

УДК 519.157.1

UDC 519.157.1

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Math

**ИНТЕРВАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ
КРУПНОМАСШТАБНОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ
МАТЕРИИ ВО ВСЕЛЕННОЙ¹**

**INTERVAL MODEL OF THE LARGE-SCALE
CLUSTERING OF THE MATTER IN THE UNI-
VERSE**

Узденов Ахмат Абдуллахович
к.ф.-м.н., доцент
*Северо-Кавказская государственная гуманитарно-
технологическая академия, Черкесск, Россия*
uzdenov.ahmat@yandex.ru

Uzdenov Ahmat Abdullahovich
Cand.Phys.-Math.Sci., associate professor
*North-Caucasian State Humanities and Technology
Academy, Cherkessk, Russia*
uzdenov.ahmat@yandex.ru

Кочкаров Расул Ахматович
к.э.н, SPIN-код: 5253-4030
*Финансовый университет при Правительстве
Российской Федерации, Москва, Россия*
rasul_kochkarov@mail.ru

Kochkarov Rasul Ahmatovich
Cand.Econ.Sci., RSCI SPIN-code: 5253-4030
*Financial University under the Government of the
Russian Federation, Moscow, Russia*
rasul_kochkarov@mail.ru

Хапаева Леля Халисовна
к.ф.-м.н., доцент
*Северо-Кавказская государственная гуманитарно-
технологическая академия, Черкесск, Россия*
lelia.kazalieva@yandex.ru

Нараева Лелия Халисовна
Cand.Phys.-Math.Sci., associate professor
*North-Caucasian State Humanities and Technology
Academy, Cherkessk, Russia*
lelia.kazalieva@yandex.ru

В статье представлена модель крупномасштабной кластеризации материи во вселенной. Базу математических расчетов составляет интервальная математика

The article presents the model of the large-scale clustering of the matter in the universe. The base for mathematical calculations is interval mathematics

Ключевые слова: КЛАСТЕР, ФРАКТАЛ, ФРАКТАЛЬНЫЙ ГРАФ

Keywords: CLUSTER, FRACTAL, FRACTAL GRAPH

Одной из проблем авиакосмической отрасли является оптимальное размещение спутников в ближнем и дальнем космосе. В данном случае можно говорить о многокритериальной задаче размещения, где необходимо максимизировать количество, охватываемых для изучения, небесных объектов и минимизировать расстояния от Земли до спутников или расстояния между самими спутниками.

Напомним, что *кластером* принято называть большое число связанных атомов или молекул, которые внутри одной системы сохраняют свою индивидуальность. Этот термин распространился и на системы, состоящие

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-07-00231 а.

из большого числа связанных макроскопических частиц. *Фрактальными кластерами (агрегатами)* называют структуры, образующиеся при ассоциации твердых аэрозолей в газе в случае диффузионного характера их движения. Основная черта фрактального кластера – средняя плотность частиц в нем $\rho(r)$ падает по мере удаления от образующего центра по закону $\rho(r) = const/r^a$, где r – расстояние от центра.

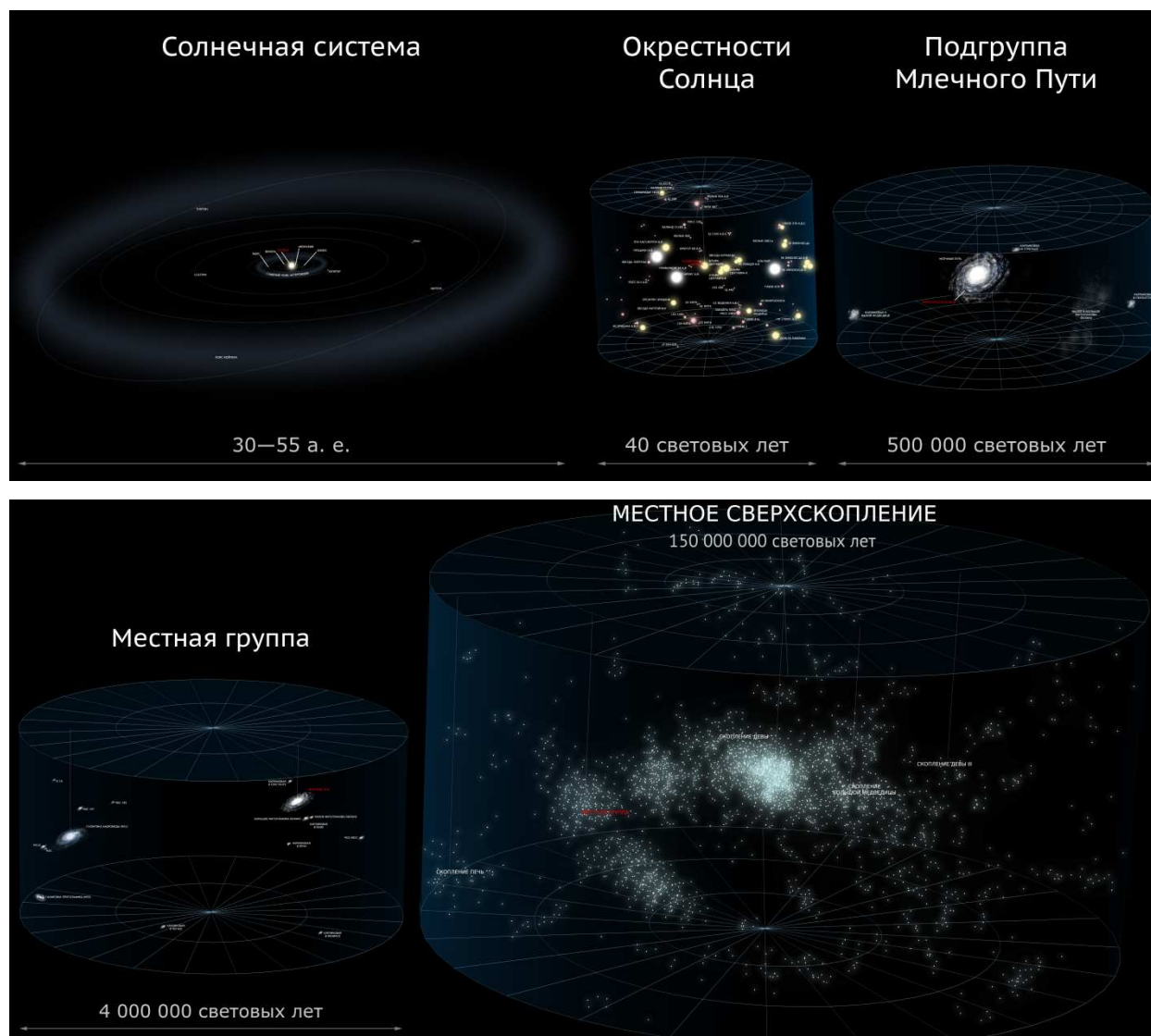


Рис. 1. Иерархия масштабов во Вселенной².

Рассмотрим морфологическое описание кластеризации материи во Вселенной. Оно сводится к следующему: большинство галактик являются членами групп или скоплений. Группы состоят в среднем из нескольких

² <http://www.atlasoftheuniverse.com>

десятков галактик, образующих скопления, максимальный диаметр которых составляет порядка 10 мегапарсек (Мпс).

Накопленный в астрофизике научно-статистический материал позволяет говорить о существовании сверхскоплений, в другой терминологии – скоплений второго структурного уровня.

Сверхскопление включает в себя сотни и тысячи галактик. Размеры сверхскоплений составляют порядка 100 Мпс (см. рис. 1). Их форма может быть различна: от цепочки, такой как цепочка Маркаряна, до стен, как великая стена Слоуна. Такая иерархия представляет собой совокупность нитевидных скоплений галактик, разделенных областями-пустотами (см. рис. 2).



Рис. 2. Нитевидные скопления галактик³.

Нити и пустоты могут образовывать протяженные относительно плоские локальные структуры, которые получили название «стены». Первым таким наблюдаемым сверхмасштабным объектом стала Великая стена CfA2, имеющая размер около 160 Мпс и толщину всего 3 Мпс.

В качестве скопления третьего уровня рассматривается Метагалактика, то есть видимая часть Вселенной, диаметр которой составляет порядка 6500 Мпс. Из приведенного морфологического описания вытекает структурная соподчинённость звёздных систем, то есть существование иерархической структуры Вселенной (см. рис. 3).

³ <http://www.mpa-garching.mpg.de>

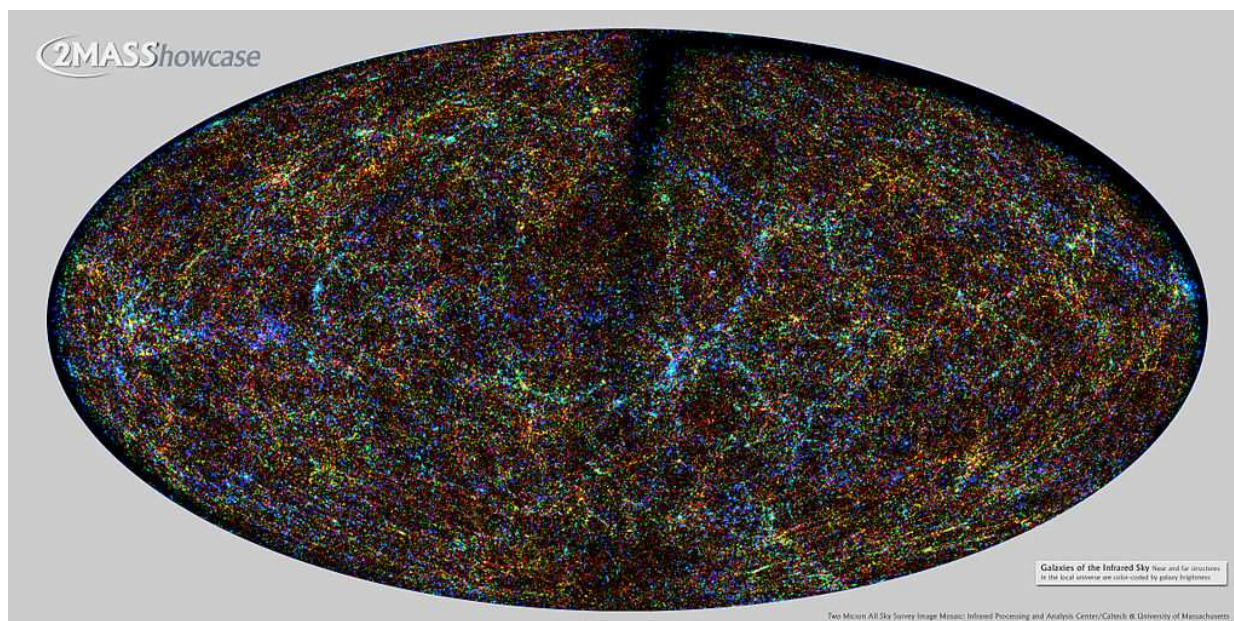


Рис. 3. Крупномасштабная структура Вселенной, как она выглядит в инфракрасных лучах с длиной волны 2,2 мкм – 1 600 000 галактик, зарегистрированных в Extended Source Catalog как результат Two Micron All-Sky Survey⁴. Яркость галактик показана цветом от синего (самые яркие) до красного (самые тусклые). Тёмная полоса по диагонали и краям картины – расположение Млечного Пути, пыль которого мешает наблюдениям.

Распределения галактик имеют сгустки и разрежения во всех масштабах. Последнее явилось в многочисленных публикациях основанием для качественного вывода о фрактальном пространственном распределении материи во Вселенной. Следует обратить внимание на тот факт, что значение фрактальной размерности d является различным для разных уровней. Фрактальная размерность для спиралевидных галактик составляет $d \approx 1,68$. Фрактальная размерность скопления галактик оценивается значением $d \approx 1,2$. Что касается фрактальной размерности сверхскоплений, то различные авторы представляют значения в диапазоне от $d \approx 1,3$ до $d \approx 2$. О фрактальности крупномасштабной структуры Вселенной свидетельствует также самоподобие пустот.

Галактики представляют собой системы массой $10^7 - 10^{12}$ масс Солнца, размером $10 - 10^2$ килопарсек (Кпс) и превышениями плотности до 10^5 раз над средней плотностью. Примерно половина всех галактик яв-

⁴ <http://www.ipac.caltech.edu/2mass>

ляется членами групп или скоплений. Группы состоят из нескольких десятков галактик, имеющих массу $10^{12} - 10^{14}$ масс Солнца, размеры $10^{-1} - 10$ Мпс с превышением их плотности над средней плотностью в 10^3 раз. Местная группа состоит примерно из 20 членов, из которых самыми крупными являются наша Галактика и Туманность Андромеды. Скопления представляют собой агломерации из нескольких тысяч галактик с массой порядка 10^{15} масс Солнца, размерами порядка 10 Мпс и превышением плотности над средней в 10^2 раз и более. Структура их неоднородна – с разрежениями и сгущениями. В одних случаях плотность галактик в центре мала, в других она распределена гладко и симметрично.

В настоящей работе абстрагируемся от вариативности значений фрактальной размерности для различных уровней и будем строить на базе единого системного подхода иерархическую математическую модель, отражающую фрактальную структуру Вселенной. Предлагаемая математическая модель крупномасштабной кластеризации материи во Вселенной базируется на математическом аппарате класса фрактальных и предфрактальных графов.

В геометрии фракталов существует понятие коэффициента подобия или, в другой терминологии, коэффициента масштабирования. В классе фрактальных графов коэффициент масштабирования определяется как отношение длины ребра ранга $l + 1$ к длине ребра ранга l . Однако, с точки зрения реальных ситуаций, о таком фиксированном масштабировании можно говорить лишь в случае построения крайне идеализированной модели.

Моделируемая реальная ситуация будет отражаться более адекватно, если значение коэффициента масштабирования выбирается из определенного интервала, соответствующего наблюдаемым процессам. Другой возможно более адекватный подход состоит в том, что длины ребер каждого

ранга выбираются из соответствующего интервала, причем интервалы, относящиеся к различным рангам, не пересекаются.

Предфрактальный граф, на котором базируется предполагаемая в настоящей работе интервальная модель крупномасштабной кластеризации материи во Вселенной, строится следующим образом. Множество затравок \mathbf{H} состоит из n_t -вершинных звёзд, $t = 1, 2, \dots, T$. Напомним, что звезда есть полный двудольный граф, в котором одна из долей состоит из единственной вершины. Значение параметров n_t определяются статистическими (возможно, гипотетическими) данными о количестве галактик в скоплениях, скоплениях в сверхскоплениях и так далее. В частности, элементом множества \mathbf{H} может быть 2-вершинная затравка-ребро. Пусть L – ранг моделируемой Метагалактики. Предполагаемая для нее математическая модель строится в виде траектории G_1, G_2, \dots, G_L , в которой G_1 представляет собой определённую затравку $H_1 \in \mathbf{H}$.

Затравка H_1 представляет собой n_1 -вершинную звезду, где n_1 – количество сверхскоплений, то есть скоплений, уровень которых предшествует уровню моделируемой Метагалактики. Иными словами, в число n_1 входят все те скопления галактик, включая одинокие галактики, которые не входят ни в какие скопления более высокого уровня, кроме рассматриваемой Метагалактики. Центру звезды-затравки H_1 ставится во взаимно-однозначное соответствие гравитационный центр этой Метагалактики.

Висячим вершинам $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_{n_0}; n_0 = n_1 - 1$ затравки H_1 во взаимно-однозначное соответствие ставятся вышеуказанные сверхскопления. С точки зрения морфологического описания Вселенной, затравку H_1 удобно называть термином *затравка Метагалактики*. Каждому ребру этой затравки приписывается длина, величина которой выбирается из интервала $[a_1, b_1]$, где значение $a_1 + b_1$ равно половине диаметра Метагалактики, дли-

на этого интервала не превосходит радиуса Метагалактики. Если говорить о содержательном смысле модели, то каждая висячая вершина затравки H_1 взаимно-однозначно соответствует гравитационному центру определённого сверхскопления.

С формальной математической точки зрения, если сверхскопления материи представляют собой одну галактику, то в этом случае соответствующая вершина блокируется, и не замещается затравкой при построении графов следующих рангов траектории G_1, G_2, \dots, G_L .

Текущий граф G_2 определяется следующим образом. Каждая висячая вершина графа $G_1 = H_1$ замещается определенной затравкой, которая соответствует содержательному смыслу *затравка сверхскоплений*. Подмножество всех таких затравок сверхскоплений из H обозначим через H_2 , подразумевая при этом, что H_1 состоит из единственного элемента H_1 – затравки Метагалактики. Рёбрам затравок H_2 приписываются длины из интервала $[a_2, b_2]$, где значение $a_2 + b_2$ равно половине диаметра сверхскопления и длина этого интервала не превосходит радиуса сверхскопления. Каждая висячая вершина какой-либо затравки, выбранной из H_2 , взаимно однозначно соответствует определённому скоплению, входящему в состав этого сверхскопления. При этом каждое старое ребро инцидентно, с одной стороны, центру затравки H_1 , и с другой стороны, центру затравки, которая заместила висячую вершину этого ребра. Заметим, что отношение длин ребер затравки Метагалактики к длине ребер затравок сверхскоплений имеет порядок величины коэффициента масштабирования $\eta \approx 50$. С формальной точки зрения, как и в предыдущем случае, скопления могут представлять собой одну галактику. В этом случае соответствующая вершина затравки блокируется, то есть эта вершина не замещается затравкой при построении текущих графов следующих рангов траекторий.

Текущий граф G_3 описывается следующим образом. Каждая вершина графа G_2 , кроме заблокированных, замещается определенной затравкой, которая соответствует содержательному смыслу термина *затравка скопления*. Подмножество всех таких затравок скоплений из H обозначим через H_3 . Так же, как и в предыдущем случае, ребрам затравок H_3 приписываются длины из интервала $[a_3, b_3]$, где значение $a_3 + b_3$ равно половине диаметра скопления и длина этого интервала не превосходит радиуса скопления. Каждая висячая вершина какой-либо затравки, выбранной из H_3 , взаимно однозначно соответствует определенной галактике, входящей в состав этого скопления. При этом каждое старое ребро инцидентно, с одной стороны, центру затравки из H_2 , и с другой стороны, центру затравки, которая заместила висячую вершину этого ребра. Аналогично порождению графа G_2 заметим, что отношение длин ребер затравок сверхскоплений к длине ребер затравок скоплений имеет порядок величины коэффициента масштабирования $\eta \approx 50$.

Представленная выше теоретико-графовая модель Вселенной характеризуется следующими параметрами: L – ранг предфрактального графа модели, который определяет собой $(L+1)$ иерархических уровней-образований (образование первого уровня – Метагалактика, образование второго уровня – сверхскопления, третьего – скопления, образование четвертого уровня – галактики); n_t – число вершин в затравке типа t ; η – коэффициент масштабирования для оценки отношения длин ребер соседних рангов; a_r, b_r – область или интервал, из которого принимают значения длин ребер r -ранга; $[\alpha_k, \beta_k]$ это интервал или область значений диаметров D_k иерархических образований k -го уровня, $k = \overline{1,4}$.

С целью формулировки некоторых выводов, вытекающих из этой фрактальной модели, отметим справедливость некоторых соотношений

для вышеуказанных параметров. С учётом гравитационных законов можно утверждать, что расстояние между парой образований одного и того же уровня по меньшей мере на порядок превосходит максимальный диаметр этих образований, то есть $(b_k - a_k) > 10(\beta_k - \alpha_k)$, $k = \overline{1,3}$.

Последнее утверждение означает, что минимальное расстояние между скоплениями по крайней мере на порядок превосходит максимальный диаметр скопления, а минимальное расстояние между сверхскоплениями на порядок превосходит максимальный диаметр сверхскопления.

В контексте вышесказанного можно анализировать задачу о существовании или отсутствии других Вселенных с точки зрения их наблюдаемости. Если наряду с нашей Вселенной существует другая Вселенная, то можно говорить о предфрактальном графе ранга $L = 4$ или, что то же самое, о пяти иерархических уровнях образований: галактики, скопления, сверхскопления, Метагалактики, Сверхвселенная. Этим образованиям соответствуют следующие интервалы значений их диаметров: $[\alpha_4, \beta_4]$, $[\alpha_3, \beta_3]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, $[\alpha_1, \beta_1]$. Тогда, если предположить, что для ранга $r = 1$ сохраняется прежний коэффициент масштабирования $\eta \approx 50$, расстояние от нашей Вселенной до ближайшей Метагалактики, по меньшей мере, на порядок превосходит диаметр нашей Вселенной, то есть расстояние ρ от нас до ближайшей Вселенной удовлетворяет неравенству: $\rho > 10\beta_1 \approx 10 \cdot 6500 \text{ Mpc} = 65 \cdot 10^3 \text{ Mpc}$.

Откуда вытекает, что свет от ближайшей Метагалактики до нашей Вселенной должен идти 195 миллиардов лет, то есть длительность прохождения этого света превосходит возраст нашей Галактики почти в 10 раз.

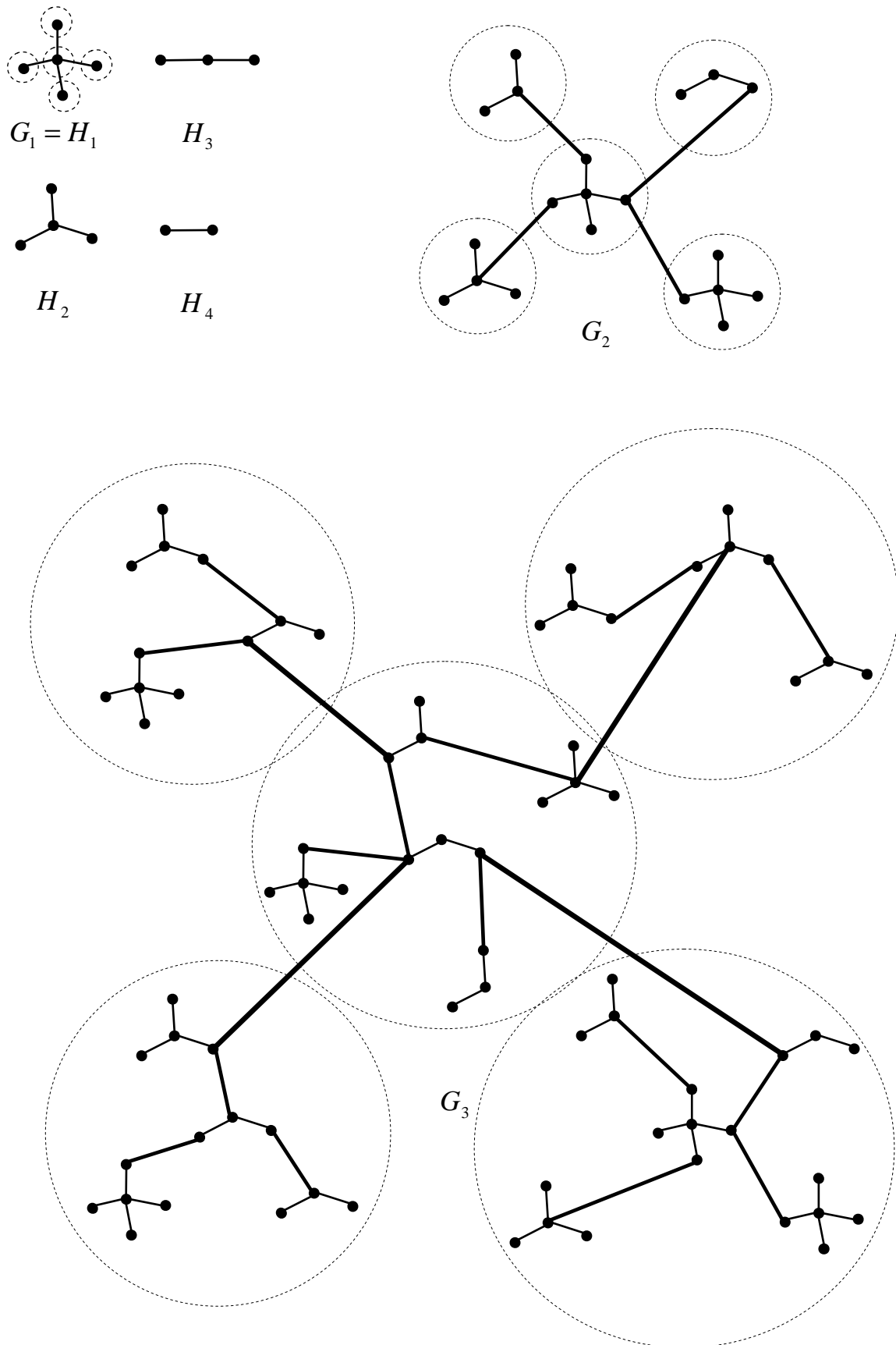


Рис. 4. Траектория предфрактального графа G_3 , порождённого множеством затравок H .

На рис. 4 изображена траектория предфрактального графа G_3 , порожденного множеством затравок $H = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$, при сохранении смежности старых ребер. Затравка H_1 – 5-вершинная звезда, H_2 – 4-вершинная звезда, H_3 – цепь длиной в два ребра, H_4 – ребро.

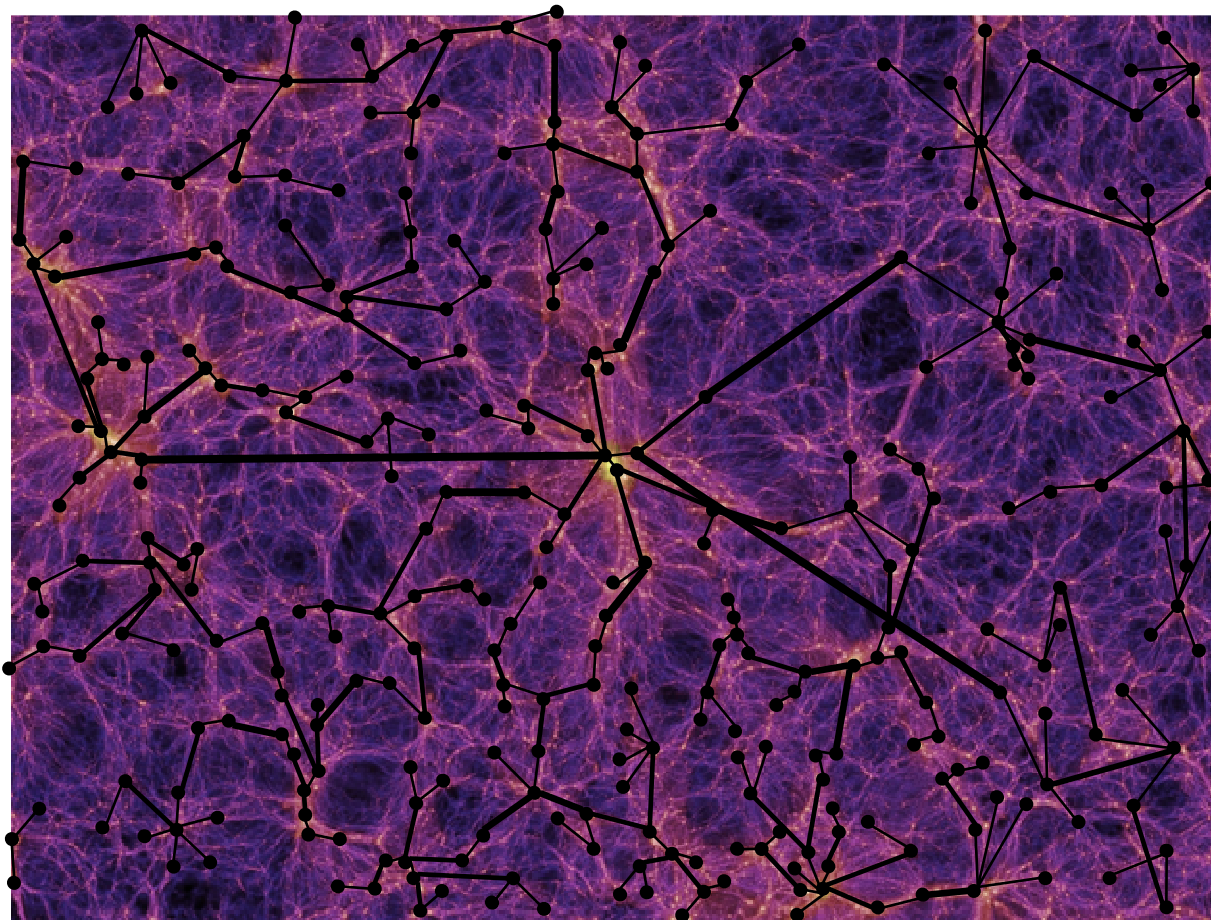


Рис. 5. Распознавание предфрактального графа G_4 , порожденного множеством затравок-звезд H .

Обратной задачей построению предфрактального графа является задача распознавания предфрактального графа. Не претендуя на точные результаты в смысле астрофизического подхода, на рис. 5 применена процедура распознавания предфрактального графа произвольно выбранной области Метагалактики. Получен предфрактальный граф G_4 , порожденный множеством затравок-звезд H . Ребра ранга 1 соответствуют связям на уровне сверхскоплений галактик, ранга 2 – скоплений галактик, ранга 3 и 4 соответственно групп галактик и подгрупп или крупных звездных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stephen D. Landy Mapping the Universe // Scientific American June 1999
2. Bahcall, Neta A. (1988). «Large-scale structure in the universe indicated by galaxy clusters». Annual review of astronomy and astrophysics 26: 631–686. 3. M. J. Geller & J. P. Huchra, Science 246, 897 (1989).
3. Tully, R. B. (1986-04-01). «Alignment of clusters and galaxies on scales up to 0.1 C». The Astrophysical Journal 303: 25–38.
4. Стивен Вайнберг. Космология. – М.: УРСС, 2013. – 608 с.
5. Makarov, Dmitry; Makarova, Lidia; Rizzi, Luca etc. Tip of the Red Giant Branch Distances. I. Optimization of a Maximum Likelihood Algorithm. – The Astronomical Journal, 2006
6. А. В. Засов, К. А. Постнов. Общая астрофизика. – М.: ВЕК 2, 2006. – 496 с.
7. Куликовский П.Г. Звездная астрономия. М.: Наука, 1985.
8. Холопов П.Н. Звездные скопления. М.: Наука, 1981.
9. Feast M.W. The Galaxy / Ed. G. Gilmore, B. Carswell. Dordrecht: Reidel, 1987. P. 25.
10. Клыпин А.А., Сурдин В.Г. Крупномасштабная структура Вселенной. М., Знание, 1981
11. Новиков И.Д. Эволюция Вселенной, 3-е издание. М., Наука, 1990
12. Ефремов Ю.Н. Вглубь Вселенной. М., УРСС, 2003
13. Макаров Д.И. Распределение галактик в Местной Вселенной. <http://www.astronet.ru/db/msg/1169719>
14. М. В. Сажин. Современная космология в популярном изложении. – М.: УРСС, 2002. – С. 144. – 240 с.
15. Павлов Д. А. Особенности многокритериальной оптимизации на предфрактальных графах: задача покрытия простыми цепями : монография / Д. А. Павлов. – Краснодар : КубГАУ, 2016. – 122 с.
16. Павлов Д. А. Многокритериальная задача поиска оптимальных путей в крупномасштабной транспортной системе / Павлов Д. А., Лихобабин Е. Г. // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №09(113). – IDA [articleID]: 1131509046. – Режим доступа:<http://ej.kubagro.ru/2015/09/pdf/46.pdf>, 1,125 у.п.л.
17. Павлов Д. А. Мера сходства предфрактальных графов / Д. А. Павлов // Параллельная компьютерная алгебра и её приложения в новых инфокоммуникационных системах: сб. тр. межд. конф. - Ставрополь : СКФУ, 2014. – С. 81–86.
18. Павлов Д.А. Моделирование транспортной сети на предфрактальных графах / Д.А. Павлов, Е.Г. Лихобабин // ГЛОБАЛИЗАЦИЯ НАУКИ: ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ: сб. статей Межд. науч.-практ. конф. – Уфа: РИО МЦИИ ОМЕГА САЙНС, 2015. – С. 3-6.

References

1. Stephen D. Landy Mapping the Universe // Scientific American June 1999
2. Bahcall, Neta A. (1988). «Large-scale structure in the universe indicated by galaxy clusters». Annual review of astronomy and astrophysics 26: 631–686. 3. M. J. Geller & J. P. Huchra, Science 246, 897 (1989).
3. Tully, R. B. (1986-04-01). «Alignment of clusters and galaxies on scales up to 0.1 C». The Astrophysical Journal 303: 25–38.

4. Stiven Vajnberg. Kosmologija. – M.: URSS, 2013. – 608 s.
5. Makarov, Dmitry; Makarova, Lidia; Rizzi, Luca etc. Tip of the Red Giant Branch Distances. I. Optimization of a Maximum Likelihood Algorithm. – The Astronomical Journal, 2006
6. A. V. Zasov, K. A. Postnov. Obshhaja astrofizika. – M.: VEK 2, 2006. – 496 s.
7. Kulikovskij P.G. Zvezdnaja astronomija. M.: Nauka, 1985.
8. Holopov P.N. Zvezdnye skoplenija. M.: Nauka, 1981.
9. Feast M.W. The Galaxy / Ed. G. Gilmore, B. Carswell. Dordrecht: Reidel, 1987. P. 25.
10. Klypin A.A., Surdin V.G. Krupnomasshtabnaja struktura Vselennoj. M., Znanie, 1981
11. Novikov I.D. Jevoljucija Vselennoj, 3-e izdanie. M., Nauka, 1990
12. Efremov Ju.N. Vglub' Vselennoj. M., URSS, 2003
13. Makarov D.I. Raspredelenie galaktik v Mestnoj Vselennoj. <http://www.astronet.ru/db/msg/1169719>
14. M. V. Sazhin. Sovremennaja kosmologija v populjarnom izlozhenii. – M.: URSS, 2002. – S. 144. – 240 s.
15. Pavlov D. A. Osobennosti mnogokriterial'noj optimizacii na predfraktal'nyh grafah: zadacha pokrytija prostymi cepjami : monografija / D. A. Pavlov. – Krasnodar : KubGAU, 2016. – 122 s.
16. Pavlov D. A. Mnogokriterial'naja zadacha poiska optimal'nyh putej v krupnomasshtabnoj transportnoj sisteme / Pavlov D. A., Lihobabin E. G. // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №09(113). – IDA [articleID]: 1131509046. – Rezhim dostupa:<http://ej.kubagro.ru/2015/09/pdf/46.pdf>, 1,125 u.p.l.
17. Pavlov D. A. Mera shodstva predfraktal'nyh grafov / D. A. Pavlov // Parallelnaja komp'juternaja algebra i ejo prilozhenija v novyh infokommunikacionnyh sistemah: sb. tr. mezhd. konf. - Stavropol' : SKFU, 2014. – S. 81–86.
18. Pavlov D.A. Modelirovanie transportnoj seti na predfraktal'nyh grafah / D.A. Pavlov, E.G. Lihobabin // GLOBALIZACIJA NAUKI: PROBLEMY I PERSPEKTIVY: sb. statej Mezhd. nauch.-prakt. konf. – Ufa: RIO MCII OMEGA SAJNS, 2015. – S. 3-6.