УДК 681.3.01

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ

Ворошилова Н.А., – аспирант
АОО OILspace

Расчет безарбитражных цен финансовых инструментов – это задача, которой во всем мире уделяется в настоящее время большое внимание. В обзоре проведено исследование модели Блэка-Шоулса. Предлагаются различные варианты решения задачи определения стоимости опционов. Рассмотрены метод статистических испытаний Монте-Карло, биномиальный метод, учитывающий многовариантность развития ситуации, численный метод. На практике ответ на вопрос, какой метод оценки стоимости предпочтительнее, зависит от характеристик опциона и требуемой точности.

Ключевые слова: стоимость опциона, модель Блэка-Шоулса, метод Монте-Карло, метод сеток (биномиальный), метод конечных разностей.

Введение

Сделки с производными инструментами заключаются как на биржевом, так и на внебиржевом рынке. Конкуренция биржевого и внебиржевого секторов послужила дополнительным стимулом к развитию рынка производных финансовых инструментов. В последние годы на обоих рынках наблюдается бурный рост. По итогам I полугодия 2006 года объём торгов фьючерсами и опционами вырос более чем в 8 раз по сравнению с аналогичным периодом 2005 года и превысил 1,9 трлн рублей (порядка $70 млрд). Для сравнения, оборот на российском валютном рынке увеличился за это же время в 1,8 раз, а на рынке акций - в 4,5 раза.

Особенно широкое распространение получили операции с опционами. Изначально опционы задумывались как инструмент, предназначенный для страхования результатов деятельности крупных игроков, таких как банки или торговые дома. Существовали как реальные поставки товаров, так и чисто финансовые операции. И в настоящее время опционы не утратили своего первоначального значения. Оно интересно тем инвесторам, которые не гонятся за высокой доходностью, и которым важнее всего снижение рисков. Такие операции называются операциями хеджирования. Принцип хеджирования — заключить сделку на срочном рынке на поставку акций в будущем, зафиксировав цены сделки в момент покупки/продажи контракта. Стратегия хеджирования - пожертвовать возможностью получения выгоды от благоприятного изменения цены, с целью получения защиты от неблагоприятного изменения цены. Однако вскоре выяснилось, что опционы хорошо подходят и для спекулятивных целей. После этого операциями с опционами стали заниматься и мелкие инвесторы. Очень многие, попробовав работать с опционами, практически перестают использовать фьючерсы и сделки с реальным активом в повседневной работе. Такая притягательность опционов объясняется рядом их замечательных свойств.

Прежде всего, это такая краеугольная характеристика опционов, как волатильность. С ее помощью описывают изменчивость цены актива. Использование волатильности позволяет получать прибыль, даже если цена на актив не изменяется. Аналогичного свойства нет больше ни у одного финансового инструмента. Периодические колебания волатильности носят более регулярный характер, чем колебания актива, при повышении волатильности опционы растут в цене. Поэтому очень распространены торговые методики продажи дорогих опционов в периоды высокой волатильности и покупки дешевых опционов в периоды низкой волатильности.

Другая особенность опционов - это обилие их различных комбинаций. У обычных людей опцион ассоциируется именно с этим их свойством. Так, широко распространено мнение, что работа в том и заключается, чтобы в поисках недооцененных комбинаций перебрать все возможные варианты. Отчасти это верно, однако перебрать все комбинации просто невозможно, и у каждого трейдера есть свои методики и "поля деятельности", с которыми они и работают.

Применение комбинаций опционов позволяет делать ставки на какое-либо особенное поведение актива. Например, на то, что он останется в каком-то ценовом интервале в течение ограниченного времени, в предположении, что скоро будет сильное движение и при этом неизвестно его направление, что скоро на рынке изменится представление о будущем росте и т. д. Подобные возможности отсутствуют при использовании простых покупок или продаж базового актива.

Применение опционов часто позволяет не ждать нужной точки входа в позицию по торговой стратегии. Для примера рассмотрим простейший вариант стратегии торговли в диапазоне. Предполагается, что цена актива не может выйти за некоторые границы. Поэтому, как только цена приближается к верхней границе, надо продавать, а при выходе на нижнюю границу - покупать. При торговле по этой стратегии следует ждать, пока цена окажется на границе диапазона, чего, кстати, может и не произойти. А при использовании опционов можно сразу продать опцион кол со страйком на верхней границе и опцион пут со страйком на нижней границе. В этом случае появляется возможность регулярно зарабатывать на данном предположении, даже если цены не выходят за границу диапазона, например, повторяя продажи каждый месяц.

К недостаткам опционов необходимо отнести их относительно низкую ликвидность по сравнению с ликвидностью актива. Это порождает проблемы с открытием, изменением и закрытием позиций. По этой же причине при работе с опционами не получается заключать сделки на большие суммы [2].

Из всего вышеизложенного становится очевидным важность быстрого и точного нахождения цены опциона в любой момент времени. И здесь исследователи этого вопроса столкнулись с определенными проблемами. Дело в том, что для количественной оценки стоимости опциона нельзя использовать ставшие уже традиционными методы дисконтирования. Они предполагают прогнозирование потока денежных средств, связанного с владением каким-либо активом (или его эксплуатацией), а также приведение этих денежных потоков к настоящему моменту времени для определения текущей стоимости (ценности) актива. При этом ожидаемый денежный поток должен дисконтироваться по ставке, равной альтернативным издержкам. Определить же их точную величину для опциона традиционными методами невозможно, так как риск его изменяется при каждом изменении стоимости и срока жизни лежащего в основе опциона актива. Использование в этом случае одной ставки, типа средневзвешенной стоимости капитала (WACC), приводит к ошибочным результатам.

Расчет эффективности инвестиций в условиях неопределенности обычно сопровождается использованием метода "дерева решений", учитывающего многовариантность развития ситуации. Однако этот метод не дает никакого руководства по поводу выбора ставки дисконтирования и ее изменению (вследствие различного риска) по мере движения по "дереву" состояний. Кроме того, если оценивать опцион на основе "дерева решений", то может получиться очень большое, возможно бесконечное, число стратегий, проанализировать которое в явном виде очень сложно. Таким образом, как показывает анализ, опцион является специфическим объектом, и ни одним из традиционных методов его нельзя адекватно оценить.

Для решения этой проблемы был разработан целый ряд различных моделей, таких как модели Black, Black - Scholes, Cox - Ross - Rubinstein, Whaley, Garman - Kohlhagen, Merton. Среди этих моделей модель Блэка-Шоулса, несмотря на многочисленные ограничивающие предположения, остаётся наиболее широко используемой для расчета стоимости опциона. Как показывает практика, её использование обосновано в большинстве случаев, а расхождения между фактической ценой опциона и теоретической у ликвидных инструментов лежит в пределах рыночного спрэда между ценами покупки и продажи. Это наилучший выбор для Европейских опционов на ценные бумаги, индексов или долговых обязательств правительства.

Открытие данной модели привело к повышенному интересу к производным инструментам и взрывному росту опционной торговли. Опубликование формулы Блэка-Шоулса в 1973г. позволило отойти от субъективно-интуитивных оценок при определении цены опционов и подвести под него теоретическую базу, применимую и к другим производным инструментам. Для начала 70-х сама идея использовать математический подход для оценки производных инструментов была революционна.

Современное управление рисками, применяемое в страховании, торговле на фондовом рынке и инвестировании, основывается на возможности использовать математические методы для предсказания будущего. Конечно, не со 100%-ной вероятностью, но достаточно точно для того, чтобы принять взвешенное инвестиционное решение. Основополагающий принцип работы на финансовых рынках состоит в следующем: чем больший риск вы готовы на себя принять, тем на большее вознаграждение вы вправе рассчитывать. Использование математики никогда не сможет полностью элиминировать риск, но может помочь правильно оценить степень принимаемого на себя риска и решить вопрос о справедливом вознаграждении.

Модель Блэка-Шоулса

Теория ценообразования опционов исходит из того, что на цену опциона влияют шесть базовых факторов:

1. *Цена базового актива* (S) и *цена страйк* (E) (цена исполнения). Соотношение между ценой лежащего в основе опциона актива и ценой экспирации является наиболее важным фактором,

влияющим на цену опциона. Очевидно, что чем больше это соотношение, тем дороже опцион колл и дешевле опцион пут.

2. *Время, остающееся до даты истечения опциона* (T). Время работает против покупателя опционов, так как цена опционов вне денег снижается ускоренными темпами с приближением даты их истечения. Больший срок, остающийся до окончания срока действия опциона, означает большую неопределенность.
3. *Степень колебаний* (σ) (волатильность). Этот показатель отражает подверженность базового актива ценовым колебаниям. Величина премии по опционам в деньгах прямо пропорциональна ожидаемой ценовой неустойчивости базового актива.
4. *Дивидендные выплаты* (D_0) *по базовому активу за время жизни опциона*. Повышенные дивиденды сокращают цену опционов колл и увеличивают цену опционов пут, потому что выплата дивидендов сокращает цену лежащих в основе опциона акций на сумму дивиденда. Дивиденды увеличивают привлекательность покупки и держания акций по сравнению с покупкой опционов колл и хранением резервов наличности.
5. *Уровень процентных ставок* (r). Растущие процентные ставки увеличивают форвардную цену базовых акций, которая рассчитывается как цена акции плюс ставка по безрисковым активам на период действия опциона. Форвардная цена в модели понимается как стоимость акции на дату истечения опциона.

Эти факторы используются при построении математических моделей теоретической цены опционов, получивших широкое распространение на опционном рынке.

Рассмотрим финансовый рынок, состоящий из рискового актива S_t и безрискового банковского счета B_t, представляющего собой возможность кредитования и вложения под фиксированную процентную ставку r.

Относительно условий покупки и продажи ценных бумаг делаются следующие предположения:

1. Предполагается, что все ценные бумаги являются абсолютно ликвидными. Это значит, что в любой момент времени можно купить или продать любое количество ценных бумаг любого вида. Цена покупки совпадает с ценой продажи.
2. Предполагается также, что все ценные бумаги являются бесконечно делимыми. То есть можно продать и купить, например, не только акцию, но и любую долю акции.
3. Издержки, связанные с покупкой и продажей ценных бумаг, отсутствуют. Отсутствуют и налоги.
4. Еще одно предположение состоит в том, что рынки являются эффективными и ни один из участников рынка своими действиями не может повлиять на цены активов. Но совместные действия всех участников рынка определяют процесс изменения цен активов.
5. На рынке не существует возможности арбитража. На самом деле, временами на рынках возникает возможность арбитража. Но на рынке работают специальные люди - арбитражеры, чьей работой и является поиск арбитражных портфелей. Таким образом, в результате активной скупки этих портфелей, арбитражные возможности мгновенно исчезают.
6. Модель основывается на логнормальном распределении цен акций. Хотя функция нормального распределения является составной частью модели, использование экспоненты делает распределение логнормальным. Проблема при использовании нормального распределения состоит в том, что оно предполагает возможность для цены акций принимать отрицательные значения. Поэтому в случае цены акций чаще всего используется логнормальное

распределение, предполагающее, что цены на акции могут принимать значения в интервале от нуля до бесконечности [7].

Существуют несколько методов подсчета цены опциона в модели Блэка-Шоулса. Универсальным средством, специально разработанным для оценки стоимости опциона, является биномиальный метод. Он исходит из того, что срок действия опционного контракта может быть разделен на ряд периодов, в каждом из которых возможны только два изменения цены базисного актива. Начиная с момента окончания действия опциона, этот метод предполагает движение в направлении, обратном ходу времени (к корню "дерева" состояний), при вычислении стоимости опциона в начале каждого из периодов. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнут нулевой момент времени и вычислена настоящая (текущая) стоимость опциона.

Идея определения стоимости колл-опциона биномиальным методом в каждом из периодов заключается в том, что владелец актива (например, акции) может сформировать безрисковый портфель, продав определенное количество опционов на данный актив. Тем самым он полностью хеджирует риск, связанный с изменением цены актива в будущем. Соответственно, сформированный портфель должен приносить такой же доход, как и портфель безрисковых активов (например, государственных облигаций). Зная цену актива в начале периода, безрисковую процентную ставку, а также две возможные цены актива и, соответственно, стоимость опциона в конце периода, можно найти структурные характеристики двух портфелей. Исходя из этого, определяется стоимость опциона в начале периода.

Данную ключевую идею оценки стоимости опциона можно еще интерпретировать следующим образом. Любой инвестор, комбинируя инвестиции в какой-либо актив с безрисковыми инвестициями, может сформировать такой портфель, доходы от которого были бы полностью эквивалентны доходам по опциону колл на соответствующий актив. Тем самым он может создать опцион синтетически. Соответственно, объективная рыночная стоимость опциона должна быть равна чистым затратам на формирование данного портфеля-эквивалента.

Из метода формирования эквивалентного портфеля следует, что для оценки стоимости опциона не нужно использовать какую-либо премию за риск, так как последняя уже включена в текущую цену базисного актива. Серьезным преимуществом опционного подхода является также то, что для расчета опционной стоимости нет необходимости знать вероятности двух возможных изменений цены актива в каждом из периодов. Эти параметры непосредственно влияют на текущую стоимость актива. Таким образом, они учитываются при расчете стоимости опциона косвенным образом через цену базисного актива.

Считая, что количество периодов в течение срока действия опциона не ограничено, а, следовательно, и число будущих возможных цен актива, то стоимость Европейского колл-опциона может быть найдена аналитическим способом. Для вывода соответствующей формулы выбирается математическая модель цены базисного актива. В качестве ее основы обычно используется Винеровский стохастический процесс, который предполагает непрерывность изменения случайной величины в соответствии с логарифмически нормальным распределением. Для оценки стоимости опциона применяется модель в виде скалярного дифференциального уравнения с мультипликативным шумом и постоянными коэффициентами роста μ и волатильности σ:

$$dS = mS_t dt + s\sqrt{S_t}\,dW \qquad (1)$$

где S_t - цена базисного актива опциона в момент времени t; dS - приращение цены базисного актива за малый промежуток времени dt; dW - приращение стандартного Винеровского процесса.

Решением данного уравнения является формула стоимости опциона, являющаяся модификацией формулы Блэка-Шоулса для оценки стоимости Европейского колл-опциона [3]:

$$
\begin{aligned}
&V_{call} = S_0 e^{(m-r)t} N(d_1) - Ee^{-rt} N(d_2) \\
&d_{1,2} = \frac{\ln(S_0 / E) + (m \pm s^{\,2} / 2)t}{s\sqrt{t}}; \\
&m = r - q
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где $N(d)$ - накопленная вероятность функции распределения стандартной нормальной случайной величины для уровня d [5].

Целью данной работы было изучение и сравнение методов моделирования стоимости простейших опционов. В работе дан обзор основных методов оценки опционов: метод Монте-Карло, метод сеток (биномиальный) и метод конечных разностей.

В методе Монте-Карло используется стохастическое дифференциальное уравнение (1), характеризующее изменение цены актива за малый промежуток времени. Моделируя Винеровский процесс dW, предварительно разбив интересующий промежуток времени на достаточно малые интервалы, можно определить поведение цены. Сделав это несколько тысяч раз, можно найти стоимость опциона в момент экспирации как среднее арифметическое найденных цен. Приведя полученное значение на начальный момент времени, определим искомую цену опциона.

Биномиальный метод основан на предположении, что за достаточно малый период времени возможны только два варианта изменения цены, т.е. что цена станет равна $S_1 > S$ с вероятностью p и $S_2 < S$ с вероятностью $1 - p$. Идея заключается в том, что, зная начальную цену акции, можно построить дерево (или сетку) возможных значений цены актива вплоть до даты экспирации. Это позволит вычислить возможные значения актива в момент экспирации и вероятности и вероятности, с которыми эти значения достигаются.

Применяя лемму Ито, можно получить, уравнение для стоимости простейшего опциона

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}s^{2}S^{2}\frac{\partial^{2}V}{\partial S^{2}}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

Для определения решения данного параболического уравнения с некоторыми очевидными краевыми условиями используются **численные методы**. Делая замену переменных, уравнение преобразуется к каноническому виду. Таким образом, используя специальные конечно-разностные методы решения параболических дифференциальных уравнений, можно получить стоимость опциона.

Метод Монте-Карло

Рассмотрим для оценки стоимости базового актива модель (1). Разобьем промежуток времени, оставшийся до даты экспирации, на маленькие промежутки и смоделируем Винеровский процесс достаточное число раз, найдем среднее значение цены опциона и приведем его на начальный момент времени [8].

Для начала необходимо построить генератор равномерно распределённых случайных чисел. В принципе по способу получения различают три вида случайных величин: случайные величины из заранее составленных таблиц, из датчиков случайных чисел и псевдослучайные числа. Недостатки и достоинства свои у каждого из способов. Однако с практической точки зрения наиболее выгоден метод псевдослучайных чисел. Большинство алгоритмов, используемых на практике для получения псевдослучайных чисел, представляют собой рекуррентные формулы первого порядка

$$g_{n+1}=\Phi(g_n)$$

где начальное число g_n задано.

Рассмотрим один из самых распространённых методов, предложенный Д. Лемером - метод вычетов (residual method) или метод сравнений (congruential method). В этом методе $\Phi(x) = Д(gg_n)$ то есть

$$g_{n+1} = Д(gg_n)$$

где g - большое целое число. На практике обычно используют формулу

$$m_{n+1} = gm_n (\mathrm{mod}\, M)$$

То есть m_{n+1} равно остатку, полученному при делении gm_n на M (или, другими словами, m_{n+1}- это наименьший положительный вычет по модулю M).

Вопрос о пригодности таких псевдослучайных чисел решается, в конечном счете, эмпирически. При некоторых (g, M, m_0) получаются удовлетворительные последовательности, при других - плохие. В частности известно, что удовлетворительная последовательность псевдослучайных чисел получается при g=5^{17}, M=2^{42}, m_0=1 (длина отрезка апериодичности и длина периода равны 2^{40}).

Теперь, имея равномерно распределённые случайные величины, получим нормально распределенную последовательность. Предположим, что случайная величина ξ определена в интервале $a<x<b$ и имеет плотность $p(x)>0$ при $a<x<b$. Обозначим через $F(x)$ функцию распределения ξ, которая при $a<x<b$ равна

$$\mathrm{F(x)} = \int_a^x \mathrm{p(u)\,du}$$

Случай $a = -\infty$ и (или) $b = \infty$ не исключается. Тогда очевидно, что если γ- равномерно распределённая в интервале (0, 1) случайная величина, то случайная величина ξ, удовлетворяющая уравнению

$$F(x) = g$$

имеет плотность $p(x)$.

Этот метод является частным случаем метода обратных функций. Он позволяет записать формулы для моделирования любой случайной величины ξ. Но, к сожалению, в нашем случае он приводит к сложному и неудобному алгоритму, так как приходится решать уравнение

$$\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2p}\, g \ ,$$

где ζ- нормальная случайная величина с параметрами (0,1).

Поэтому мы воспользуемся другим методом [9].

Рассмотрим нормированную (то есть такую, у которой математическое ожидание равно 0, а дисперсия равна 1) сумму n независимых равномерно распределённых величин:

$$z^{(n)} = \sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{i=1}^{n} (2g_i - 1) \qquad (3)$$

Согласно центральной предельной теореме при $n \to \infty$

$$P\{z^{(n)} < x\} \to \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \qquad (4)$$

Следовательно, используя формулу (3) при достаточно больших n можно вычислять приближенные значения нормальной случайной величины ζ с параметрами (0,1). Известно, что асимптотика в формуле (4) устанавливается весьма быстро, и поэтому на практике ограничиваются значением n=12.

При моделировании Винеровского процесса как непрерывного случайного процесса с независимыми нормальными приращениями будем использовать полученные нормальные значения:

$$\Delta W_t = W_{t+1} - W_t = z\sqrt{\Delta t}$$

В результате реализации Винеровского процесса можно смоделировать изменение стоимости базового актива (рисунок 1).

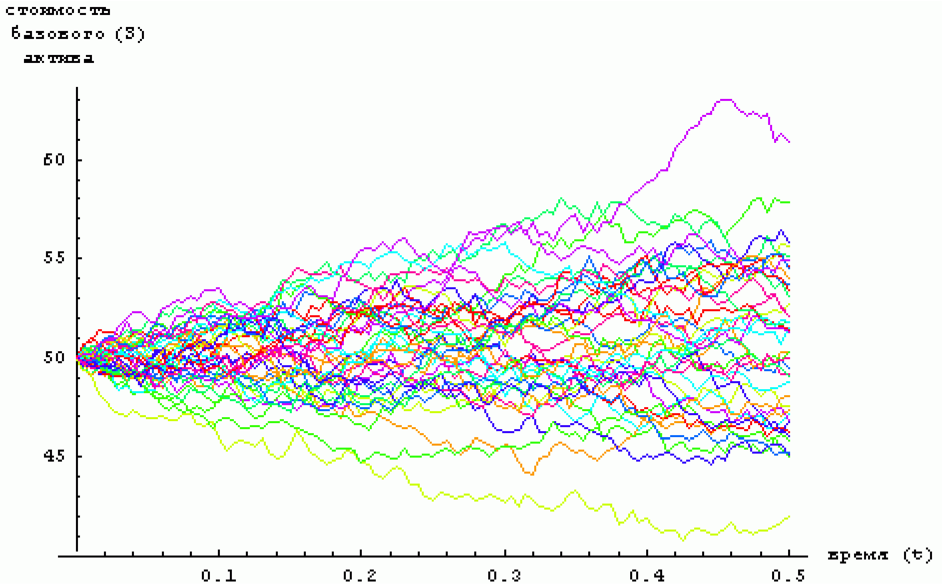

Рисунок 1.

Для того чтобы оценить реальное значение моделируемой величины, необходимо провести большое количество испытаний и определить γ-доверительный интервал, то есть такой интервал, внутри которого с высокой вероятностью находится реальное значение моделируемой величины. Величина γ выбирается заранее (обычно она равна 0.95). При заданном γ длина доверительного интервала характеризует точность локализации значения оцениваемой величины, поэтому обычно выбирается кратчайший интервал.

Далее из величин, входящих в γ - доверительный интервал (в количестве N штук), необходимо отбросить те, которые меньше цены исполнения (для опциона колл) или больше цены исполнения (для опциона пут). Для оставшихся величин находим стоимость опциона на момент экспирации T и усредняем полученные значения. Теперь полученное среднее значение стоимости опциона приводим на нулевой момент. В результате определяем стоимость опциона.

Биномиальный метод

Биномиальный метод основывается на упрощающем предположении о том, что за каждый достаточно короткий период времени курс базового актива может перейти из исходного состояния только в одно из двух возможных состояний. В стандартной модели используется рекомбинационное биномиальное дерево (решетка) с постоянной волатильностью и процентной ставкой. Формула для оценки стоимости опциона выводится при помощи метода обратной индукции. В предельном случае, если устремить длительность каждого периода времени к нулю, полученный результат совпадает с формулой Блэка-Шоулса.

Разобьем весь срок действия опциона на N периодов. В каждом периоде цена на базовый актив может либо измениться в $u>1$ раз с вероятностью p, либо измениться в $0<d<1$ раз с вероятностью $(1-p)$. В начальный момент времени стоимость базового актива равна S_0. В течение первого периода цена станет равной

$$S_0 < \begin{matrix} S_1^0 = S_0 u, & с & вероятностью & p \\ S_1^1 = S_0 d, & с & вероятностью & 1-p \end{matrix}$$

В течение второго периода цена базового актива станет равной $S_2^0 = S_1^0 u = S_0 u^2$ с вероятностью p^2, либо $S_2^1 = S_1^0 d = S_1^1 u = S_0 ud$ с вероятностью $p(1-p)$, либо $S_2^2 = S_1^1 d = S_0 d^2$ с вероятностью $(1-p)^2$. Заметим, что с каждым последующим периодом количество различных вариантов стоимости базового актива увеличивается на единицу. Таким образом, можно записать стоимость базового актива в общем виде для любого из периодов. В конце m-го периода стоимость базового актива будет принимать значения $m+1$ значение: $S_m^n = S_0 u^{m-i} d^i$, $i = 0,...,m$.

Зная параметры p, u и d, можно получить точные значения для вычисления изменения цены опциона на промежутке времени dt. Считая, что математическое ожидание/дисперсия цены акции в момент времени m (S_m) равно математическому ожиданию/дисперсии цены акции в момент времени $m+1$ (S_{m+1}), дисконтированной на момент времени m, получаем систему уравнений для определения p, u и d:

$$\begin{cases} pu + (1-p)d = e^{rdt} \\ pu^2 + (1-p)d^2 = s^2 dt + e^{2rdt} \end{cases}$$

Пологая $u = \frac{1}{d}$ и решая уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} p &= \frac{e^{rdt} - e^{-sdt}}{e^{sdt} - e^{-sdt}} \\ u &= e^{s\sqrt{dt}} \\ d &= e^{-s\sqrt{dt}} \end{aligned} \qquad (5)$$

Пройдя, таким образом, все N периодов, в конце получим значения стоимости базового актива с соответствующими вероятностями в момент экспирации. Зная цену исполнения E, можно определить стоимость опциона в момент T. Воспользовавшись тем же соображением, что и при составлении уравнения для p, u и d, но уже для цены опциона, получаем

$$pV_{m+1}^{n+1} + (1-p)V_{m+1}^{n} = e^{rdt}V_m^n$$

Таким образом, начиная с m=N-1, последовательно находим стоимость опциона V_m^n (m=N-1,..0; $n=0..m$). В результате определяем цену Европейского опциона V_0 в начальный момент времени.

Для Американского опциона алгоритм абсолютно такой же, только при нахождении цены опциона необходимо учитывать возможность ранней реализации опциона, т.е.

$$V_m^n = \max\{e^{-rdt}(pV_{m+1}^{n+1} + (1-p)V_{m+1}^{n}), E - S_m^n\} \text{ для опциона пут}$$

$$V_m^n = \max\{e^{-rdt}(pV_{m+1}^{n+1} + (1-p)V_{m+1}^{n}), S_m^n - E\} \text{ для опциона колл}$$

Численный метод

Модель Блэка-Шоулса и ее обобщения основываются на применении дифференциальных уравнений в частных производных. В некоторых случаях дифференциальные уравнения имеют точное решение, что приводит к достаточно простым формулам вроде знаменитой формулы Блэка-Шоулса (2). Однако зачастую дифференциальные уравнения могут быть решены только при помощи численных методов [5].

Пусть в рассматриваемый период времени по акции выплачиваются постоянные дивиденды D_0. Рассмотрим численное решение следующей задачи:

$$V_t + \frac{1}{2} s^{2} S^2 V_{SS} + (r - D_0) S V_S - V = 0 \qquad (6)$$

Вывод формулы (6) для определения стоимости опционов основывается на том, что, на рынке с акциями заданного типа, опционами и безрисковыми вложениями по ставке r не должно существовать возможностей для полностью безрискового арбитража.

Для однозначного определения стоимости опциона $V(S,t)$ к уравнению (6) необходимо добавить начальные и граничные условия. При этом начально-краевая задача для уравнения (6) формулируется в обратном времени, то есть премия опциона известна не в начальный, а в конечный момент времени (иначе задача неустойчива из-за одинакового знака при первой и второй производных). В момент истечения срока опциона при $t=0$ начальные условия принимают вид:

для опциона колл: $V(S, 0) = \max(0, S - E)$

для опциона пут: $V(S, 0) = \max(0, E - S)$

Определим граничные условия следующим образом:

для опциона колл: $$\begin{aligned} &V(0,t) = 0 \\ &V(S,t) \xrightarrow[S\to\infty]{} S \end{aligned}$$

для опциона пут: $$\begin{aligned} &V(0,t) = Ee^{-r(T-t)} \\ &V(S,t) \xrightarrow[S\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Чтобы привести уравнение (6) к более привычному каноническому виду, введем замену переменной

$$S=Ee^x$$

Тогда уравнение (6) принимает вид

$$V_t + \frac{1}{2} s^{2} (V_{xx} - V_x) + (r - D_0) V_x - rV = 0$$

Далее через τ обозначим время, остающееся до времени $T>0$, срока окончания действия финансового инструмента, т.е.

$$t = T - \frac{2t}{s^{2}}$$

Тогда полученное уравнение записывается в виде

$$\frac{s^{2}}{2}V_{t} - (r - D_{0})SV_{x} = \frac{s^{2}}{2}V_{xx} - rV$$

После введения новой неизвестной функции

$$V(x,t) = E \cdot u(x,t) \cdot e^{-\frac{k_2-1}{2}x - (\frac{(k_2-1)^2}{4} + k_1)t},$$

где

$$k_1 = \frac{2r}{s^{2}}$$

$$k_2 = \frac{2(r - D_0)}{s^{2}}$$

уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Это простейшее уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами.

Аналогично, преобразовав начальные и граничные условия, сформулируем начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (7)$$

для опциона колл:

$$\begin{aligned} & \mathrm{u(x,0) = max\{e^{\frac{1}{2}(k_2+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x},0\}} \\ & u(x,t) \xrightarrow[x\to\infty]{} \mathrm{e^{\frac{1}{2}(k_2+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2-1)^2 x}} \\ & u(x,t) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

для опциона пут:

$$\begin{aligned} & \mathrm{u(x,0) = max\{e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2+1)x},0\}} \\ & u(x,t) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \\ & u(x,t) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \mathrm{e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2+1)^2 x}} \end{aligned} \qquad (9)$$

Стоимость опциона определяется по формуле

$$V(S,t)=E^{\frac{1}{2}(1+k_2)}S^{\frac{1}{2}(1-k_2)}e^{-\frac{1}{8}((k_2-1)+4k_1)s^2(T-t)}u(\ln\frac{S}{E},\frac{1}{2}s^2(T-t))$$

Рассмотрим численное решение задачи (7)-(8). Для начала необходимо построить соответствующую дискретную модель. Решение будем искать в ограниченной области $[x_{\min}, x_{\max}]\,x\,[0,\frac{1}{2}s^2T]$. Проведем дискретизацию области, введя равномерную сетку:

$$w_{\Delta x}=\{x_j = j\cdot\Delta x,\quad j=\overline{-J,J},\quad \Delta x=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{2J}\}$$

$$w_{\Delta t}=\{t_n = n\cdot\Delta t,\quad n=\overline{0,N},\quad \Delta t=\frac{\frac{1}{2}s^2T}{N}\}$$

Параметры J и N характеризуют "густоту" сетки. Теперь построим семейство линий

$$x=x_j,\quad j=\overline{-J,J};$$
$$t=t_n,\quad n=\overline{0,N};$$

Будем рассматривать точки пересечения этих линий. Разделим узлы на две группы - граничные (в них заданы дополнительные краевые и граничные условия) и внутренние.

После дискретизации строим некоторый аналог исходного уравнения - разностную схему. Сначала введем обозначения

$$u_j^n=u(j\Delta x,n\Delta t),\quad a=\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

а для частных производных возьмем такие приближения

$$u_{xx}|_{(x_j,t_n)}\approx\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$
$$u_t|_{(x_j,t_n)}\approx\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}$$

Подставив эти формулы в краевую задачу, получим ее алгебраический аналог. Будем исследовать класс схем [6] для решения задачи (7)-(8).

Явная схема:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Неявная схема:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Схема с весами:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=q\,\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+(1-q)\,\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Смешанная разностная схема (схема с весами) для уравнения теплопроводности получается, как видно из ее записи, путем объединения двух предыдущих разностных схем.

От будущего алгоритма потребуем как можно более точного воспроизведения функции u_j^n- для этого нужно, чтобы погрешность z_j^n была мала, и решение сеточного уравнения сходилось к решению u_j^n узле (x_j, t_n), если $\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta t\to 0}|z_j^n|=0$.

Можно показать [4], что явная схема будет устойчива при введении дополнительного ограничения на параметры схемы:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\le\frac{1}{2}$$

Неявная разностная схема абсолютно устойчива (устойчива при любых значениях Δx и Δτ) и имеет первый порядок аппроксимации по пространству и второй по времени. А для смешанной схемы при $q=\frac{1}{2}-\frac{\Delta x^2}{12\Delta t}$ порядок аппроксимации будет $O(\Delta\tau^2 + \Delta x^4)$, а для остальных $O(\Delta\tau + \Delta x^2)$. При этом схема будет устойчивой при $q\ge\frac{1}{2}-\frac{\Delta x^2}{12\Delta t}$. Значение $q=\frac{1}{2}$ удовлетворяет этому неравенству (Crank-Nicolson equation). Это означает, что соответствующая схема является абсолютно устойчивой.

Преимущество этой схемы в том, что она имеет более быструю сходимость (таблица 3).

Опишем теперь более подробно θ-метод.

Будем рассматривать x только на интервале $-J\Delta x \le x \le J\Delta x$. Число J мы выбираем настолько большим, чтобы можно было заменить граничные и начальные условия аппроксимированными" условиями:

$$u_j^0 = u_0(j\Delta x), \quad -J \le j \le J$$
$$u_{-J}^n = f(-J\Delta x, n\Delta t)$$
$$u_J^n = g(J\Delta x, n\Delta t)$$

Так как срок до истечения опциона всегда конечен, то u_j^n достаточно находить только для $0 \le n \le N$. Число N очевидно находится из соотношения $N\Delta t = \frac{1}{2}s^2T$. Таким образом, для того чтобы решить данное уравнение конечно-разностными методами, разделим время до экспирации $\frac{1}{2}s^2T$ на N равных частей ($\Delta t = \frac{1}{2}s^2T/N$) и решим разностное уравнение:

$$u_j^{n+1} - qa(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n + (1-q)a(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad -J < j < J, \quad 0 < n \le N \tag{10}$$

с начальными условиями

$$u_j^0 = u_0(j\Delta x), \quad -J \le j \le J$$

и граничными условиями

$$u_{-J}^n = f(-J\Delta x, n\Delta t), \quad u_J^n = g(J\Delta x, n\Delta t), \quad 0 < n \le N$$

Таким образом, получим систему линейных уравнений, которую можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1+2qa & -qa & 0 & \cdots & 0 \\ -qa & 1+2qa & -qa & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -qa \\ 0 & \ldots & 0 & -qa & 1+2qa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{J-1}^{n} \\ \vdots \\ u_{0}^{n} \\ \vdots \\ u_{-J+1}^{n} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1-2qa & qa & 0 & \cdots & 0 \\ qa & 1-2qa & qa & \ddots & \vdots \\ 0 & qa & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & qa \\ 0 & \ldots & 0 & qa & 1-2qa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{J-1}^{n-1} \\ \vdots \\ u_{0}^{n-1} \\ \vdots \\ u_{-J+1}^{n-1} \end{pmatrix} + qa \begin{pmatrix} u_{J}^{n} + u_{J}^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{-J}^{n} + u_{-J}^{n+1} \end{pmatrix}$$

более формально, эту систему можно переписать

$$Au^{n+1} = Bu^{n} + C^{n}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1+2qa & -qa & 0 & \cdots & 0 \\ -qa & 1+2qa & -qa & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -qa \\ 0 & \ldots & 0 & -qa & 1+2qa \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-2qa & qa & 0 & \cdots & 0 \\ qa & 1-2qa & qa & \ddots & \vdots \\ 0 & qa & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & qa \\ 0 & \ldots & 0 & qa & 1-2qa \end{pmatrix}, \; u^{n} = \begin{pmatrix} u_{J-1}^{n} \\ \vdots \\ u_{0}^{n} \\ \vdots \\ u_{-J+1}^{n} \end{pmatrix}, \; C^{n} = qa \begin{pmatrix} u_{J}^{n} + u_{J}^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{-J}^{n} + u_{-J}^{n+1} \end{pmatrix}$$

При $n=0$ получаем систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей. В правой части (10) известны все значения из краевых условий. Поэтому можно применить метод прогонки, после которого становятся известными значения искомой сеточной функции на всем первом временном слое u_j^1. Аналогично можно рассчитать второй и последующие слои, поставив в правую часть уравнений только что найденные значения с предыдущего слоя до тех пор пока не найдем u_j^N. Теперь стоимость опциона определяем из соотношения

$$V = E^{\frac{1}{2}(1+k_2)} S^{\frac{1}{2}(1-k_2)} e^{-\frac{1}{8}((k_2-1)^2+4k_1)\sigma^2(T-t)} u(\log(\frac{S}{E}), \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)),$$

где $u(\log(\frac{S}{E}), \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))$ найдем путем линейной аппроксимации u_j^N.

Учитывая, что при $q \geq \frac{1}{2} - \frac{\Delta x^2}{12\Delta t}$ данная схема является абсолютно устойчивой, можно определить значения параметра α. А именно, θ-метод при $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$сходится при всех α>0, а при $0 < q < \frac{1}{2}$ он сходится при $0 < a \leq \frac{1}{2(1-2q)}$.

При условии досрочного исполнения опциона, что соответствует Американским опционам, поставленная задача после замены переменных задача сводится к решению вариационной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

для опциона колл:
$$u(x,0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k_2+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x}, 0),$$
$$u(x,t) \geq e^{\frac{1}{4}((k_2-1)^2+4k_1)t} \max(e^{\frac{1}{2}(k_2+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x}, 0)$$
$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$$

для опциона пут:
$$u(x,0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2+1)x}, 0),$$
$$u(x,t) \geq e^{\frac{1}{4}((k_2-1)^2+4k_1)t} \max(e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2+1)x}, 0)$$
$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 0$$

Можно более компактно переписать данные условия:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \geq 0,\ (u(x,t) - g(x,t)) \geq 0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(u(x,t) - g(x,t)) = 0,$$ где

$g(x,t) = e^{\frac{1}{4}((k_2-1)^2+4k_1)t} \max(e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2+1)x}, 0)$ для опциона put и

$g(x,t) = e^{\frac{1}{4}((k_2-1)^2+4k_1)t} \max(e^{\frac{1}{2}(k_2+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_2-1)x}, 0)$ для опциона call.

Таким образом, для Американских опционов алгоритм такой же, как и для определения стоимости Европейских опционов, только необходимо проверять дополнительно условие досрочной экспирации. Следовательно, при нахождении обратной матрицы необходимо использовать итеративные методы, например, метод верхней релаксации.

Заключение

В работе были рассмотрены различные методы для нахождения премии опционов, которые могут применяться в случае, когда не существует аналитического решения. Все методы были реализованы в виде программ на языке C++, на основе результатов, полученных с помощью этих программ, был проведен сравнительный анализ всех трех методов и сделаны следующие выводы (таблица 5):

Точность

Таблица 5 – Результаты моделирования стоимости Европейского опциона пут с ценой исполнения E=10.0, безрисковой процентной ставкой r= 0.1, волатильностью σ=0.45, четырехмесячным временем исполнения и стоимостью базового актива S в начальный момент времени

S	Монте-Карло	Биномиальный	Конечных разностей	Реальная стоимость
2.00	7.6737	7.6736	7.6721	7.6722
4.00	5.67552	5.6720	5.6723	5.6723
6.00	4.2615	3.6959	3.6975	3.6977
8.00	2.5360	1.9799	1.9804	1.9806
10.00	1.2495	0.8621	0.8566	0.8610
12.00	0.4668	0.3186	0.3174	0.3174
14.00	0.1092	0.1052	0.1046	0.1046
16.00	0.0071	0.0322	0.0321	0.0322

В данной таблице представлены результаты моделирования стоимости Европейского опциона пут с ценой исполнения E=10.0, безрисковой процентной ставкой r= 0.1, волатильностью σ=0.45, четырехмесячным временем исполнения и стоимостью базового актива S в начальный момент времени. Как видно из таблицы наилучшее приближение дает метод конечных разностей (3-4 знака после запятой). Точность в 2 знака после запятой дает биномиальный метод. И, наконец, самая плохая точность у метода Монте-Карло – разница с реальной стоимостью составляет до 0.5.

Вычислительная трудоемкость

Требования к ЭВМ вытекают из самого механизма работы методов. Так для метода Монте-Карло основная вычислительная нагрузка возникает из необходимости генерирования большого числа случайных величин. В частности, для построения 10000 траекторий Винеровского процесса с 500 временными отрезками в каждом требуется сгенерировать 60 миллионов равномерно распределенных случайных величин.

В биномиальном методе основные требования предъявляются к количеству памяти для сохранения построенного дерева. Причем требования к памяти растут как квадрат количества этапов ветвления.

В методе конечных разностей основной вычислительной процедурой является решение уравнения теплопроводности, где главная вычислительная нагрузка падает на вычисление обратной матрицы методом верхней релаксации. Благодаря этому нет большой нагрузки на объем памяти, а увеличение требуемой точности ведет к увеличению количества итераций, а значит рабочего времени программы.

Сложность реализации

Самая сложная реализация у метода конечных разностей. Приведение уравнения Блэка-Шоулса к каноническому виду уравнения теплопроводности, решение полученного дифференциального уравнения с помощью обобщенного метода Кранк-Николсона и метода верхней релаксации - все это говорит о нетривиальности данного метода. Проще выглядит биномиальный метод, требующий лишь построения биномиального дерева. Правда при введении дополнительных условий (например, при расчете экзотических опционов) построение дерева усложняется, приходится учитывать взаимное влияние отдельных узлов друг на друга. И, наконец, самая простая реализация у метода Монте-Карло. Он представляет собой цикл, генерирующий огромное число случайных величин. При этом подсчет экзотических опционов не вызывает больших трудностей, так как дополнительные условия накладываются на поведение базового актива, а именно моделирование стоимости базового актива и лежит в основе метода.

На практике ответ на вопрос, какой метод оценки стоимости предпочтительнее, зависит от характеристик опциона и требуемой точности.

Таблицы. Численные результаты.

Таблица 1. Результат алгоритма биномиальной модели. $S_0 = 50$, $X = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$

	n	Опцион европейского стиля	Опцион американского стиля
T = 0.4167 (5 месяцев)	10	3,951 (0)	4,220 (0)
	50	4,051 (0)	4,272 (0)
	100	4,063 (0,0002)	4,278 (0,0002)
	200	4,070 (0,001)	4,281 (0,001)
	500	4,0735 (0,0081)	4,2832 (0,0093)
	1000	4,0748(0,0325)	4,2838(0,0372)
T = 1 (1 год)	10	5,210 (0)	5,890 (0)
	50	5,362 (0)	5,962 (0)
	100	5,382 (0,0002)	5,971 (0,0002)
	200	5,391 (0,001)	5,975 (0,001)
	500	5,3972 (0,0081)	5,9776 (0,011)
	1000	5.3992(0,0325)	5.9784(0,046)

В скобках время вычисления в секундах.

Таблица 2. Реализация конечно-разностных схем S_{max} = 100, X = 50, r = 0.1, σ = 0.4

M=100	n	Опцион европейского стиля		Опцион американского стиля	
T = 0.4167 (5 месяцев)		Неявная схема	Кранк-Николсон	Неявная схема	Кранк-Николсон
	10	4,008	4,0339	4,1681	4,2202
	50	4,060(0,0004)	4,0718(0,00065)	4,2547(0,0013)	4,2748(0,0014)
	100	4,066(0,00080)	4,0721(0,00125)	4,2669(0,0024)	4,2773(0,0028)
	200	4,0691(0,0016)	4,0722(0,0025)	4,2732(0,0047)	4,2786(0,0056)
	500	4,0711(0,0042)	4,0723(0,006)	4,2772(0,0118)	4,2794(0,0139)
	1000	4,0717(0,0085)	4,0723(0,012)	4,2786(0,0237)	4,2797(0,0277)
T = 1 (1 год)	10	5,3007	5,2839	5,7683	5,8068
	50	5,3782	5,3964	5,9291	5,9622
	100	5,3880	5,3970	5,9515	5,9686
	200	5,3928	5,3974	5,9631	5,9720
	500	5,3958	5,3976	5,9704	5,9741
	1000	5,3967	5,3976	5,9729	5,9747

Таблица 3. Результат алгоритма конечно-разностных схем S_{max} = 100, X=50, r = 0.1,σ = 0.4

M=500	n	Опцион европейского стиля		Опцион американского стиля	
T = 0.4167 (5 месяцев)		Неявная схема	Кранк-Николсон	Неявная схема	Кранк-Николсон
	10	4,0120	3,9568	4,1719	4,1432
	50	4,0630(0,0021)	4,0678(0,0034)	4,2584(0,0059)	4,2712(0,007)
	100	4,0694(0,0042)	4,0754(0,0064)	4,2707(0,0116)	4,2812(0,0141)
	200	4,0726(0,0081)	4,0757(0,013)	4,2771(0,0230)	4,2826(0,0280)
	500	4,0745(0,020)	4,0758(0,032)	4,2812(0,0589)	4,2835(0,0715)
	1000	4,0752(0,039)	4,0758(0,062)	4,2826(0,1161)	4,2837(0,1400)
T = 1 (1 год)	10	5,3030	5,2186	5,7704	5,7417
	50	5,3805	5,3767	5,9314	5,9427
	100	5,3902	5,3968	5,9538	5,9687
	200	5,3951	5,3996	5,9656	5,9745
	500	5,3980	5,3998	5,9728	5,9766
	1000	5,3990	5,3999	5,9754	5,9773

Таблица 4. Реализация явной схемы M=100, S_{max} = 100, X = 50, r = 0.1, σ = 0.4

	N	Опцион европейского стиля	Опцион американского стиля
T = 0.4167 (5 месяцев)	1000	4,07294	4,28086
	2000	4.07265	4.28040
	5000	4.07247	4.28013
T = 1 (1 год)	1000	не выполнено условие устойчивости	
	2000	5,39813	5,97603
	5000	5,39788	5,97565

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., “Численные методы”, Издательство “Бином”, 2004 г
2. Буренин А.Н. “Форварды, фьючерсы, опционы, экзотические и погодные производные”, “НТО имени С.И. Вавилова”, 2005 г.
3. Кожин Кирилл “Всё об экзотических опционах”. Рынок ценных бумаг, №16, 2002 г.
4. Марчук Г.И. "Методы вычислительной математики." Москва "Наука". 1989. стр. 290.
5. Привалов В.В. “Анализ инвестиций в условиях неопределенности на основе опционной методологии”. Инвестиции в России, №5, 2001 г.
6. Самарский А.А., Попов Ю.П. "Разностные методы решения задач газовой динамики". Москва "Наука". 1980. стр. 128
7. Black F., Scholes M. “The pricing of options and corporate liabilities”. Journal of Political Economy, 1973 Vol.81 pp.637-659.
8. Boyle, P.P., Options: a Monte Carlo Approach, Journal of Financial Economics, 4 (1977), 323-38
9. Джекел П. “Применение методов Монте-Карло в финансах”, Издательство “Интернет-трейдинг”, 2004 г.