УДК 515.1+530.1

01.00.00 Физико-математические науки

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И СУПЕРГРАВИТАЦИЯ В 112D

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D., директор
Scopus Author ID: 6603801161
SPIN-код автора: 4945-6530
A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

В работе исследована проблема построения единой теории поля на основе теории супергравитации в 112D. Предполагается, что в 112-мерном римановом пространстве сосуществуют 37 трехмерных миров обладающих единым временем и связанных гравитацией. Исследована центрально-симметрическая метрика, зависящая от радиальной координаты в наблюдаемом физическом пространстве одного из миров. Предполагается, что в 112D выполняется волновое уравнение общего вида, описывающее динамику скалярного поля. Из этого уравнения выводится волновое уравнение в четырехмерном пространстве-времени, содержащее слагаемые, описывающие вклад дополнительных измерений. Показано, что квантовые числа задачи на собственные значения позволяют описывать структуру атома и атомного ядра в предположении, что задана полная масса центрального тела. Исследована задача о динамике скалярного поля в 112D в центрально-симметрической метрике. Построена теория квантования поля, как в общем случае, так и в частном случае зависимости метрики от эллиптической функции Вейерштрасса. Показано, что в этом случае существуют ограниченные периодические потенциалы и соответствующие периодические решения, зависящие от энергии, проекции углового момента и от инвариантов функции Вейерштрасса. Установлено, что в возбужденном состоянии с достаточно большой величиной проекции углового момента радиальная часть волновой функции является периодической в ограниченном интервале, тогда как в основном состоянии допускаются волны на все оси радиальной координаты. Обсуждается связь полученных решений с теорий Янга-Миллса

Ключевые слова: ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, СУПЕРГРАВИТАЦИЯ

UDC 515.1+530.1

Physics and mathematics

THE UNIFIED FIELD THEORY AND SUPERGRAVITY IN 112D

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D., C.E.O.
Scopus Author ID: 6603801161

A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

In the paper the problem of constructing a unified field theory based on the theory of supergravity in the 112D is discussed. It is assumed that in the 112-dimensional Riemann space there are 37 three-dimensional worlds coexist having a single time and associated gravity. Investigated centrally symmetric metric depends on the radial coordinate in the observable physical space of one of the worlds. It is assumed that in the 112D performed the wave equation of the general form, describing the dynamics of the scalar field. From this equation, the wave equation is displayed in the four-dimensional space-time, containing terms describing the contribution of extra dimensions. It is shown that the quantum numbers of the problem allow us to describe the structure of the atom and the atomic nucleus on the assumption that given the total mass of the central body. The problem on the dynamics of the scalar field in the 112D in a centrally symmetric metric has been described. Built of field quantization theory in general, and in the particular case of metrics depending on the Weierstrass elliptic functions. It is shown that in this case there are bounded periodic potentials and corresponding periodic solutions that depend on the energy and angular momentum projection, and on the invariants of the Weierstrass function. It is found that in an excited state with a sufficiently large magnitude of the angular momentum of the projection portion of the radial wave function is periodic in a limited range, while the ground state allowed waves on all axes of the radial coordinate. The connection of the solutions to the Yang-Mills theories discussed.

Keywords: GENERAL RELATIVITY, SUPERGRAVITY

Введение

Создание единой теории поля является одной из задач современной физики [1-4]. Первую теорию, объединяющую электромагнетизм и гравитацию, предложил Риман [5]. Он предполагал, что пространство наполнено тонкой материей, которая непрерывно устремляется в атомы и там исчезает из осязаемого мира. При этом весомые тела, состоящие из атомов, являются местом соприкосновения осязаемого и неосязаемого миров [5-6].

В общей теории относительности возникла проблема объединения метрической теории гравитации Эйнштейна с теорией Максвелла. Как оказалось, наиболее просто такое объединение достигается в 5-мерном пространстве-времени [7-11]. В современных теориях супергравитации число измерений пространства-времени еще не установлено, а широко используемые теории сформулированы в пространствах 5, 10 или 11 измерений [4, 12-13].

В [14] рассматривается геометрия риманова 112-мерного пространства с общим гравитационным полем. Показано, что физические законы во всех мирах отображают единое движение, охватывающее маркеры движения в форме элементарных частиц и атомов в 112-мерном пространстве.

В работе [15] обсуждается вариант метрической теории взаимодействий, в которой предполагается, что физические константы обусловлены наличием дополнительных измерений пространства-времени. Дана оценка числа физических констант на основе теории супергравитации в 112D.

В [16-20] рассматривается задача об энергии связи нуклонов и электронов в атомах, как приложение единой теории поля в 5D [11]. Показано, что описание электромагнитных, гравитационных, атомных и ядерных процессов можно осуществить в рамках одной теории. В настоящей работе рассматривается вариант единой теории поля, в котором дано обобщение единой теории поля в 5D [11], в 6D [6] и в многомерных пространствах с произвольной размерностью [21-22] на пространство 112D.

Гравитация в 112D

Рассмотрим обобщение уравнений Эйнштейна для пустого пространства на случай произвольного числа измерений [14, 21-22]:

$$\begin{aligned} & R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \\ & \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(k - \Lambda) \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь k – некоторая функция, зависящая от размерности пространства, $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

Отметим, что первым уравнением (1) определяется метрика пространства-времени, а вторым уравнением задается распределение материи, которое соответствует этой метрике. Эта гипотеза согласуется с теорией происхождения материи из гравитационного поля [23-24], но без специального предположения о наличии сингулярности метрики.

В общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & R_{ik} = R^j_{ijk}, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\ & R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\mu_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\mu\delta}, \\ & \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

$R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ - тензор Римана, Γ^i_{kl} – символы Кристоффеля второго рода.

Отметим, что в модели (1) сохраняются все результаты, связанные с определением, так называемых пространств Эйнштейна [25], поскольку соответствующие метрики являются решением первого уравнения (1).

В метрической теории существует два основных типа законов физики. Первый тип законов вытекает из равенства нулю ковариантной производной метрического тензора:

$$Dg_{ik} = 0 \rightarrow \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = 0 \tag{3}$$

В стандартной теории поля [25-26] из уравнений (3) выводится связь символов Кристоффеля с метрическим тензором в форме

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)$$

Дальнейшее развитие теории строится на определении тензора кривизны и тензора Риччи в соответствии с выражениями (2). Заметим, что в общей теории относительности предполагается, что тензор энергии импульса материи связан с тензором Эйнштейна уравнением Эйнштейна [25-26].

Однако уравнения (3) также являются фундаментальными, если их рассматривать при заданных функциях Γ^i_{kl}. Действительно, в этом случае можно определить и метрический тензор, интегрируя уравнения (3), и тензор Римана, используя выражения (2), и тензор энергии-импульса материи на основе уравнения Эйнштейна.

Второй тип законов вытекает из равенства нулю ковариантной производной скорости,

$$Du^i = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \tag{4}$$

Отметим, что совокупность законов физики в форме (3)-(4) при заданных функциях Γ^i_{kl} полностью описывает динамику полей и частиц в многомерных пространствах.

Центрально-симметрические метрики

В работах [21-22] представлена модель гравитации в многомерных пространствах размерностью D с метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 = \psi(t,r)dt^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1^{\ 2} - \sin^2\phi_1 d\phi_2^{\ 2} - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 d\phi_3^{\ 2} - \\ \ldots - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 \ldots \sin^2\phi_{N-1} d\phi_N^{\ 2} \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$ - углы на единичной сфере, погруженной в $D-1$ мерное пространство. Метрика (5) описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике элементарных частиц и в теории супергравитации. Например, 3-х сфера используется для представления $\mathrm{Sp}(1) \cong \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)$ симметрии; 5-сфера описывает $\mathrm{SO}(6)/\mathrm{SO}(5) = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2)$ и т.п. Такой подход позволяет охватить все многообразие материи, которую производит фабрика природы, путем выбора уравнения состояния $p = p(\psi)$.

Уравнения поля в метрике (5) сводятся к одному уравнению второго порядка [21-22]

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -Kp\psi - \frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi}\psi_t^{\ 2} + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \tag{6}$$

В общем случае параметры модели и скалярная кривизна зависят только от размерности пространства, имеем

$$\begin{aligned} &k = D(D-5)/2 + 3, \\ &K = 2(D-3), \\ &R = -D^2 + 3D \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (5) имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_1}\right)^2 - \sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_2}\right)^2 - \\ &\sin^{-2}\phi_1 \sin^{-2}\phi_2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_3}\right)^2 - \ldots - \sin^{-2}\phi_1 \sin^{-2}\phi_2 \ldots \sin^{-2}\phi_{N-1}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_N}\right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнение (8) можно проинтегрировать при некоторых предположениях, используя метод, рассмотренный в работах [21-22].

В шестимерном пространстве с сигнатурой метрики $(+,+,+,-,-,-)$ можно построить естественное обобщение метрики (5) на случай наличия двух центров симметрии в виде [6]

$$ds^2 = \psi(t,r)dt^2 + d\chi_1^{\ 2} + \sin^2\chi_1 d\chi_2^{\ 2} - p(\psi)dr^2 - d\phi_1^{\ 2} - \sin^2\phi_1 d\phi_2^{\ 2} \tag{9}$$

Здесь $\chi_1, \chi_2, \phi_1, \phi_2$ - углы на единичных сферах, погруженных в трехмерные пространства; t, r - координаты, связанные со временем и расстоянием соответственно.

Рассмотрим гравитацию в пространствах с метрикой (9). Заметим, что только четыре компоненты тензора Эйнштейна в метрике (9) отличны от нуля:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = G_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\chi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin^2\phi_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Следовательно, в этом случае в первом уравнении (1) следует положить $k = 0$, тогда уравнения поля в метрике (9) сводятся к одному уравнению второго порядка $G_{22} = 0$. Отсюда находим

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -\frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi}\psi_t^{\ 2} + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \tag{11}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (11) имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \chi_1}\right)^2 + \sin^{-2}\chi_1\left(\frac{\partial S}{\partial \chi_2}\right)^2 \\ -\frac{1}{p}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_1}\right)^2 - \sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_2}\right)^2 = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

Уравнение (12) можно проинтегрировать при некоторых предположениях, используя метод, который предложил Шредингер. Суть метода состоит в том, чтобы представить решение уравнения (12) в виде

$$S = S_{cl} + \hbar \ln \Psi_S \tag{13}$$

Здесь в теорию в явном виде вводится классическое действие - S_{cl}, постоянная Планка и волновая функция Ψ_S. В случае метрики (9) удобно будет выбрать в качестве переменных квантовой механики углы на единичных сферах, а в качестве координат классического действия – время и радиальную координату. Тогда уравнение (12) разделяется на два уравнения

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r}\right)^2 = M^2 \\
\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_1}\right)^2 + \sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \chi_1}\right)^2 - \sin^{-2}\chi_1\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \chi_2}\right)^2 = \frac{M^2}{\hbar^2}\Psi_S^2
\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь M – произвольная постоянная. Рассмотрим волновые решения второго уравнения (14), зависящие от четырех переменных

$$\Psi_s = \Psi_1(f(\phi_1) + \phi_2)\Psi_2(g(\chi_1) + \chi_2) \tag{15}$$

Подставляя выражение (15) во второе уравнение (14) и разделяя переменные, находим

$$\begin{gathered}
(1+\sin^{-2}\phi_1)\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_1}\right)^2 \frac{(\Psi_1')^2}{\Psi_1^2} = k_1^2, \quad (1+\sin^{-2}\chi_1)\left(\frac{\partial g}{\partial \chi_1}\right)^2 \frac{(\Psi_2')^2}{\Psi_2^2} = k_2^2, \\
(1+\sin^{-2}\phi_1)\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_1}\right)^2 = n_1^2, \quad (1+\sin^{-2}\chi_1)\left(\frac{\partial g}{\partial \chi_1}\right)^2 = n_2^2 \\
k_1^2 - k_2^2 = \frac{M^2}{\hbar^2}
\end{gathered} \tag{16}$$

Разрешая систему уравнений (16), получим окончательно

$$\begin{gathered}
\Psi_1 = \Psi_{10}\exp[(k_1/n_1)(f(\phi_1) + \phi_2)], \\
f = f_0 \pm n_1 i \ln\left(i\sqrt{2}\cos\phi_1 + \sqrt{3-\cos(2\phi_1)}\right) \\
\Psi_2 = \Psi_{20}\exp[(k_2/n_2)(g(\chi_1) + \chi_2)], \\
g = g_0 \pm n_2 i \ln\left(i\sqrt{2}\cos\chi_1 + \sqrt{3-\cos(2\chi_1)}\right)
\end{gathered} \tag{17}$$

Здесь $\Psi_{i0}, k_i, n_i, f_0, g_0$ - произвольные постоянные. Функция Гамильтона-Якоби системы согласно (13) равна

$$S = S_{cl} + \hbar(k_1 / n_1)(f(\phi_1) + \phi_2) + \hbar(k_2 / n_2)(g(\chi_1) + \chi_2) \qquad (18)$$

Отметим, что функция Гамильтона-Якоби является аналогом функции, описывающей волновой фронт в геометрической оптике. Периодическая зависимость функции (18) от двух переменных означает, что здесь мы имеем дело с особого рода волновым движением, охватывающим две сферы. При отображении в трехмерных мирах эти волны имеют вид раковин различной конфигурации [6].

Динамика частиц на гиперсфере

Заметим, что движение частиц в метрике (5) разделяется на радиальное движение и движение на сфере, которое в общем случае можно исследовать независимо от радиального движения. Будем предполагать, что существуют такие частицы, которые движутся в римановом пространстве в метрике (5) с числом углов $N = 110$. Возникает вопрос, как эти частицы могут быть идентифицированы в нашем пространстве? Для ответа на этот вопрос следует установить, какие углы из 110 принадлежать нашему миру и как много углов одновременно могут повлиять на два выбранных угла.

Как известно, движение массивных частиц в гравитационном поле в общем случае описывается уравнением (4). Пронумеруем координаты метрики (5) следующим образом

$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N, x_{N+1}, x_{N+2}$.

Система уравнений (4) в метрике (5) имеет вид [14]

$$\frac{d^2\phi_i}{ds^2} + 2\frac{d\phi_i}{ds}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{d\phi_j}{dt}\cot\phi_j - \cos\phi_i \sin\phi_i \sum_{j=i+1}^{N}\frac{d\phi_j}{ds}\frac{d\phi_j}{ds}\prod_{k=i+1}^{j-1}\sin^2\phi_k = 0,\ i = 1,..., N. \qquad (19)$$

Отметим, что в силу уравнений (19) все углы связаны между собой. Поэтому движение вдоль каждого угла может влиять на динамику всей системы. Это влияние является особенно сильным в окрестности полюсов системы, где $\phi_i \to 0, \pi$, при этом $\cot\phi_i \to \pm\infty$.

Однако система уравнений (19) зависит от начальных данных, поэтому если в начальный момент времени положить, например, $\phi_2(0) = \pi/2, \dot{\phi}_2(0) = 0$, то во все последующие моменты времени имеем $\phi_2(t) = \pi/2, \dot{\phi}_2(t) = 0$. Но тогда, согласно (19), угол ϕ_2 выпадает из системы, а порядок системы понижается.

Используя это свойство системы уравнений (19) можно исследовать динамику некоторой подсистемы меньшего размера. В работе [14] исследованы подсистемы с числом угловых координат $N = 5;8;38;71$, которые описывают взаимное влияние 2, 3, 13 и 24 миров соответственно.

В общем случае, согласно (4), движение в пространстве зависит от функций Γ^i_{kl} – символов Кристоффеля второго рода. Чтобы отобразить движение в многомерных пространствах в рамках четырехмерного пространства-времени необходимо осуществить компактификацию. В многомерной теории гравитации компактификация достигается путем задания условия периодичности (цилиндричности) по одной или нескольким координатам [7-11, 15, 27-29].

Структура атома в 5D

В пятимерном пространстве можно построить не только теорию поля, объединяющую электромагнитное и гравитационное взаимодействия [7-11], но и теорию атома и атомного ядра [16-18].

Можно заметить, что периодический закон в оригинальной формулировке Менделеева является локальным, так как связывает свойства простых веществ с их атомным весом, который в то время, когда был сформулирован закон, определялся путем взвешивания в гравитационном поле земли. Такое соотнесение свойств веществ с их гравитационными свойствами представляется разумным. Для ответа на вопрос о фундаментальных причинах, обуславливающих наличие закона периодичности в природе, рассмотрим общую модель атомных ядер и атомов вещества [16-18]. В этой модели свойства вещества определяются параметрами метрического тензора в 5-мерном пространстве, которые зависят от комбинации заряда и гравитационных свойств центрального ядра в виде [11]

$$k = 2\gamma M_A^3 c^2 / Q^4, \quad \varepsilon^2 / k = 2\gamma M_A / c^2 \tag{20}$$

Здесь γ, c, Q - гравитационная постоянная, скорость света и заряд ядра соответственно. Относительно природы заряда будет предполагать, что исходный заряд является электрическим. В случае протона и электрона параметры метрического тензора представлены в таблице 1.

Отметим, что максимальный масштаб $r_{\max} = 1/k$ в случае электрона превосходит размер наблюдаемой Вселенной, тогда как для протонов этот масштаб составляет около 100 световых лет. Минимальный же масштаб соответствует классическому радиусу заряженной частицы $r_{\min} = \varepsilon / k = e^2 / mc^2$, который в случае протона и электрона соизмерим с масштабом слабых и ядерных взаимодействий.

Таблица 1. Параметры метрического тензора, вычисленные для электрона и протона

	k, 1/м	ε	r_{max}, м	r_{min}, м
e-	1,703163E-28	4,799488E-43	5,87E+27	2,81799E-15
p+	1,054395E-18	1,618178E-36	9,48E+17	1,5347E-18

Легко видеть, что второй параметр (20) непосредственно входит в оригинальную формулу периодического закона Менделеева. Комбинируя параметры, находим заряд ядра в виде $Q = \varepsilon^{3/2} c^2 / k\sqrt{2\gamma}$. Следовательно, периодический закон в современной его формулировке также можно выразить через параметры метрического тензора.

Метрический тензор можно разложить в ряд вблизи массивного центра гравитации в 5-мерном пространстве по степеням безразмерного расстояния до источника, $\tilde{r} = kr$, здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Рассмотрим вид метрического тензора, возникающего при удержании первых трех членов разложения для случая метрики в поле центральных сил с гравитационным потенциалом в форме Ньютона. Такой выбор метрики представляется оправданным, прежде всего, потому, что для указанного потенциала выполняется принцип суперпозиции. Положим $x^1 = ct\,, x^2 = x\,, x^3 = y\,, x^4 = z$, в этих обозначениях имеем для квадрата интервала в 4-мерном пространстве:

$$
\begin{aligned}
&ds^2 = (1+2\varphi/c^2)c^2dt^2 - (1-2\varphi/c^2)(dx^2+dy^2+dz^2)\\
&\varphi = -\frac{\gamma M}{r}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Полагая, что $\varepsilon^2/k = 2\gamma M/c^2$, приходим к выражению интервала в зависимости от параметров метрики в 5-мерном пространстве:

$$
ds^2 = (1-\varepsilon^2/k)c^2dt^2 - (1+\varepsilon^2/k)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{22}
$$

Далее заметим, что в этом случае метрический тензор в четырехмерном пространстве является диагональным с компонентами

$$
g_{11} = 1-\varepsilon^2/kr; \quad g_{22} = g_{33} = g_{44} = -(1+\varepsilon^2/kr) \tag{23}
$$

Зададим векторный потенциал источника, связанного с центром гравитации в виде

$$
g_1 = \varepsilon/kr, \quad \mathbf{g} = g_1\mathbf{u} \tag{24}
$$

Здесь $\mathbf{u}$ – некоторый вектор в трехмерном пространстве, который определим ниже. Отсюда находим скалярный и векторный потенциал электромагнитного поля

$$
\varphi_e = \frac{Q}{r} = \frac{Mc^2}{e}\frac{\varepsilon}{kr}, \quad \mathbf{A} = \varphi_{\mathbf{e}}\mathbf{u} \tag{25}
$$

Для описания движения материи с учетом ее волновых свойств, предположим, что стандартное уравнение Гамильтона-Якоби в релятивистской механике и уравнение типа Клейна-Гордона в квантовой механике возникают как следствие выполнения волнового уравнения в 5-

мерном пространстве [11]. Это уравнение в общем случае можно записать в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{-G}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-G}G^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Phi\right)=0 \quad (26)$$

Здесь Φ - волновая функция, описывающая, согласно (26), скалярное поле в пятимерном пространстве, G^{ik} - контравариантный метрический тензор,

$$G^{ik}=\eta^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & -g^1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & -g^2 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & -g^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & -g^4 \\ -g^1 & -g^2 & -g^3 & -g^4 & \lambda \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\lambda_1=(1-\varepsilon^2/kr)^{-1}; \quad \lambda_2=-(1+\varepsilon^2/kr)^{-1}$$
$$g^1=\lambda_1 g_1,\ g^2=\lambda_2 g_2,\ g^3=\lambda_2 g_3,\ g^4=\lambda_2 g_4$$
$$\lambda=1+\lambda_1 g_1^2+\lambda_2(g_2^2+g_3^2+g_4^2); \quad G=\eta^5/(ab^3); \quad \eta=(kr)^2 .$$

Далее заметим, что в исследуемой метрике, зависящей только от радиальной координаты, выполняется следующее соотношение

$$F^{\mu}=\eta\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-G}G^{\mu\nu}\right)=\eta\frac{\partial r}{\partial x^{\mu}}\frac{d}{dr}\left(\sqrt{-G}G^{\mu\nu}\right) \quad (28)$$

С учетом выражений (27) и (28) запишем волновое уравнение (26) в виде

$$\frac{\lambda_1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-|\lambda_2|\nabla^2\Phi+\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}-2g^i\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i\partial\rho}+F^{\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^{\mu}}=0 \quad (29)$$

Отметим, что последнее слагаемое в уравнении (29) имеет порядок $\eta^2 k=k^5 r^4 \ll 1$. Следовательно, это слагаемое можно отбросить в задачах, характерный масштаб которых значительно меньше, чем максимальный масштаб из таблицы 1. Уравнение (29) примечательно тем, что оно не содержит каких-либо параметров, характеризующих скалярное поле. Поле приобретает массу и заряд, не только электрический, но и сильный, в процессе взаимодействия с центральным телом, что обусловлено только метрикой 5-мерного пространства [11, 16-18].

Рассмотрим задачу о движении материи вокруг заряженного центра гравитации, обладающего электрическим и сильным зарядом, например, вокруг протона. В процессе решения этой задачи необходимо определить инерционную массу материи и энергию связи. Поскольку уравнение (29) является линейным и однородным, такую задачу можно решить в общем случае.

Введем полярную систему координат (r, ϕ, z) с осью z направленной вдоль векторного потенциала (24), положим в уравнении (29)

$$\Phi = \Psi(r)\exp(il\phi + ik_z z - i\omega t - ik_\rho \rho) \tag{30}$$

Разделяя переменные, находим, что радиальное распределение материи описывается следующим уравнением (здесь отброшено, в силу его малости, последнее слагаемое в уравнении (29)):

$$-\frac{\lambda_1\omega^2}{c^2}\Psi - |\lambda_2|\left(\Psi_{rr} + \frac{1}{r}\Psi_r - \frac{l^2}{r^2}\psi - k_z^2\psi\right) - \lambda k_\rho^2\Psi + 2g^1c^{-1}\omega k_\rho\Psi - 2g^z k_z k_\rho\Psi = 0 \tag{31}$$

Рассмотрим решения уравнение (31) в том случае, когда можно пренебречь влиянием гравитации, т.е. $\lambda_1 \approx -\lambda_2 \approx 1$, но $\lambda = 1 + g_1^2(1-u^2) \neq 1$. При этих условиях уравнение (31) приводится к виду

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\Psi - \left(\Psi_{rr} + \frac{1}{r}\Psi_r - \frac{l^2}{r^2}\Psi - k_z^2\psi\right) - \lambda k_\rho^2\Psi + 2g^1c^{-1}\omega k_\rho\Psi - 2g^z k_z k_\rho\Psi = 0 \tag{32}$$

В общем случае решение уравнения (32) можно представить в форме степенного ряда

$$\Psi = \frac{\exp(-\tilde{r})}{\tilde{r}^{a}}\sum_{j=0}^{n} c_j \tilde{r}^{j} \tag{33}$$

Здесь обозначено $\tilde{r} = r / r_n$. Подставляя выражение (33) в уравнение (32), находим

$$
\begin{aligned}
&(a^2 - l^2 + \kappa_u)\sum_{j=0}^{n} c_j \tilde{r}^{\,j-2} + (2a - 1 + \kappa_g r_n)\sum_{j=0}^{n} c_j \tilde{r}^{\,j-1} + \\
&(1 - k_z^2 r_n^2 + K^2 r_n^2)\sum_{j=0}^{n} c_j \tilde{r}^{\,j} - \sum_{j=0}^{n} j c_j \tilde{r}^{\,j-1} - 2a\sum_{j=0}^{n} j c_j \tilde{r}^{\,j-2} + \\
&\sum_{j=0}^{n} c_j\, j(j-1)\tilde{r}^{\,j-2} = 0
\end{aligned} \tag{34}
$$

$\kappa_u = (1-u^2)k_\rho^2\varepsilon^2/k^2$, $K^2 = k_\rho^2 + \omega^2/c^2$, $\kappa_g = -2\varepsilon k_\rho (k_z u_z + \omega/c)/k > 0$.

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\tilde{r} = r/r_n$, получим уравнения, связывающие параметры модели в случае возбужденных состояний

$$a = \sqrt{l^2 - \kappa_u}, \quad r_n = \frac{n+1-2a}{\kappa_g}, \quad \frac{1}{r_n^2} - k_z^2 + k_\rho^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \tag{35}$$

Второе уравнение (35) выполняется лишь для таких значений показателя степени, для которых справедливо неравенство $2a < n+1$. Отсюда находим уравнение для определения уровней энергии

$$\frac{4\varepsilon^2 k_\rho^2}{k^2(n+1-2a)^2}\left(k_z u_z + \frac{\omega}{c}\right)^2 - k_z^2 + k_\rho^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \tag{36}$$

Уравнение (36) было использовано для моделирования энергии связи нуклонов в ядрах для всей совокупности известных нуклидов [16-18]. Отметим, что в модели [16-18] ядро состоит из «чистых» протонов, взаимодействующих со скалярным полем. Часть «чистых» протонов экранируется, образуя N нейтронов, в результате возникает атом, состоящий из электронной оболочки и ядра с электрическим зарядом eZ, числом нуклонов $A = Z + N$ и массой $\Delta M = A(m_p + m_e) - E_{bp}/c^2$, где E_{bp}- энергия связи нуклонов в ядре, вычисляемая по общему числу нуклонов, обладающих суммарной массой электрона и протона.

Такой способ выражения энергии связи не является существенным, поэтому можно ограничиться и стандартным выражением превышения массы в атомных единицах. Поскольку в этой задаче фигурирует два типа зарядов – скалярный и векторный, эффект экранирования проявляется не только в отношении скалярного заряда (что приводит к образованию нейтронов), но и в отношении векторного заряда, что приводит к образованию нуклонов.

Следует заметить, что исходная метрика в пятимерном пространстве определяется метрическим тензором, который зависит только от параметров центрального тела, т.е. от суммарного заряда и суммарной массы нуклонов. В зависимости от комбинации заряда и массы в ядре могут образоваться различные оболочки:

1) нуклонная оболочка, в которой все заряды экранированы, следовательно $\varepsilon / k == A^2 e^2 / A m_p c^2 = A e^2 / m_p c^2$;
2) нейтронная оболочка, в которой $\varepsilon / k = N e^2 / m_p c^2$;
3) протонная оболочка, в которой $\varepsilon / k = Z e^2 / m_p c^2$.

Используя массу электрона и постоянную Планка, определим безразмерные параметры модели в виде

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c},\ S = \frac{(\hbar k_\rho)^2}{(m_e c)^2},\ P = \frac{\hbar k_z}{m_e c},\ E = \frac{\hbar \omega}{m_e c^2}$$

$$b_{nl}^X = \frac{4 X^2 (\alpha m_e / m_p)^2}{\left(n + 1 - 2\sqrt{l^2 - (1 - u^2) S X^2 (\alpha m_e / m_p)^2}\right)^2} \tag{37}$$

Здесь $X = A, N, Z$ в случае нуклонной, нейтронной или протонной оболочки соответственно.

Разрешая уравнение (37) относительно энергии, находим

$$E_{nl}^X = \frac{- S b_{nl}^X P u \pm i \sqrt{- (S b_{nl}^X P u)^2 + (S b_{nl}^X + 1)(S - P^2 + S b_{nl}^X P^2 u^2)}}{(S b_{nl}^X + 1)} \tag{38}$$

Заметим, что параметр энергии в уравнении (38) может принимать как вещественные, так и комплексные значения, которые соответствуют состояниям с конечным временем жизни. Учитывая, что для большинства нуклидов время распада является достаточно большой величиной, можно предположить, что мнимая часть числа в правой части уравнения (38) является малой величиной, что соответствует малой величине подкоренного выражения. Отсюда находим, что для этих состояний справедливо следующее соотношение между параметрами

$$P^2 = \frac{S(Sb_{nl}^X + 1)}{1 + Sb_{nl}^X(1-u^2)} \tag{39}$$

Подставляя выражение импульса (39) в уравнение (38), имеем

$$E_{nl}^X = \frac{S^{3/2} b_{nl}^X u}{\sqrt{(Sb_{nl}^X + 1)(1 + Sb_{nl}^X(1-u^2))}} \tag{40}$$

Отсюда находим зависимость энергии связи на один нуклон в основном состоянии

$$E_{0a}^X / A = \frac{S^{3/2} b_0 u X^2 / A}{\sqrt{(Sb_0 X^2 + 1)(1 + Sb_0 X^2(1-u^2))}} \tag{41}$$

Здесь обозначено $b_0 = (2\alpha m_e / m_p(1-2a))^2$. Уравнение (41) позволяет описать зависимость энергии связи от числа нуклонов для всех нуклидов, а также энергию связи электронов в водородоподобном атоме [17-18]. Рассмотрим общее выражение энергии (38) в случае протонной оболочки и при условии полного экранирования магнитного заряда, т.е. положим $X = Z, u = 0$. В результате находим

$$E_{nl}^Z = \frac{\pm\sqrt{(Sb_{nl}^Z + 1)(P^2 - S)}}{(Sb_{nl}^Z + 1)}, \quad b_{nl}^Z = \frac{4Z^2(\alpha m_e / m_p)^2}{\left(n + 1 - 2\sqrt{l^2 - SZ^2(\alpha m_e / m_p)^2}\right)^2} \tag{42}$$

С другой стороны, в случае водородоподобного атома справедлива формула Зоммерфельда-Дирака для энергии релятивистского электрона [30]

$$E_e = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 + \dfrac{\alpha^2 Z^2}{(n_r + \sqrt{n_\phi^2 - \alpha^2 Z^2})^2}}} \tag{43}$$

Сравнивая (42) и (43), находим, что для согласования этих формул следует положить

$$E_{nl}^{Z} > 0, \quad P^2 = 1 + S, \quad S = (m_p / m_e)^2, \quad n_r = (n+1)/2, \quad n_\phi = l \tag{44}$$

Отметим, что различия в знаках радикала $\sqrt{l^2 - \alpha^2 Z^2}$ связано с выбором знака параметра в выражении (35), где в общем случае следует полагать, что $a = \pm\sqrt{l^2 - \kappa_u}$. В задачах моделирования структуры ядра мы выбрали положительный знак, тогда как в задачах моделирования атомных оболочек принято выбирать отрицательный знак. В последнем случае находим, что первое уравнение (42) совпадает с уравнением Зоммерфельда-Дирака (43):

$$E_{nl}^{Z} = \frac{E_e}{m_e c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\alpha^2 Z^2}{(n_r + \sqrt{n_\phi{}^2 - \alpha^2 Z^2})^2}}} \tag{45}$$

Таким образом, мы показали, что выражение (38) является универсальным. В области значений параметра $u \approx 1$ это выражение описывает энергию связи нуклонов в ядрах элементов, тогда как при условии $u = 0$, оно описывает энергию релятивистских электронов в атомных оболочках.

Первые члены разложения выражения (45) по степеням малого параметра $(\alpha Z)^2 << 1$, описывают энергетические уровни водородоподобного атома, включая атом водорода, в этом случае имеем [30]

$$E_{nl}^{Z} - 1 = \frac{E_e}{m_e c^2} - 1 = -\frac{(\alpha Z)^2}{2\left(|n_\phi| + n_r\right)^2}\left(1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{|n_\phi| + n_r}\left(\frac{1}{|n_\phi|} - \frac{3}{4\left(|n_\phi| + n_r\right)}\right)\right) + \ldots \tag{46}$$

Выражение (46) описывает рентгеновские термы, квадратичная зависимость которых от заряда ядра была определена экспериментально

Мозли, что послужило основой для создания квантовой механики и современной формы периодического закона.

Отметим, что общее выражение (38) содержит свободные параметры, которые в современной квантовой теории принимают частные значения (44). С учетом этих значений находим, что выражение (45) описывает не только энергию связанных состояний электрона в водородоподобном атоме (46), но и энергию свободного электрона, обусловленную его массой покоя. Исходное же уравнение теории (26) описывает движение скалярного поля, которое не обладает, ни зарядом, ни массой, ни спином. Следовательно, мы доказали, что масса покоя электрона, его заряд и спин обусловлены движение скалярного поля в пятимерном пространстве со специальной метрикой (27), зависящей от заряда и массы центрального ядра.

Этот результат указывает на новые возможности моделирования атомов и атомных ядер на основе общей теории относительности в многомерных пространствах.

Структура атома и элементарных частиц в 112D

Выше мы рассмотрели только случай пятимерного пространства и динамику скалярного поля в 5D. Однако развитая в [11, 16-18] теория атома и атомного ядра в 5D легко обобщается на случай произвольного числа измерений. Действительно, уравнение (26) является универсальным, а метрику (27) можно рассматривать как часть метрики, определенной в 112D. Без ограничения общности можно считать, что дополнительные измерения вносят свой вклад аналогично пятому измерению, имеем

$$\frac{\lambda_1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - |\lambda_2|\nabla^2\Psi + \lambda^{ik}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^i\partial\rho^k} + F^\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} = 0 \qquad (47)$$

Здесь матрица λ^{ik} определяется на основе разложения метрического тензора в окрестности центра гравитации [11] по степеням расстояния до источника, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, следовательно

$$G_{ik} = G_{ik}(0) + \frac{\partial G_{ik}}{\partial r} r + \frac{\partial^2 G_{ik}}{\partial r^2} \frac{r^2}{2} + ... \tag{48}$$

В работе [11] было показано, что достаточно будет удержать три слагаемых в правой части (48). Путем обращения тензора (48) находим обратный тензор, определитель и соответствующие выражения коэффициентов уравнения (47). Отметим зависимость решений уравнения (47) от большого числа параметров, описывающих особенности метрики и движение в каждом измерении.

В общем случае в 112D для симметричного метрического тензора типа (48) имеем 18648 параметров. Для сравнения укажем, что для описания свойств элементарных частиц, нуклидов и химических элементов на сегодняшний день требуется около 150290 параметров [15]. Если предположить, что часть параметров соответствует квантовым числам, то решение задачи на собственные значения для уравнения (48) должно содержать 8-9 квантовых чисел.

Но выражение (38) уже содержит 8 квантовых чисел - E, N, Z, S, P, u, l, n. Следовательно, расширение числа измерений до 112 в уравнении (47) качественно не меняет зависимость энергии связи нуклонов и электронов от квантовых чисел задачи – уравнения (37)-(45), однако количество квантовых чисел может увеличиться. Такое расширение числа параметров позволяет, например, рассмотреть задачу о симметрии электронных и ядерных оболочек [19-20].

Отметим, что метрики типа (5) или (9) позволяют описывать взаимодействие между мирами, которые объединяет наличие общего движения. Представление Римана об атомах, как о своеобразных порталах соединяющих два мира – осязаемый и неосязаемый [5-6], получило развитие в известной модели элементарных частиц [31]. Если таких миров больше двух, тогда порталы должны иметь сложную структуру, что подтверждается современными данными о строении нуклонов.

В стандартной модели [2-3] предполагается наличие трех поколений фермионов – кварков и лептонов. С точки зрения обсуждаемой модели эти поколения частиц представляют собой порталы, соединяющие наш мир с другими мирами. Динамика частиц в стандартной модели отображается в четырехмерном пространстве-времени на основе единого для всей системы лагранжиана [32]. В результате применения вариационного принципа приходим к системе нелинейных уравнений в частных производных, исследование которых до сих пор не завершено [2-3].

С другой стороны, в метрике (5) всякое движение представляется как единое движение на гиперсфере [14, 21-22, 29, 33]. Используя линейное уравнение (26), можно построит волновую механику в многомерном пространстве, а затем отобразить на четырехмерное пространство-время аналогично тому, как это было сделано в случае пяти измерений [11, 16-18].

Для моделирования радиального движения можно использовать как стандартные выражения (24)-(25), так и более общие выражения [29], основанные на интегрировании уравнения (6). Для этого рассмотрим статические решения уравнения (6), полагая $\psi_t = \psi_{tt} = 0$, находим

$$\psi_{rr} = -2Kp\psi + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \qquad (49)$$

Интегрируя уравнение (49), получим

$$p\psi(C - 2K\psi) = \psi_r^2 \qquad (50)$$

Здесь C – произвольная постоянная. Нас интересуют периодические решение уравнения (50), зависящие от функции Вейерштрасса, для нахождения которых следует положить [29]

$$p(\psi) = -\frac{2\psi}{K} + \frac{g_2}{4K\psi} + \frac{g_3}{4K\psi^2} \tag{51}$$

Тогда решение уравнения (50) при $C = 0$ имеет вид

$$\psi = \wp(r - r_0, g_2, g_3) \tag{52}$$

Здесь обозначено: g_2, g_3 - инварианты функции Вейерштрасса, r_0 - константа, связанная с выбором начала координат. Отметим, что аналогичная метрика, зависящая от функции Вейерштрасса, была получена в работе [33], как решение уравнений Янга-Миллса. Метрики типа [33] и (5), (51), (52) использовались в наших работах [19-20, 29, 34-37] и других для моделирования структуры адронов, барионов и атомных ядер.

Вычисляя определитель метрического тензора в метрике (5), находим

$$G = -p(\psi)\psi \prod_{1}^{N-1} (\sin\phi_k)^{2(N-k)} \tag{53}$$

Соответственно уравнение (26) в метрике (5) принимает вид

$$\frac{\Phi_{tt}}{\psi} - \frac{\Phi_{rr}}{p} - \frac{(\ln(\psi/p))_r}{2p}\Phi_r = \mathbf{\Omega}\Phi \tag{54}$$

Здесь $\mathbf{\Omega}$ – оператор Лапласа, определенный на гиперсфере

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\partial^2}{\partial\phi_N^2} + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \frac{\partial^2}{\partial\phi_k^2} + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \frac{\partial}{\partial\phi_k}$$

$$a_k = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k}\sin^2\phi_j}, \quad b_k = a_k \frac{\partial}{\partial\phi_k}\ln(a_k J), \quad J = \sqrt{\prod_{k=1}^{N-1}(\sin\phi_k)^{2(N-k)}} \tag{55}$$

Положим Ω_j - собственные значения оператора $\mathbf{\Omega}$, зависящие от N квантовых чисел $j_1, ..., j_N$. Решение уравнения (54) можно представить в виде

$$\Phi = \Phi_j \varphi(r) e^{-i\omega t} \tag{56}$$

Здесь Φ_j - собственные функции оператора $\mathbf{\Omega}$ такие, что

$$\mathbf{\Omega}\Phi_j = -\Omega_j \Phi_j$$

Подставляя выражение (56) в уравнение (54) и разделяя переменные, находим окончательно

$$\varphi_{rr} + \frac{(\ln(\psi / p))_r}{2}\varphi_r = (-p\Omega_j + p\omega^2 / \psi)\varphi \tag{57}$$

Уравнение (57) можно упростить, полагая $f(r) = \varphi \ln(\psi / p) / 4$, тогда имеем

$$f_{rr} = \frac{[-4p\psi\Omega_j + 4p\omega^2 + \psi(\ln(\psi / p))_{rr}]}{\psi \ln(\psi / p)} f = U(r) f \tag{58}$$

На рис. 1-2 приведены потенциалы и радиальная часть волновой функции в частном случае метрики, зависящей от функции Вейерштрасса в виде (51), (52) для основного и возбужденного состояний. Из данных приведенных на рис. 1-2 следует, что волновая функция является периодической как в основном, так и в возбужденных состояниях. Период волновой функции зависит от энергии системы, от углового момента и от инвариантов функции Вейерштрасса. Отметим, что в основном состоянии волновая функция может быть определена на всей оси радиальной координаты – рис. 1, тогда как в возбужденных состояниях волновая функция определена в ограниченном интервале, совпадающем с периодом потенциальной функции $U(r)$ - рис.2.

Эти результаты можно сравнить с аналогичными результатами, полученными в теории атома Эйнштейна [38], в которой был выведен спектр атома водорода, и с пятимерной теорий гравитации и электромагнитного поля [16-18], в которой было получено уравнение Зоммерфельда-Дирака в форме (45).

.

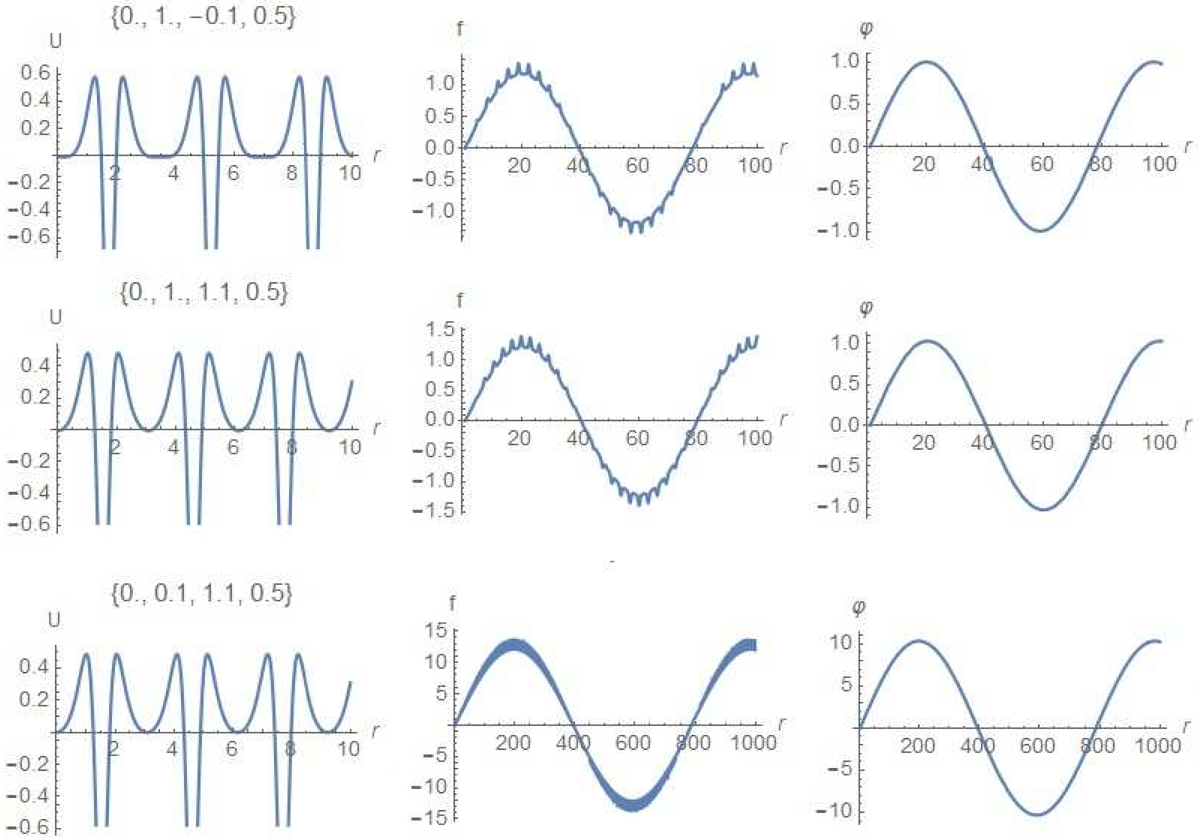

Рис. 1. Потенциал и волновая функция в основном состоянии: в верхней части рисунков указан лист параметров $\{\Omega_j, E, g_2, g_3\}$.

Отметим, что метрика, зависящая от эллиптической функции Вейерштрасса, была получена в теории Янга-Миллса [33] и использована нами для моделирования структуры адронов, кварков и лептонов [34-37]. Тот факт, что аналогичная метрика (51)-(52) существует и в общей теории относительности в многомерных пространствах, является указанием на тесную связь теории Эйнштейна с теорией Янга-Миллса [39-40]. С точки зрения развиваемой здесь теории наличие периодических потенциалов, обусловленных только метрикой пространства-времени, свидетельствует не только о возможности создания единой модели атома и атомного ядра, но и о возможности развития новых технологий, связанных с использованием ресурса дополнительных измерений пространства.

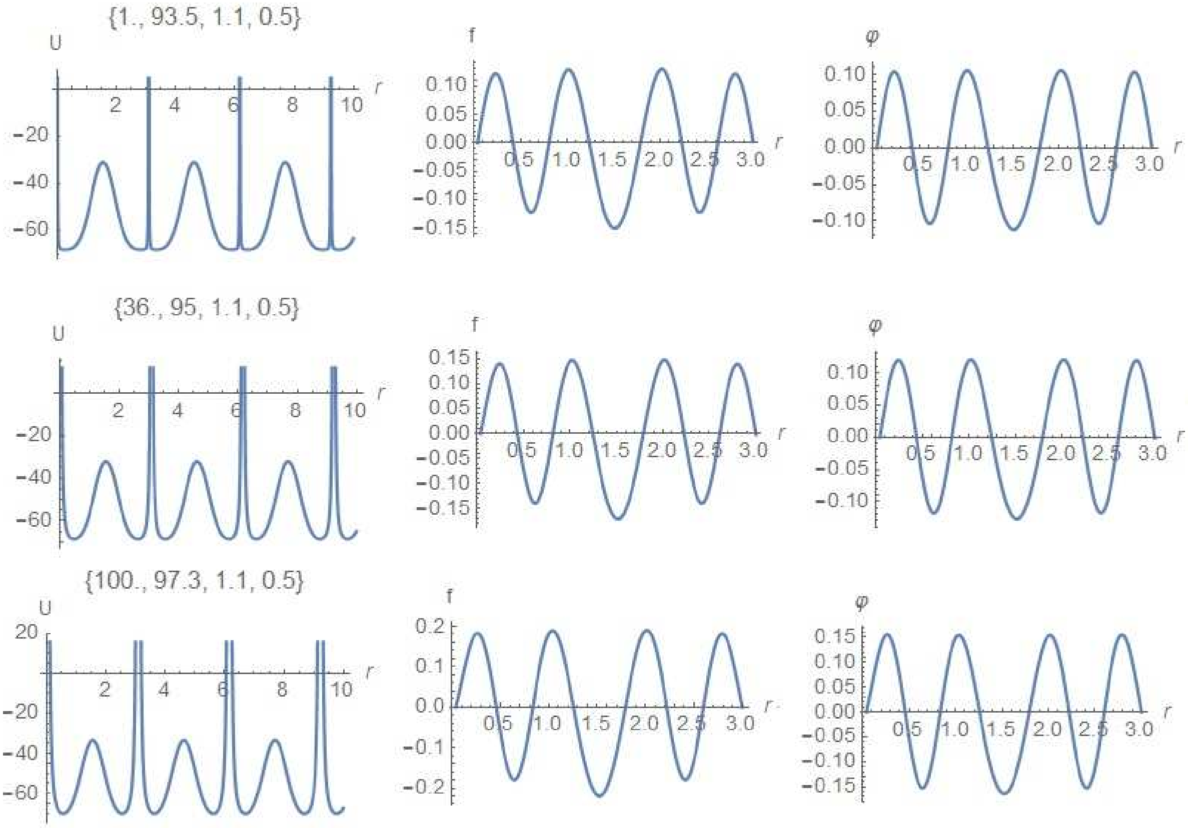

Рис. 2. Потенциал и волновая функция в возбужденных состояниях: в верхней части рисунков указан лист параметров $\{\Omega_j, E, g_2, g_3\}$.

Есть все основания полагать, что уравнение (26) с метрикой (5), (51), (52) описывает фундаментальную структуру материи. Однако рассмотрение этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.

Библиографический список

1. Einstein A. A Comment on a Criticism of Unified Field Theory// Phys. Rev., 1953, 89, 321.
2. Schwartz M. D. Quantum Field Theory and the Standard Model. - Cambridge University Press, 1 ed., 2013.
3. Donoghue J.F., Golowich E., Holstein B.R. Dynamics of the Standard Model (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology). - Cambridge University Press, 2 ed., 2014.
4. Bernard de Wit. Supergravity // arXiv: hep-th/0212245v1 19 Dec 2002.

5. Риман Б. Фрагменты философского содержания. Сочинения. Москва-Ленинград, ОГИЗ, 1948.

6. Трунев А.П. Риманова геометрия и единая теория поля в 6D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №01(105). С. 161 – 186. – IDA [article ID]: 1051501008. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2015/01/pdf/08.pdf

7. Kaluza Theodor. Zum Unitätsproblem in der Physik// Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.), 966–972. 1921.

8. Einstein A. Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhangs von Gravitation und Elektrizitat// Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 23—25; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966, с. 83.

9. Einstein A., Bargmann V., and Bergmann P. On Five-dimensional Representation of Gravitation and Electricity/ Theodore von Karman Anniversary Volume, Pasadena, Calif. Inst. Technol., 1941, 212—225; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966, с. 543.

10. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике. – М., Гостехиздат,1956. 152 с.

11. Трунев А.П. Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы-Клейна// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2011. – №07(071). С. 502 – 527. – Шифр Информрегистра: 0421100012\0252, IDA [article ID]: 0711107039. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2011/07/pdf/39.pdf .

12. Pran Nath. Twenty Years of SUGRA// arXiv:hep-ph/0307123v2, 20 Jul 2003.

13. Bernard de Wit, Jan Louis. Supersymmetry and Dualities in various dimensions// arXiv: hep-th/9801132v2, 18 Feb 1998.

14. Трунев А.П. Супергравитация в 112D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №03(117). С. 1263 – 12184. – IDA [article ID]: 1171603082. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/82.pdf

15. Трунев А.П. Теория физических констант и супергравитация в 112D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №04(118). Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/78.pdf

16. Трунев А.П. Структура атомного ядра в теории Калуцы-Клейна / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №02(076). С. 873 – 892. – Шифр Информрегистра: 0421200012\0095, IDA [article ID]: 0761202070. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/02/pdf/70.pdf

17. Трунев А.П. Ядерные оболочки и периодический закон Д.И. Менделеева / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №05(079). С. 414 – 439. – IDA [article ID]: 0791205029. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/29.pdf

18. Трунев А.П. Ядерные оболочки и периодический закон Д.И.Менделеева. Часть 2. / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ)

[Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №07(081). С. 491 – 514. – IDA [article ID]: 0811207037. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/07/pdf/37.pdf

19. Трунев А.П. Динамика кварков в атомных ядрах и кварковые оболочки / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №02(086). С. 674 – 697. – IDA [article ID]: 0861302048. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2013/02/pdf/48.pdf

20. Трунев А.П. Преоновые оболочки и структура атома / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №03(087). С. 795 – 813. – IDA [article ID]: 0871303061. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2013/03/pdf/61.pdf

21. Трунев А.П. Гравитационные волны и квантовая теория Шредингера / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf

22. Трунев А.П. Gravitational waves and quantum theory / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1146 – 1161. – IDA [article ID]: 0961402078. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf

23. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464;

24. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.

25. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

26. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). - Pergamon Press, ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.

27. Hai Lin, Baosen Wu, Shing-Tung Yau. Heterotic String Compactification and new Vector Bundles// arXiv:1412.8000v1 [hep-th] 26 Dec 2014.

28. Braun V, Candelas P., Davies R. A Three-Generation Calabi-Yau Manifold with Small Hodge Numbers// arXiv:0910.5464v1, 28 Oct, 2009.

29. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность и квантовая теория. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 с.

30. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. IV/В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Квантовая электродинамика. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, Гл. Ред. Физ.-мат. Лит., 1989, - 728 с.

31. Einstein A., Rosen N. The Particle Problem in the General Theory of Relativity// Phys. Rev., 1935, 48, 73-77.

32. Langacker P. Structure of the Standard Model// arXiv:hep-ph/0304186v1, 19 Apr 2003.

33. Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А.. Полное решение уравнений Янга-Миллса для центрально-симметричной метрики// Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics 2011, 4(3), 350-362.

34. Трунев А.П. Моделирование метрики адронов на основе уравнений Янга-Миллса / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №10(084). С. 874 – 887. – IDA [article ID]: 0841210068. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/68.pdf

35. Трунев А.П. Динамика кварков в метрике адронов и структура барионов / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №01(085). С. 525 – 542. – IDA [article ID]: 0851301042. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/42.pdf

36. Трунев А.П. Динамика кварков в метрике барионов и структура ядра / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №01(085). С. 623 – 636. – IDA [article ID]: 0851301049. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/49.pdf

37. Трунев А.П. Динамика преонов и структура кварков и лептонов / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №04(088). С. 895 – 926. – IDA [article ID]: 0881304064. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2013/04/pdf/64.pdf

38. Трунев А.П. Атом Шредингера и Эйнштейна / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №03(097). С. 1377 – 1401. – IDA [article ID]: 0971403094. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/94.pdf .

39. Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А.. Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна// Известия вузов, Математика 2009, №9, с. 69-74.

40. Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А.. Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла// Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics 2009, 2(4), 432-448.

References

1. Einstein A. A Comment on a Criticism of Unified Field Theory// Phys. Rev., 1953, 89, 321.

2. Schwartz M. D. Quantum Field Theory and the Standard Model. - Cambridge University Press, 1 ed., 2013.

3. Donoghue J.F., Golowich E., Holstein B.R. Dynamics of the Standard Model (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology). - Cambridge University Press, 2 ed., 2014.

4. Bernard de Wit. Supergravity // arXiv: hep-th/0212245v1 19 Dec 2002.

5. Riman B. Fragmenty filosofskogo soderzhanija. Sochinenija. Moskva-Leningrad, OGIZ, 1948.

6. Trunev A.P. Rimanova geometrija i edinaja teorija polja v 6D / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №01(105). S. 161 – 186. – IDA [article ID]: 1051501008. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2015/01/pdf/08.pdf

7. Kaluza Theodor. Zum Unitätsproblem in der Physik// Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.), 966–972. 1921.

8. Einstein A. Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhangs von Gravitation und Elektrizitat// Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 23—25; Al'bert Jejnshtejn. Sobranie nauchnyh trudov. T. 2. – M., Nauka, 1966, s. 83.

9. Einstein A., Bargmann V., and Bergmann P. On Five-dimensional Representation of Gravitation and Electricity/ Theodore von Karman Anniversary Volume, Pasadena, Calif. Inst. Technol., 1941, 212—225; Al'bert Jejnshtejn. Sobranie nauchnyh trudov. T. 2. – M., Nauka, 1966, s. 543.

10. Rumer Ju. B. Issledovanija po 5-optike. – M., Gostehizdat,1956. 152 s.

11. Trunev A.P. Fundamental'nye vzaimodejstvija v teorii Kalucy-Klejna// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2011. – №07(071). S. 502 – 527. – Shifr Informregistra: 0421100012\0252, IDA [article ID]: 0711107039. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2011/07/pdf/39.pdf .

12. Pran Nath. Twenty Years of SUGRA// arXiv:hep-ph/0307123v2, 20 Jul 2003.

13. Bernard de Wit, Jan Louis. Supersymmetry and Dualities in various dimensions// arXiv: hep-th/9801132v2, 18 Feb 1998.

14. Trunev A.P. Supergravitacija v 112D / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №03(117). S. 1263 – 12184. – IDA [article ID]: 1171603082. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/82.pdf

15. Trunev A.P. Teorija fizicheskih konstant i supergravitacija v 112D / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №04(118). Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/78.pdf

16. Trunev A.P. Struktura atomnogo jadra v teorii Kalucy-Klejna / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №02(076). S. 873 – 892. – Shifr Informregistra: 0421200012\0095, IDA [article ID]: 0761202070. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2012/02/pdf/70.pdf

17. Trunev A.P. Jadernye obolochki i periodicheskij zakon D.I. Mendeleeva / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №05(079). S. 414 – 439. – IDA [article ID]: 0791205029. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/29.pdf

18. Trunev A.P. Jadernye obolochki i periodicheskij zakon D.I.Mendeleeva. Chast' 2. / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №07(081). S. 491 – 514. – IDA [article ID]: 0811207037. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2012/07/pdf/37.pdf

19. Trunev A.P. Dinamika kvarkov v atomnyh jadrah i kvarkovye obolochki / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №02(086). S. 674 – 697. – IDA [article ID]: 0861302048. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2013/02/pdf/48.pdf

20. Trunev A.P. Preonovye obolochki i struktura atoma / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №03(087). S. 795 – 813. – IDA [article ID]: 0871303061. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2013/03/pdf/61.pdf

21. Trunev A.P. Gravitacionnye volny i kvantovaja teorija Shredingera / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar:

KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf

22. Trunev A.P. Gravitational waves and quantum theory / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1146 – 1161. – IDA [article ID]: 0961402078. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf

23. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464;

24. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.

25. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

26. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). - Pergamon Press, ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.

27. Hai Lin, Baosen Wu, Shing-Tung Yau. Heterotic String Compactification and new Vector Bundles// arXiv:1412.8000v1 [hep-th] 26 Dec 2014.

28. Braun V, Candelas P., Davies R. A Three-Generation Calabi-Yau Manifold with Small Hodge Numbers// arXiv:0910.5464v1, 28 Oct, 2009.

29. Trunev A.P. Geometricheskaja turbulentnost' i kvantovaja teorija. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 s.

30. Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaja fizika: Uchebnoe posobie. V 10 t. T. IV/V.B. Beresteckij, E.M. Lifshic, L.P. Pitaevskij. Kvantovaja jelektrodinamika. – 3-e izd., ispr. – M.: Nauka, Gl. Red. Fiz.-mat. Lit., 1989, - 728 s.

31. Einstein A., Rosen N. The Particle Problem in the General Theory of Relativity// Phys. Rev., 1935, 48, 73-77.

32. Langacker P. Structure of the Standard Model// arXiv:hep-ph/0304186v1, 19 Apr 2003.

33. Krivonosov L.N., Luk'janov V.A.. Polnoe reshenie uravnenij Janga-Millsa dlja central'no-simmetrichnoj metriki// Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics 2011, 4(3), 350-362.

34. Trunev A.P. Modelirovanie metriki adronov na osnove uravnenij Janga-Millsa / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №10(084). S. 874 – 887. – IDA [article ID]: 0841210068. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/68.pdf

35. Trunev A.P. Dinamika kvarkov v metrike adronov i struktura barionov / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №01(085). S. 525 – 542. – IDA [article ID]: 0851301042. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/42.pdf

36. Trunev A.P. Dinamika kvarkov v metrike barionov i struktura jadra / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №01(085). S. 623 – 636. – IDA [article ID]: 0851301049. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/49.pdf

37. Trunev A.P. Dinamika preonov i struktura kvarkov i leptonov / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №04(088). S. 895 – 926. – IDA [article ID]: 0881304064. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2013/04/pdf/64.pdf

38. Trunev A.P. Atom Shredingera i Jejnshtejna / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №03(097). S. 1377 – 1401. – IDA [article ID]: 0971403094. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/94.pdf .

39. Krivonosov L.N., Luk'janov V.A.. Svjaz' uravnenij Janga-Millsa s uravnenijami Jejnshtejna// Izvestija vuzov, Matematika 2009, №9, s. 69-74.

40. Krivonosov L.N., Luk'janov V.A.. Svjaz' uravnenij Janga-Millsa s uravnenijami Jejnshtejna i Maksvella// Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics 2009, 2(4), 432-448.