этом $K = 2(D-3) = 2$. В случае же бозонов существует ряд локальных экстремумом, которые позволяют оптимизировать действие при любой размерности пространства – рис. 2. Это свойство действия бозонов сохраняется и при изменении энергии и момента системы - рис3-4.

Заметим, что случай $D = 3$ является особенным для обсуждаемой модели, так как имеем, согласно (7), $k = K = R = 0$, что соответствует пустому плоскому пространству. Следовательно, в уравнении (6) положим $K = 0$. Отсюда находим

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -\frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi}\psi_t^{\,2} + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \tag{38}$$

В частном случае, полагая в уравнении (38) $p(\psi) = -\psi, \psi = e^u$, имеем уравнение Лапласа

$$u_{tt} + u_{rr} = 0 \tag{39}$$

В другом частном случае, полагая в (38) $p(\psi) = \psi, \psi = e^w$, приходим к волновому уравнению

$$w_{tt} - w_{rr} = 0 \tag{40}$$

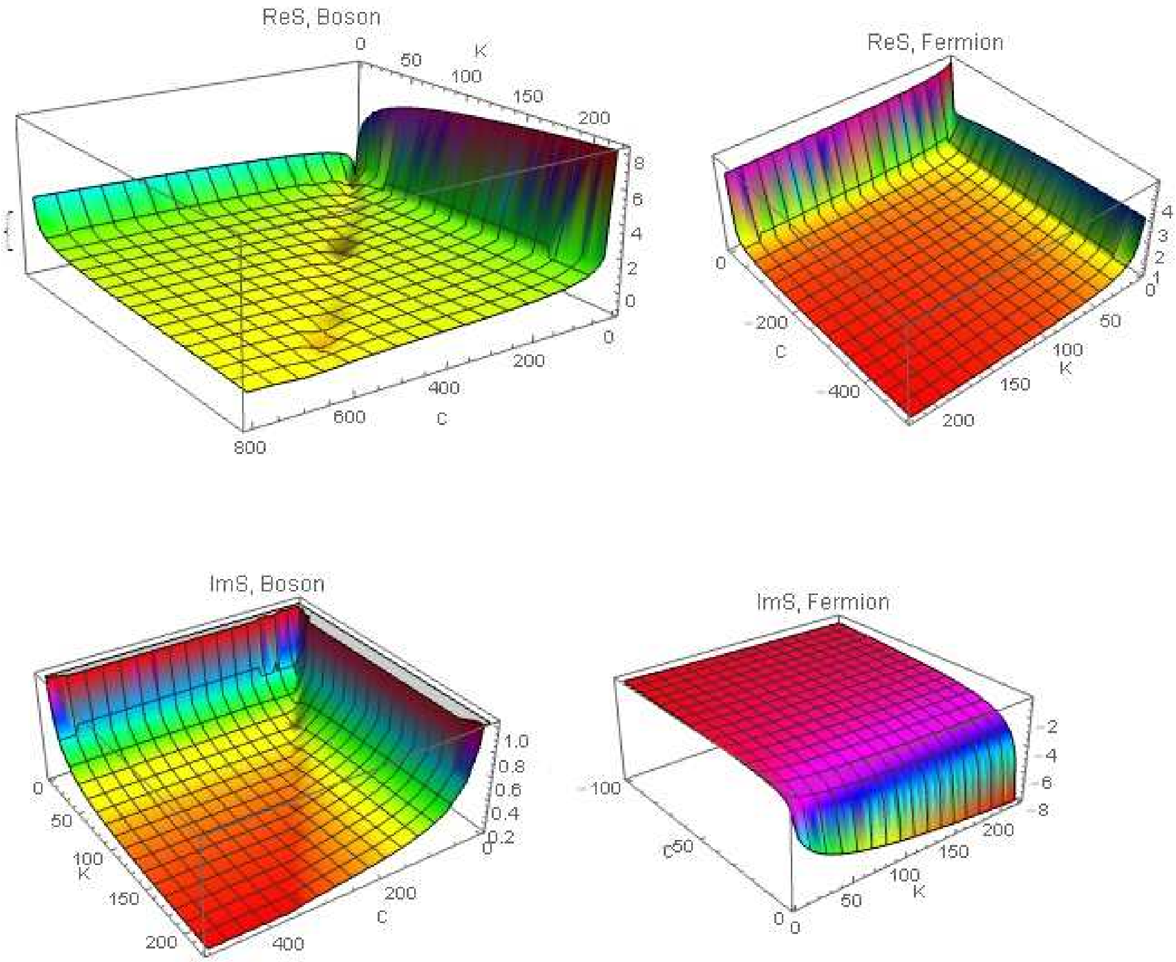

Рис. 1. Действительная (вверху) и мнимая (внизу) часть действия для бозонов и фермионов в зависимости от параметров C, K .

Рассмотрим динамику частиц в частном случае $p(\psi) = -\psi, \psi = e^{u}$, когда уравнения поля сводятся к уравнению Лапласа (39). Решение уравнения (39), описывающее N центров гравитации на плоскости имеет вид

$$u = \sum_{j=1}^{N} a_j \ln \sqrt{(t-t_j)^2 + (r-r_j)^2} \qquad (41)$$

Было показано [4-5, 29], что аналогичная модель может быть получена в 6D в метрике

$$ds^2 = \psi(t,r)dt^2 + d\chi_1^{\ 2} + \sin^2 \chi_1 d\chi_2^{\ 2} - p(\psi)dr^2 - d\phi_1^{\ 2} - \sin^2 \phi_1 d\phi_2^{\ 2} \qquad (42)$$

Здесь $\chi_1, \chi_2, \phi_1, \phi_2$ - углы на единичных сферах, погруженных в трехмерные пространства; t, r - координаты, связанные со временем и расстоянием соответственно.

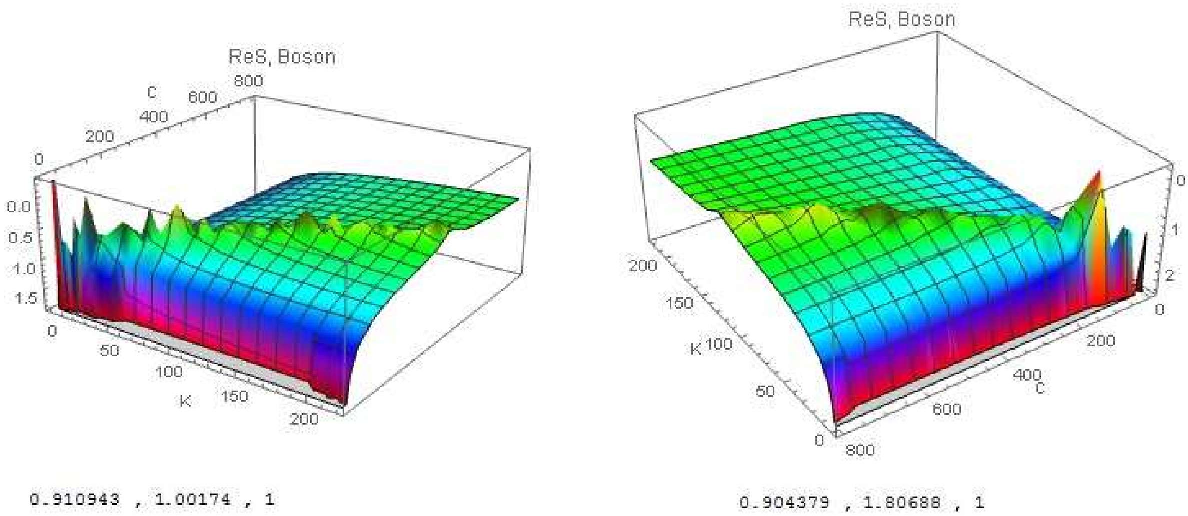

Рис. 2. Локальные экстремумы действительной части действия бозонов.

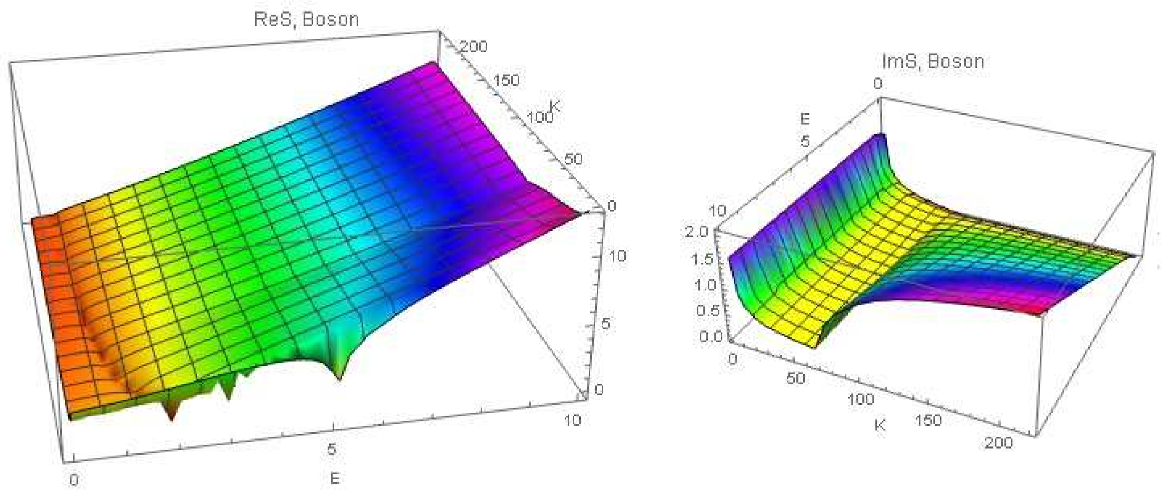

Рис. 3. Действительная и мнимая части действия бозонов в зависимости от параметров E, K .

Тем самым доказана гипотеза, что пространство 6D с метрикой (42) обладает уникальной симметрией, что позволяет выделить размерность 6, как основу для построения теории размерностей [35-36].

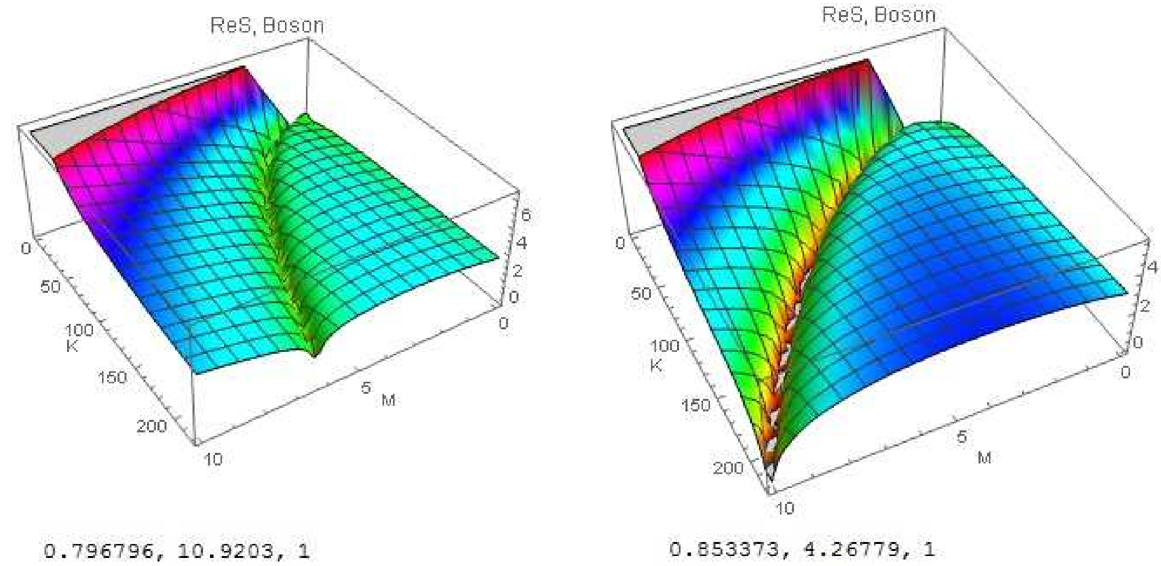

Рис. 4. Действительная часть действия бозонов в зависимости от параметров K, M , вычисленная по (36) для $\psi = 0.796796; C = 10.9203; E = 1$ (слева) и для $\psi = 0.853373; C = 4.26779; E = 1$ (справа).

Действие в случае $D = 3$ приводится к виду

$$S_1 = S_0 \mp 2\sqrt{\frac{-M^2\psi + E^2}{C}} \pm 2\sqrt{\frac{E^2}{C}}\,\mathrm{Arc}\tanh\left[\frac{\sqrt{-M^2\psi + E^2}}{E}\right] \qquad (42)$$

В этом случае действие также зависит логарифмически от параметров (с учетом свойств функции $\mathrm{Arc}\tanh x = [\ln(1+x) - \ln(1-x)]/2$), однако метрика (41) также зависит логарифмически от координат источников, что позволяет сопоставить движение частиц на гиперсфере с радиальным движением в 6D и в 3D [4-5].

Таким образом, мы рассмотрели логарифмический закон в различных физических моделях – в статистике и в общей теории относительности в многомерных пространствах. Представляется интересным исследовать влияние логарифмических потенциалов на закономерности распознавания в задачах астросоциотипологии [37]. Такие задачи в астрологии, видимо, рассматривал Непер [1], так как он табулировал функцию $\ln(\sin\phi)$, фигурирующую в уравнении (8,а). Однако изучение этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.

Библиографический список

1. Napier John (1614) Mirifici logarithmorum canonis description.
2. Гутер Р.С., Полунов Ю.Л. Джон Непер 1550-1617. – М., Наука, 1980.
3. Трунев А.П. Гравитационные волны и коэффициент эмерджентности классических и квантовых систем / А.П. Трунев, Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №03(097). С. 1343 – 1366. – IDA [article ID]: 0971403092. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/92.pdf
4. Трунев А.П. Динамика частиц в метрике с логарифмическим потенциалом / Трунев А.П. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №06(120). – IDA [article ID]: 1201606070. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/70.pdf, 1,500 у.п.л.
5. Трунев А.П. Логарифмический закон в динамических системах от кварков до галактик / Трунев А.П. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №06(120). – IDA [article ID]: 1201606099. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/99.pdf, 1,563 у.п.л.
6. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрика галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf
7. Трунев А.П. Динамика релятивистских частиц в метрике галактик / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №02(116). С. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf
8. Прандтль Л., Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. Том 2. – М.-Л., ОНТИ, 1935.
9. Schlichting H. Boundary Layer Theory. - McGraw-Hill, NY, 1960.
10. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика – 3 изд. – М.: Наука. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.
11. Trunev A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.

12. Trunev A. P. Similarity theory for turbulent flow over natural rough surface in pressure and temperature gradients, Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub., Southampton, pp. 275-286, 1996.

13. Trunev A. P., Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scales, Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.

14. Trunev A. P. Theory of Turbulence and Model of Turbulent Transport in the Atmospheric Surface Layer. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 160 p., 1999 (in Russian).

15. Trunev A. P. Theory of Turbulence and Turbulent Transport in the Atmosphere. - CMP, Southampton-Boston, 180 p., 2001.

16. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование турбулентного переноса в атмосфере. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №05(059). С. 179 – 243; №06(060). С. 412 – 491.

17. Трунев А.П. Теория турбулентности и модель влияния плотности шероховатости // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 348 – 382.

18. Трунев А.П. Теория и константы пристенной турбулентности // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №04(058). С. 383 – 394.

19. Mlodinow L.D., Papanicolaou N. SO(2,1) algebra and the large N expansion in quantum mechanics// Annals of Physics, Vol. 128, Issue 2, pp. 314-334, 1980.

20. Jevicki A., Papanicolaou N. Classical dynamics in the large N limit// Nuclear Physics B, Vol. 171, pp. 362-376, 1980.

21. Chatterjee A. Large-N expansions in quantum mechanics, atomic physics and some O(N) invariant systems// Physics Reports, Vol. 186, Issue 6, pp. 249-370, 1990.

22. Трунев А.П. Гравитационные волны и квантовая теория Шредингера / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf

23. Трунев А.П. Gravitational waves and quantum theory / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1146 – 1161. – IDA [article ID]: 0961402078. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf

24. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

25. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.

26. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). - Pergamon Press, ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.

27. Трунев А.П. Супергравитация в 112D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар:

КубГАУ, 2016. – №03(117). С. 1263 – 12184. – IDA [article ID]: 1171603082. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/82.pdf

28. Трунев А.П. Теория физических констант и супергравитация в 112D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №04(118). Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/78.pdf

29. Трунев А.П. Единая теория поля и супергравитация в 112D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №05(119). С. 1390 – 1419. – IDA [article ID]: 1191605094. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/94.pdf

30. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Statistical Physics. Vol. 5 (3rd ed.). Butterworth-Heinemann. 1980.

31. Луценко Е.В. Обобщенный коэффициент эмерджентности Хартли как количе-ственная мера синергетического эффекта объединения булеанов в системном обобще-нии теории множеств / Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный науч-ный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2011. – №02(066). С. 535 – 545. – Шифр Информрегистра: 0421100012\0031, IDA [article ID]: 0661102045. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2011/02/pdf/45.pdf

32. Луценко Е.В.. Автоматизированный системно-когнитивный анализ в управ-лении активными объектами (системная теория информации и ее применение в иссле-довании экономических, социально-психологических, технологических и организаци-онно-технических систем): Монография (научное издание). – Краснодар: КубГАУ. 2002. – 605 с.

33. Луценко Е.В. Обобщенный коэффициент эмерджентности Хартли как количе-ственная мера синергетического эффекта объединения булеанов в системном обобще-нии теории множеств / Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный науч-ный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2011. – №02(066). С. 535 – 545. – Шифр Информрегистра: 0421100012\0031, IDA [article ID]: 0661102045. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2011/02/pdf/45.pdf

34. Pauli W. The Connection Between Spin and Statistics// Phys. Rev. 58 (8), 716-722, 1940.

35. Robert Oros di Bartini. Relations between Physical Constants// Progress in Physics, Vol. 3, pp. 34-40, October, 2005.

36. Трунев А.П. Теория физических констант и супергравитация в 112D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №04(118). Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/78.pdf

37. Трунев А. П., Луценко Е. В. Астросоциотипология: Монография (научное издание). – Краснодар: КубГАУ, 2008, – 279 с.

References

1. Napier John (1614) Mirifici logarithmorum canonis description.
2. Guter R.S., Polunov Ju.L. Dzhon Neper 1550-1617. – M., Nauka, 1980.

3. Trunev A.P. Gravitacionnye volny i kojefficient jemerdzhentnosti klassicheskih i kvantovyh sistem / A.P. Trunev, E.V. Lucenko // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №03(097). S. 1343 – 1366. – IDA [article ID]: 0971403092. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/92.pdf

4. Trunev A.P. Dinamika chastic v metrike s logarifmicheskim potencialom / Trunev A.P. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №06(120). – IDA [article ID]: 1201606070. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/70.pdf, 1,500 u.p.l.

5. Trunev A.P. Logarifmicheskij zakon v dinamicheskih sistemah ot kvarkov do galaktik / Trunev A.P. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №06(120). – IDA [article ID]: 1201606099. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/06/pdf/99.pdf, 1,563 u.p.l.

6. Trunev A.P. Obshhaja teorija otnositel'nosti i metrika galaktik / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf

7. Trunev A.P. Dinamika reljativistskih chastic v metrike galaktik / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №02(116). S. 1619 – 1641. – IDA [article ID]: 1161602101. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/02/pdf/101.pdf

8. Prandtl' L., Tit'ens O. Gidro- i ajeromehanika. Tom 2. – M.-L., ONTI, 1935.

9. Schlichting H. Boundary Layer Theory. - McGraw-Hill, NY, 1960.

10. Landau L. D, Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika. T.6. Gidrodinamika – 3 izd. – M.: Nauka. – 1986; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. - Pergamon, Oxford, UK, first edition, 1959.

11. Trunev A. P. Diffuse processed in turbulent boundary layer over rough surface/ Air Pollution III, Vol.1. Theory and Simulation, eds. H. Power, N. Moussiopoulos & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 69-76, 1995.

12. Trunev A. P. Similarity theory for turbulent flow over natural rough surface in pressure and temperature gradients, Air Pollution IV. Monitoring, Simulation and Control, eds. B. Caussade, H. Power & C.A. Brebbia, Comp. Mech. Pub., Southampton, pp. 275-286, 1996.

13. Trunev A. P., Similarity theory and model of diffusion in turbulent atmosphere at large scales, Air Pollution V. Modelling, Monitoring and Management, eds. H. Power, T. Tirabassi & C.A. Brebbia, CMP, Southampton-Boston, pp. 109-118, 1997.

14. Trunev A. P. Theory of Turbulence and Model of Turbulent Transport in the Atmospheric Surface Layer. - Russian Academy of Sciences, Sochi, 160 p., 1999 (in Russian).

15. Trunev A. P. Theory of Turbulence and Turbulent Transport in the Atmosphere. - CMP, Southampton-Boston, 180 p., 2001.

16. Trunev A.P. Teorija turbulentnosti i modelirovanie turbulentnogo perenosa v atmosfere. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №05(059). S. 179 – 243; №06(060). S. 412 – 491.

17. Trunev A.P. Teorija turbulentnosti i model' vlijanija plotnosti sherohovatosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 348 – 382.

18. Trunev A.P. Teorija i konstanty pristennoj turbulentnosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2010. – №04(058). S. 383 – 394.

19. Mlodinow L.D., Papanicolaou N. SO(2,1) algebra and the large N expansion in quantum mechanics// Annals of Physics, Vol. 128, Issue 2, pp. 314-334, 1980.

20. Jevicki A., Papanicolaou N. Classical dynamics in the large N limit// Nuclear Physics B, Vol. 171, pp. 362-376, 1980.

21. Chatterjee A. Large-N expansions in quantum mechanics, atomic physics and some O(N) invariant systems// Physics Reports, Vol. 186, Issue 6, pp. 249-370, 1990.

22. Trunev A.P. Gravitacionnye volny i kvantovaja teorija Shredingera / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf

23. Trunev A.P. Gravitational waves and quantum theory / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1146 – 1161. – IDA [article ID]: 0961402078. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf

24. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

25. Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, Eduard Herltet. Exact Solutions to Einstein's Field Equations. Second Edition. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46136-7, 2003.

26. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). - Pergamon Press, ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.

27. Trunev A.P. Supergravitacija v 112D / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №03(117). S. 1263 – 12184. – IDA [article ID]: 1171603082. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/82.pdf

28. Trunev A.P. Teorija fizicheskih konstant i supergravitacija v 112D / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №04(118). Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/78.pdf

29. Trunev A.P. Edinaja teorija polja i supergravitacija v 112D / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №05(119). S. 1390 – 1419. – IDA [article ID]: 1191605094. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/94.pdf

30. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Statistical Physics. Vol. 5 (3rd ed.). Butterworth-Heinemann. 1980.

31. Lucenko E.V. Obobshhennyj kojefficient jemerdzhentnosti Hartli kak kolichestvennaja mera sinergeticheskogo jeffekta ob#edinenija buleanov v sistemnom obobshhenii teorii mnozhestv / E.V. Lucenko // Politematicheskij setevoj jelektronnyj

nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2011. – №02(066). S. 535 – 545. – Shifr Informregistra: 0421100012\0031, IDA [article ID]: 0661102045. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2011/02/pdf/45.pdf

32. Lucenko E.V.. Avtomatizirovannyj sistemno-kognitivnyj analiz v upravlenii aktivnymi ob#ektami (sistemnaja teorija informacii i ee primenenie v issledovanii jekonomicheskih, social'no-psihologicheskih, tehnologicheskih i organizacionno-tehnicheskih sistem): Monografija (nauchnoe izdanie). – Krasnodar: KubGAU. 2002. – 605 s.

33. Lucenko E.V. Obobshhennyj kojefficient jemerdzhentnosti Hartli kak kolichestvennaja mera sinergeticheskogo jeffekta ob#edinenija buleanov v sistemnom obobshhenii teorii mnozhestv / E.V. Lucenko // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2011. – №02(066). S. 535 – 545. – Shifr Informregistra: 0421100012\0031, IDA [article ID]: 0661102045. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2011/02/pdf/45.pdf

34. Pauli W. The Connection Between Spin and Statistics// Phys. Rev. 58 (8), 716-722, 1940.

35. Robert Oros di Bartini. Relations between Physical Constants// Progress in Physics, Vol. 3, pp. 34-40, October, 2005.

36. Trunev A.P. Teorija fizicheskih konstant i supergravitacija v 112D / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №04(118). Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/78.pdf

37. Trunev A. P., Lucenko E. V. Astrosociotipologija: Monografija (nauchnoe izdanie). – Krasnodar: KubGAU, 2008, – 279 s.