

УДК 530.1

UDC 530.1

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and mathematics

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ КОНСТАНТ И СУПЕРГРАВИТАЦИЯ В 112D**THEORY OF PHYSICAL CONSTANTS AND SUPERGRAVITY IN 112D**

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D., директор
Scopus Author ID: 6603801161
SPIN-код автора: 4945-6530
A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D., C.E.O.
Scopus Author ID: 6603801161
A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

В настоящей работе обсуждается вариант метрической теории взаимодействий, в которой предполагается, что физические константы обусловлены наличием дополнительных измерений пространства-времени. Дана оценка числа физических констант на основе теории супергравитации в 112D: минимальное число констант равно 222, а максимальное число - 1404928. В настоящее время число параметров, характеризующих элементарные частицы, изотопы и химические элементы составляет около 150920. Это число в 9.3 меньше, чем максимально возможное число параметров, что указывает на все еще большой потенциал современной науки. Функции, описывающие площадь и объем единичной гиперсферы, вложенной в риманово пространство произвольной размерности, были использованы для нахождения фундаментальных физических констант. Получено удовлетворительное совпадение с относительной погрешностью 0.03% расчетных и экспериментальных величин постоянной тонкой структуры. Для отношения средней массы нуклона к массе электрона, получено совпадение с экспериментальной величиной с погрешностью 0.002%. Предложенная теория физических констант отличается от аналогичной теории Бартини тем, что установленная оптимальная размерность пространства гиперсферы составляет 5 и 7, а не 6, как в теории Бартини. Рассмотрены вопросы компактификации дополнительных измерений при описании движения в четырехмерном пространстве-времени

In this article we discuss a version of the metric theory of the fundamental interactions in which it is assumed that the physical constants due to the presence of extra dimensions of space-time. The estimation of the number of physical constants based on the theory of supergravity in 112D is that the minimum number of constants is equal to 222, and the maximum number - 1404928. At present, the number of parameters that characterize the elementary particles, isotopes and chemical elements is about 150920. This number is 9.3 less than the maximum possible number of parameters that indicate still great potential of modern science. Functions describing the area and volume of a unit hypersphere, embedded in a Riemannian space of arbitrary dimension, were used to find the fundamental physical constants. A satisfactory agreement with a relative error of 0.03% calculated and experimental values of the fine structure constant found out. For the ratio of the average mass of a nucleon to the electron mass is obtained coincidence with the experimental value with an accuracy of 0.002%. The proposed theory of physical constants different from that Bartini theory that established the optimal dimension of the space is a hypersphere 5 and 7, rather than 6 as in Bartini theory. The problems of the compactification of extra dimensions in describing the motion in four-dimensional space-time are discussed

Ключевые слова: ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, СУПЕРГРАВИТАЦИЯ, ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ.

Keywords: GENERAL RELATIVITY, PHYSICAL CONSTANTS, SUPERGRAVITY

Введение

Современная физика сформировалась на базе естественно научных представлений, в которых большое значение придается

экспериментальным данным, характеризующим различные свойства вещества и физических полей. В результате интенсивных научных исследований были сформированы базы данных физических параметров и констант, описывающих элементарные частицы, ядра элементов, атомы, молекулы, а также макроскопические объемы вещества, включая планеты и их спутники, звезды, туманности, галактики, кластеры галактик, а также параметры расширения Вселенной.

Наряду с экспериментальными исследованиями развивалась теория, что привело к созданию стандартной модели [1-4]. Считается, что стандартная модель содержит необходимое число параметров и констант для полного описания динамики элементарных частиц, нуклонов в ядрах элементов, электронных оболочек атомов, взаимодействие молекул и т.д. вплоть до масштабов, сопоставимых с масштабом Вселенной [5-6].

Однако уже простейший тест стандартной модели связанный с вычислением космологической константы [7-10] показывает, что между геометрией микромира и геометрией в масштабе всей Вселенной нет никакой связи [11-12]. В этой связи предлагается новый принцип, согласно которому, метрика пространства-времени должна быть универсальной, зависящей только от фундаментальных констант [11].

В работе [11] исследуется гипотеза о виртуальных мирах, вложенных друг в друга. Предполагается, что разумные существа в каждом мире создают устройство для моделирования собственной истории в форме сети компьютеров, используя доступный материал и законы физики своего мира. Эта гипотеза согласована с теорией параллельных миров [13-19], но она накладывает сильное ограничение на возможную геометрию пространства-времени [11].

В работе [12] исследована проблема определения параметра сходства для системы миров. Предполагается, что в каждом мире есть разумные существа, стремящиеся к самопознанию. В силу наличия иерархии

вложенных миров только в одном из них существует система полного отождествления каждого признака индивидуального существа с макропараметрами своего мира. Если разумные существа в каждом мире создают устройство для моделирования собственной истории, используя доступный материал и законы физики своего мира, а потери информации при отображении одного мира на другой составляют 1%, то 37 мир воспроизводится только на 68.9449%.

Для землян было установлено, что средний параметр сходства профессиональных групп при их распознавании по астрономическим параметрам составляет 68.75% [20]. Следовательно, можно предположить, что система миров, включающих нашу землю и человеческий мир, содержит 37 «этажей». Считая, что каждый «этаж» занимает три измерения, а все «этажи» связаны единым временем, находим отсюда, что число измерений единого пространства-времени всей системы составляет 112. В статье [12] рассматривается геометрия риманова 112 мерного пространства с общим гравитационным полем. Исследовано влияние отдельных виртуальных миров на другие миры. Показано, что физические законы во всех мирах отображают единое движение, охватывающее маркеры движения в форме элементарных частиц и атомов в 112-мерном пространстве.

В настоящей работе обсуждается вариант метрической теории взаимодействий, в которой предполагается, что физические константы обусловлены наличием дополнительных измерений пространства-времени. Дана оценка числа физических констант на основе теории супергравитации в 112D: минимальное число констант равно 222, а максимальное число - 1404928. В настоящее время число параметров, характеризующих элементарные частицы, изотопы и химические элементы составляет 150920. Это число в 9.3 меньше, чем максимально возможное

число параметров, что указывает на все еще большой потенциал современной науки.

Центрально-симметрическая метрика в 112D

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна имеют вид:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Здесь $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

В общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned} R_{ik} &= R_{ijk}^j, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\ R_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\beta\delta}^\mu \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_{\mu\delta}^\alpha, \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ - тензор Римана, Γ_{kl}^i - символы Кристоффеля второго рода.

Как известно, Эйнштейн предложил в 1912-1955 гг. несколько альтернативных теорий гравитации, среди которых теория (1) получила всеобщее признание, особенно в последнее время в связи с открытием ускоренного расширения Вселенной.

Множество споров вызывала космологическая константа, введенная Эйнштейном в работе [21] для объяснения существования статической Вселенной. Однако в 1922 г Фридман получил решение, описывающие нестационарную Вселенную, на основе уравнений общей теории относительности, предложенных Эйнштейном в 1915 г, в которых $\Lambda = 0$. В 1929 г Хаббл экспериментально обнаружил разбегание галактик и сформулировал закон, связывающий расстояние до галактик с красным смещением. Эти результаты явились подтверждением модели Фридмана, после чего Эйнштейн опубликовал статью [22], в которой написал, что <http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/78.pdf>

«При этих обстоятельствах следует задать вопрос, можно ли описать опытные факты; не вводя Λ -член, явно неудовлетворительный с теоретической точки зрения».

В настоящее же время, учитывая многочисленные данные, свидетельствующие об ускоренном расширении Вселенной, следует признать, что Λ -член является вполне удовлетворительным и, более того, единственным разумным объяснением наблюдаемого эффекта. Однако происхождение этого эффекта относится к одной из самых больших загадок современной физики. Действительно, это слагаемое могло бы возникнуть как следствие квантовых флуктуаций, но соответствующие оценки показывают, что существует огромное различие, составляющее 120 порядков между экспериментальной величиной Λ и предсказанием квантовой теории гравитации. Это различие можно несколько сократить, используя различные соображения [7-8], но нельзя устранить.

Для описания материи в рамках общей теории относительности Эйнштейн и Инфельд сформулировали программу [23-24]: «Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля».

Чтобы сохранить основную идею определения метрики в теории гравитации Эйнштейна и при этом удовлетворить принципу максимальной определенности [11], мы предположим, что уравнение Эйнштейна (1) в пространствах произвольной размерности распадается на два независимых уравнения [11-12, 25-27]:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= k g_{\mu\nu} \\ \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} (k - \Lambda) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь k – некоторая функция, зависящая от размерности пространства. Отметим, что первым уравнением определяется метрика пространства-времени, а вторым уравнением задается распределение материи, которое соответствует этой метрике. Эта гипотеза соответствует идее о происхождении материи из гравитационного поля [23-24], но без специального предположения о наличии сингулярности метрики.

Отметим, что в модели (3) сохраняются все результаты, связанные с определением, так называемых пространств Эйнштейна [28], поскольку соответствующие метрики являются решением первого уравнения (3).

В работах [25-27] представлена модель гравитации в многомерных пространствах размерностью D с метрикой

$$ds^2 = \psi(t, r)dt^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1^2 - \sin^2 \phi_1 d\phi_2^2 - \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 d\phi_3^2 - \dots - \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 \dots \sin^2 \phi_{N-1} d\phi_N^2 \quad (4)$$

Здесь $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ - углы на единичной сфере, погруженной в $D - 1$ мерное пространство. Метрика (4) описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике элементарных частиц и в теории супергравитации [29-30]. Такой подход позволяет охватить все многообразие материи, которую производит фабрика природы, путем выбора уравнения состояния $p = p(\psi)$.

Уравнение Эйнштейна в форме (3) является универсальным, поэтому обобщается на пространство любого числа измерений. Движение будем описывать уравнением Гамильтона-Якоби, которое также обобщается на любое число измерений. Вместе эти два уравнения составляют универсальную модель, описывающую движение в римановых пространствах:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = kg_{\mu\nu} \quad (5)$$

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = 0 \quad (6)$$

Уравнения поля в метрике (4) сводятся к одному уравнению второго порядка [25-27]

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -Kp\psi - \frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi} \psi_t^2 + \frac{p + p'\psi}{2p\psi} \psi_r^2 \quad (7)$$

В общем случае параметры модели и скалярная кривизна зависят только от размерности пространства, имеем

$$\begin{aligned} k &= D(D-5)/2 + 3, \\ K &= 2(D-3), \\ R &= -D^2 + 3D \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_1} \right)^2 - \sin^{-2} \phi_1 \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_2} \right)^2 - \\ \sin^{-2} \phi_1 \sin^{-2} \phi_2 \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_3} \right)^2 - \dots - \sin^{-2} \phi_1 \sin^{-2} \phi_2 \dots \sin^{-2} \phi_{N-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_N} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (9) можно проинтегрировать при некоторых предположениях, используя метод, рассмотренный в работах [25-27].

Динамика частиц

Заметим, что движение частиц в метрике (4) разделяется на радиальное движение и движение на сфере, которое в общем случае можно исследовать независимо от радиального движения. Будем предполагать, что существуют такие частицы, которые движутся в римановом пространстве в метрике (4) с числом углов $N = 110$. Возникает вопрос, как эти частицы могут быть идентифицированы в нашем пространстве? Для ответа на этот вопрос следует установить, какие углы из 110 принадлежать нашему миру и как много углов одновременно могут повлиять на два выбранных угла.

Как известно, движение массивных частиц в гравитационном поле в общем случае описывается уравнением

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (10)$$

Γ_{kl}^i – символы Кристоффеля второго рода.

Пронумеруем координаты метрики (4) следующим образом

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N, x_{N+1}, x_{N+2}.$$

Система уравнений (10) в метрике (4) имеет вид [12]

$$\ddot{\phi}_i + 2\dot{\phi}_i \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\phi}_j \cot \phi_j - \cos \phi_i \sin \phi_i \sum_{j=i+1}^N \dot{\phi}_j^2 \prod_{k=i+1}^{j-1} \sin^2 \phi_k = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Отметим, что в силу уравнений (11) все углы связаны между собой. Поэтому движение вдоль каждого угла может влиять на динамику всей системы. Это влияние является особенно сильным в окрестности полюсов системы, где $\phi_i \rightarrow 0, \pi$, при этом $\cot \phi_i \rightarrow \pm\infty$.

Однако система уравнений (11) зависит от начальных данных, поэтому если в начальный момент времени положить, например, $\phi_2(0) = \pi/2, \dot{\phi}_2(0) = 0$, то во все последующие моменты времени имеем $\phi_2(t) = \pi/2, \dot{\phi}_2(t) = 0$. Но тогда, согласно (11), угол ϕ_2 выпадает из системы, а порядок системы понижается.

Используя это свойство системы уравнений (11) можно исследовать динамику некоторой подсистемы меньшего размера. В работе [12] исследованы подсистемы с числом угловых координат $N = 5; 8; 38; 71$, которые описывают взаимное влияние 2, 3, 13 и 24 миров соответственно.

В общем случае, согласно (10), движение в пространстве зависит от функций Γ_{kl}^i – символов Кристоффеля второго рода. В метрической теории существует два основных типа законов физики. Первый тип законов вытекает из равенства нулю ковариантной производной метрического тензора:

$$Dg_{ik} = 0 \rightarrow \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk} \Gamma_{il}^m - g_{im} \Gamma_{kl}^m = 0 \quad (12)$$

В стандартной теории поля [28, 31] из уравнений (12) выводится связь символов Кристоффеля с метрическим тензором в форме

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right)$$

Дальнейшее развитие теории строится на определении тензора кривизны и тензора Риччи в соответствии с выражениями (2). В теории гравитации Эйнштейна предполагается, что тензор энергии импульса материи связан с тензором Эйнштейна уравнением (1).

Однако уравнения (12) также являются фундаментальными, если их рассматривать при заданных функциях Γ_{kl}^i . Действительно, в этом случае можно определить и метрический тензор, интегрируя уравнения (12), и тензор Римана, используя выражения (2), и тензор энергии-импульса материи на основе уравнения Эйнштейна (1).

Второй тип законов вытекает из равенства нулю ковариантной производной скорости, откуда следует система уравнений (10)

$$Du^i = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (13)$$

Отметим, что совокупность законов физики в форме (12)-(13) при заданных функциях Γ_{kl}^i полностью описывает динамику полей и частиц в многомерных пространствах. Чтобы отобразить движение в многомерных пространствах в рамках четырехмерного пространства-времени необходимо осуществить компактификацию. В пятимерной теории гравитации компактификация достигается путем задания условия периодичности (цилиндричности) по одной или нескольким координатам [32-35].

Физический смысл такого отображения заключается в том, что на большом удалении от линии, окруженной цилиндрической поверхностью, сама цилиндрическая поверхность представляется линией. С другой стороны, вблизи цилиндрической поверхности можно обнаружить

сложную структуру самой поверхности, отражающую дополнительные измерения пространства. На рис. 1 представлено отображение 6-, 9- и 12-мерного объекта в форме трехмерного «цилиндра» по методу [36], иллюстрирующее указанное выше свойство.

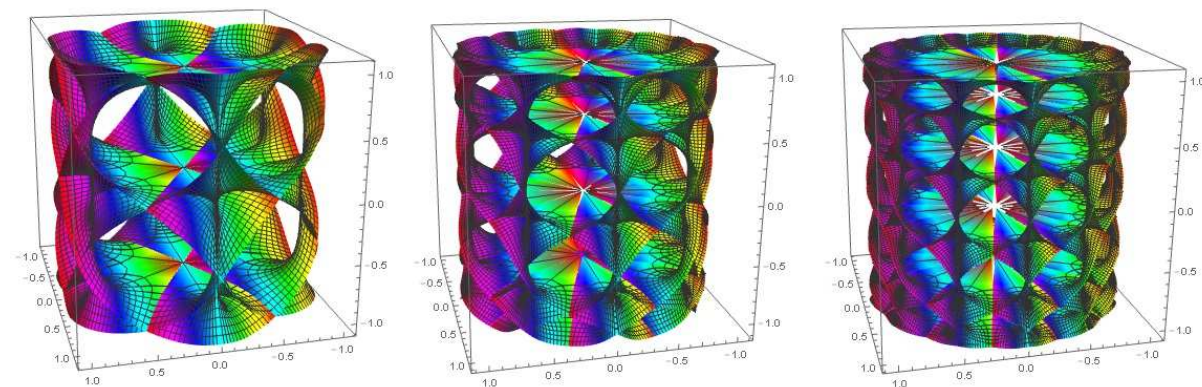


Рис. 1. Проекция 6-, 9- и 12-мерного объекта из многомерного пространства на гиперплоскость в форме трехмерной фигуры по методу [36].

Такого рода компактификация приводит к довольно сложному представлению о движении наблюдаемых частиц, как о проекциях неких реальных геометрических объектов в пространствах высших измерений. На рис. 2 представлено отображение 6D многообразия Калаби-Яу [37-38] с кэлеровой метрикой, для которой $R_{ik} = 0$, по методу [36]. Здесь каждая проекция соответствует определенному моменту времени. Таким образом, наблюдаемое движение фигуры фактически отражает движение секущей плоскости, а не самого объекта.

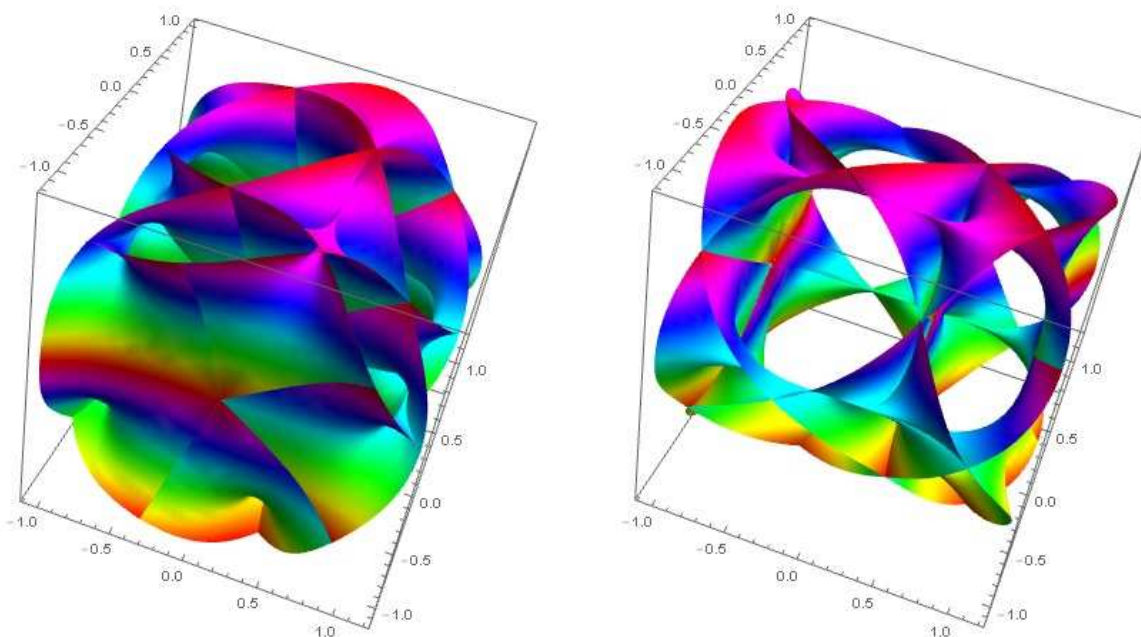


Рис. 2. Отображение 6D многообразия Калаби-Яу имитирующее динамику объекта.

Наконец, заметим, что необходимость в расширении мерности пространства возникла из физически наблюдаемого факта наличия трех поколений частиц. Обратная процедура перехода к стандартной модели, сформулированной в четырехмерном пространстве-времени, не является однозначной, что приводит к проблеме компактификации [37-38].

Теория физических констант

Динамика системы (11) определяется заданием $2N$ констант имеющих смысл начальных данных. При отображении движения в пространстве четырех измерений эти константы можно рассматривать как физические константы, характеризующие свойства взаимодействий, которые замещают собой недостающие данные о движении на гиперсфере погруженной в $D - 1$ мерное пространство. Добавим сюда две константы имеющие смысл масштабов времени и длины, в результате находим оценку минимального числа констант для метрики (4) – $N_{\min} = 222$.

Число констант теории, основанной на уравнениях (12)-(13) зависит от свойств символов Кристоффеля Γ_{kl}^i . В наиболее общем случае пространства с кручением имеем D^3 независимых компонентов. В рассматриваемом случае 112-мерного пространства это число равно $N_{\max} = 1404928$. В настоящее время число параметров, характеризующих элементарные частицы, изотопы и химические элементы составляет 150920. Это число в 9.3 меньше, чем максимально возможное число параметров, что указывает на все еще большой потенциал современной науки.

Однако если в число параметров включить число химических соединений и биологических видов, то в силу разнообразия последних число параметров, с учетом вымерших видов, превысит 500 миллионов.

В этой связи возникает вопрос, отражает ли жизнь (Biota) фундаментальные свойства пространства-времени? В нашей работе [39] было показано, что функция Гамильтона-Якоби, описывающая движение на гиперсфере в $6D$, отображает форму раковин – рис. 3.

Действительно, в шестимерном пространстве с сигнатурой метрики $(+, +, +, -, -, -)$ можно построить естественное обобщение метрики (4) на случай наличия двух центров симметрии в виде [39]

$$ds^2 = \psi(t, r)dt^2 + d\chi_1^2 + \sin^2 \chi_1 d\chi_2^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1^2 - \sin^2 \phi_1 d\phi_2^2 \quad (14)$$

Здесь $\chi_1, \chi_2, \phi_1, \phi_2$ - углы на единичных сферах, погруженных в трехмерные пространства; t, r - координаты, связанные со временем и расстоянием соответственно.

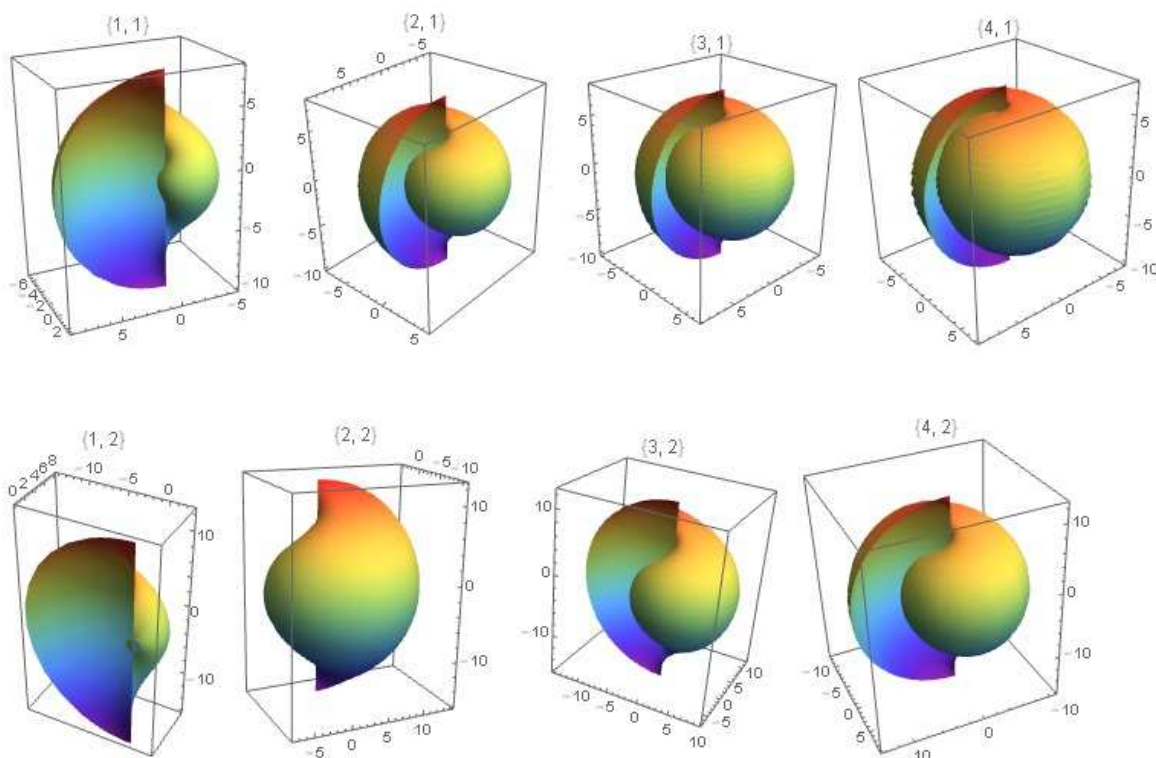


Рис. 3. Функция Гамильтона-Якоби в сферических координатах: над рисунками указаны значения параметров k_2, n_1 .

Рассмотрим гравитацию в пространствах с метрикой (14). Заметим, что только четыре компоненты тензора Эйнштейна в метрике (14) отличны от нуля:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = G_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \chi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin^2 \phi_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Следовательно, в этом случае в первом уравнении (3) следует положить $k = 0$, тогда уравнения поля в метрике (14) сводятся к одному уравнению второго порядка $G_{22} = 0$. Отсюда находим

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -\frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi}\psi_t^2 + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \quad (16)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (14) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \chi_1}\right)^2 + \sin^{-2}\chi_1\left(\frac{\partial S}{\partial \chi_2}\right)^2 \\ - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_1}\right)^2 - \sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_2}\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (17) можно проинтегрировать при некоторых предположениях, используя метод, который предложил Шредингер. Суть метода состоит в том, чтобы представить решение уравнения (9) в виде

$$S = S_{cl} + \hbar \ln \Psi_s \quad (18)$$

Здесь в теорию в явном виде вводится классическое действие - S_{cl} , постоянная Планка и волновая функция Ψ_s . В случае метрики (14) удобно будет выбрать в качестве переменных квантовой механики углы на единичных сферах, а в качестве координат классического действия – время и радиальную координату. Тогда уравнение (17) разделяется на два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r}\right)^2 = M^2 \\ \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi_1}\right)^2 + \sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \chi_1}\right)^2 - \sin^{-2}\chi_1\left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \chi_2}\right)^2 = \frac{M^2}{\hbar^2}\Psi_s^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь M – произвольная постоянная. Рассмотрим волновые решения второго уравнения (18), зависящие от четырех переменных

$$\Psi_s = \Psi_1(f(\phi_1) + \phi_2)\Psi_2(g(\chi_1) + \chi_2) \quad (19)$$

Подставляя выражение (19) во второе уравнение (18) и разделяя переменные, находим

$$\begin{aligned}
 (1 + \sin^{-2} \phi_1) \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \right)^2 \frac{(\Psi_1')^2}{\Psi_1^2} &= k_1^2, & (1 + \sin^{-2} \chi_1) \left(\frac{\partial g}{\partial \chi_1} \right)^2 \frac{(\Psi_2')^2}{\Psi_2^2} &= k_2^2, \\
 (1 + \sin^{-2} \phi_1) \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \right)^2 &= n_1^2, & (1 + \sin^{-2} \chi_1) \left(\frac{\partial g}{\partial \chi_1} \right)^2 &= n_2^2 \\
 k_1^2 - k_2^2 &= \frac{M^2}{\hbar^2}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Разрешая систему уравнений (20), получим окончательно

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= \Psi_{10} \exp[(k_1/n_1)(f(\phi_1) + \phi_2)], \\
 f &= f_0 \pm n_1 i \ln(i\sqrt{2} \cos \phi_1 + \sqrt{3 - \cos(2\phi_1)}) \\
 \Psi_2 &= \Psi_{20} \exp[(k_2/n_2)(g(\chi_1) + \chi_2)], \\
 g &= g_0 \pm n_2 i \ln(i\sqrt{2} \cos \chi_1 + \sqrt{3 - \cos(2\chi_1)})
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Здесь $\Psi_{i0}, k_i, n_i, f_0, g_0$ - произвольные постоянные. Функция Гамильтона-Якоби системы согласно (18) равна

$$S = S_{cl} + \hbar(k_1/n_1)(f(\phi_1) + \phi_2) + \hbar(k_2/n_2)(g(\chi_1) + \chi_2)
 \tag{22}$$

Отметим, что функция Гамильтона-Якоби является аналогом функции, описывающей волновой фронт в геометрической оптике. Периодическая зависимость функции (22) от двух переменных означает, что здесь мы имеем дело с особым рода волновым движением, охватывающим две сферы. При отображении в трехмерных мирах эти волны имеют вид раковин различной конфигурации – рис. 3.

Существует система единиц измерения, автором которой является Планк, содержащая только четыре фундаментальных константы – постоянную Планка, постоянную Больцмана, скорость света и константу гравитации. В настоящее время к этим константам добавляют еще диэлектрическую проницаемость вакуума. Полный же список фундаментальных физических констант содержит 335 параметров [40], хотя не все константы в указанном списке являются независимыми. Однако происхождение самих констант остается неизвестным.

Роберт Орос ди Бартини [41-42] построил теорию физических констант, опираясь на представления о том, что весь мир образован путем отображения уникального экземпляра на себя в пространстве с произвольным числом измерений n , включая и отрицательную область значений $n < 0$. Рассмотрим вариант теории физических констант, с использованием параметров гиперсферы.

Площадь и объем гиперсферы единичного радиуса в зависимости от размерности определяется как

$$A(n) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, V(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)} \quad (23)$$

Выражения (23) можно продолжить в область отрицательных вещественных и комплексных чисел, используя формулу анализа

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Отобразим реальную часть функций (23) над комплексной плоскостью – рис. 4. Из приведенных данных следует, что площадь и объем гиперсферы достигают максимума для некоторой размерности пространства $n > 0$, а также имеют ряд экстремумов в области $n < 0$.

Максимальные значения площади и объема достигаются при следующих значениях параметра $n > 0$:

$$\begin{aligned} n_1 &= 7.2569464049, & A(n_1) &= 33.161194485 \\ n_2 &= 5.2569464049, & V(n_2) &= 5.2777680211 \end{aligned} \quad (24)$$

В области $n < 0$ есть несколько локальных экстремумов, среди которых выберем для каждой из функций (23) только один:

$$\begin{aligned} m_1 &= -4.9912840945, & A(m_1) &= -0.120954211; \\ m_2 &= -6.9912840945, & V(m_2) &= -0.0192504611 \end{aligned} \quad (25)$$

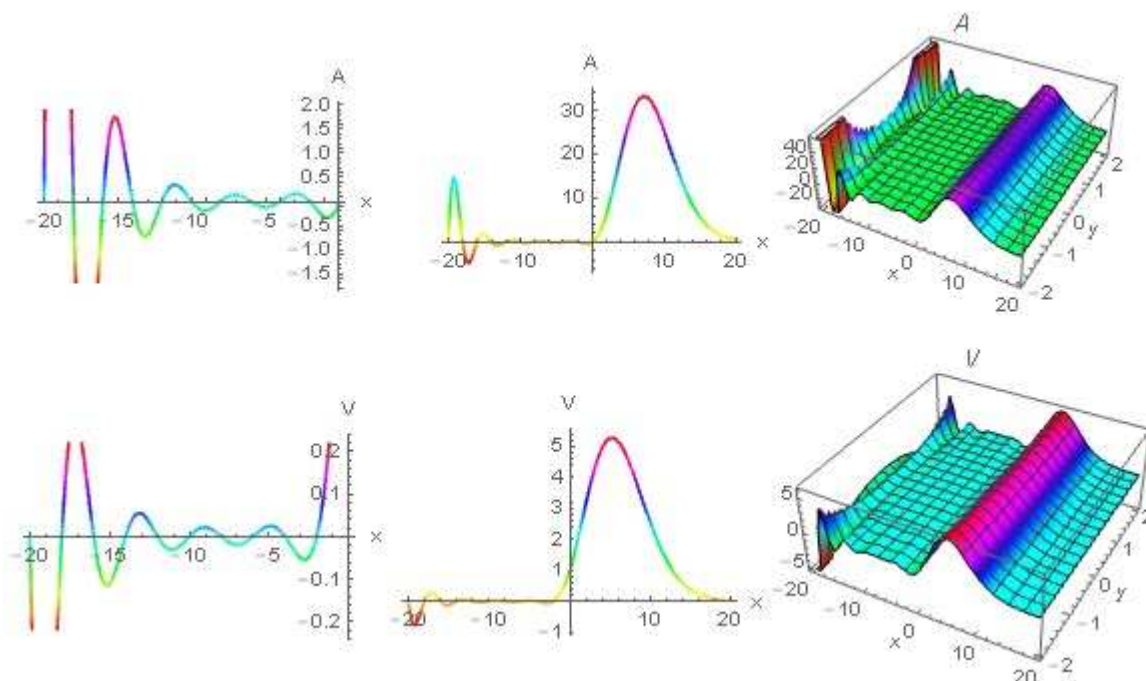


Рис. 4. Площадь и объем гиперсферы в зависимости от размерности пространства.

Одним из результатов теории физических констант [41-42] является предсказание величины постоянной тонкой структуры, отношения массы протона к массе электрона и некоторых других физических констант. Для нахождения постоянной тонкой структуры может быть использовано отношение двух значений функций (23) в точках экстремумов (24)-(25), имеем

$$A(n_1) / A(m_1) = V(n_2) / V(m_2) = -274.163208 \quad (26)$$

Отметим, что половина величины (25), взятая с противоположным знаком составляет 137.082, что близко к обратной величине постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2 / \hbar c$. Как известно, величина постоянной тонкой структуры была измерена с высокой точностью [40]:

$$\alpha^{-1} = 137.035999139 \quad (31)$$

Вторая фундаментальная константа, которая была указана в [41-42] - это отношение массы протона к массе электрона, которое по современным данным составляет [40]

$$m_p / m_e = 1836.15267389 \quad (17).$$

Рассмотрим комбинации параметров

$$\frac{A(n_1)A(7)}{A(m_1)V(4)} = \frac{V(n_2)A(7)}{V(m_2)V(4)} = -1837.4594582 \quad (27)$$

Следовательно, соотношение (27) взятое с противоположным знаком является близким по величине к отношению массы протона к массе электрона. Можно также сравнить (27) с отношением средней массы нуклона к массе электрона, $(m_p + m_n) / 2m_e = 1837.42$.

Отметим, что, не смотря на простоту использованных гипотез, получено удовлетворительное совпадение с относительной погрешностью 0.03% расчетных и экспериментальных величин постоянной тонкой структуры. Для отношения же средней массы нуклона к массе электрона получено совпадение с экспериментальной величиной с относительной погрешностью 0.002%.

Предложенная теория физических констант отличается от аналогичной теории Бартини [41-42] тем, что установленная оптимальная размерность пространства гиперсферы составляет 5 и 7, а не 6, как в теории Бартини. Это объясняется тем, что Бартини использовал для оптимизации размерности пространства функцию отличную от функций (23), которую он связывал с частотой переходов между пространствами с различной размерностью [43].

Таким образом, функции (23), описывающие площадь и объем гиперсферы, могут быть использованы для вычисления некоторых фундаментальных физических констант. Этот любопытный факт может найти объяснение в развиваемой теории супергравитации в 112D.

Действительно, функции (23) должны быть использованы в любой физической теории, в которой рассматривается движение в многомерных пространствах. В частности, если речь идет о спонтанном механизме компактификации, то очевидно, что в результате действия такого механизма обязательно проявятся экстремумы функций (23). Тогда, например, можно утверждать, что движение на гиперсфере в метрике (4) в пространствах с размерностью 7 и 9 должно играть особую роль в электродинамике, в теории атома и ядра. Однако обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.

Библиографический список

1. Langacker P. Structure of the Standard Model// arXiv:hep-ph/0304186v1, 19 Apr 2003.
2. Leutwyler H. Progress in understanding Quantum Chromodynamics/ Schladming Winter School, 2012.
3. Schwartz M. D. Quantum Field Theory and the Standard Model. - Cambridge University Press, 1 ed., 2013.
4. Donoghue J.F., Golowich E., Holstein B.R. Dynamics of the Standard Model (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology). - Cambridge University Press, 2 ed., 2014.
5. Durr S., Fodor Z., Frison J. *et al.* Ab Initio Determination of Light Hadron Masses// Science, 21 November 2008: Vol. 322, no. 5905 pp. 1224-1227.
6. Weinberg S. The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe - 2nd edition, Basic Books, 1993.
7. Zeldovich, Y. B. The Cosmological Constant and the Theory of Elementary Particles// Soviet Physics Uspekhi vol. 11, 381-393, 1968.
8. Weinberg Steven. The Cosmological Constant Problems// arXiv:astro-ph/0005265v1 12 May 2000.
9. Rugh S.E. and Zinkernagel H. The Quantum Vacuum and the Cosmological Constant Problem//Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 33(4), 2002.
10. Burgess C.P. The Cosmological Constant Problem: Why it's hard to get Dark Energy from Micro-physics//arXiv:1309.4133v1 [hep-th] 16 Sep 2013
11. Трунев А.П. Метрика виртуальных миров / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №09(093). С. 1569 – 1589. – IDA [article ID]: 0931309109. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/09/pdf/109.pdf>
12. Трунев А.П. Супергравитация в 11D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар:

КубГАУ, 2016. – №03(117). С. 1263 – 12184. – IDA [article ID]: 1171603082. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/82.pdf>

13. Hugh Everett, III. The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics. Thesis, Princeton University, (1956, 1973), pp 1-140.

14. David Deutsch. The Fabric of Reality: The Science of Parallel Universes and Its Implications. London: Penguin, 1997.

15. А.К. Гуц. Теоретико-топосная модель мультиверса Дойча// Математические структуры и моделирование. 2001. Вып.8. С.76-90.

16. Silas R. Beane, Zohreh Davoudi, Martin J. Savage. Constraints on the Universe as a Numerical Simulation//arXiv:1210.1847v2, <http://arxiv.org/abs/1210.1847>

17. Bostrom N. Are you living in a computer simulation?//Philosophical Quarterly, Vol 53, No 211, 243, 2003.

18. Natalie Wolchover. Is Nature Unnatural?//Quanta Magazine, May 24, 2013.

19. Луценко Е.В. Критерии реальности и принцип эквивалентности виртуальной и "истинной" реальности // Научный журнал КубГАУ, 2004. – №06(008). С. 70 – 88. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2004/06/pdf/10.pdf>

20. Трунев А. П., Луценко Е. В. Астросоциотипология: Монография (научное издание). – Краснодар: КубГАУ, 2008, – 279 с.

21. Einstein A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917.

22. Einstein A. Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1931, 235—237.

23. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464;

24. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.

25. Трунев А.П. Гравитационные волны и квантовая теория Шредингера / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>

26. Трунев А.П. Gravitational waves and quantum theory / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1146 – 1161. – IDA [article ID]: 0961402078. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf>

27. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность и квантовая теория. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 с.

28. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

29. Bernard de Wit, Jan Louis. Supersymmetry and Dualities in various dimensions// arXiv: hep-th/9801132v2, 18 Feb 1998.

30. Bernard de Wit. Supergravity // arXiv: hep-th/0212245v1 19 Dec 2002.

31. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). - Pergamon Press, ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.

32. Kaluza Theodor. Zum Unitätsproblem in der Physik// Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.), 966–972. 1921.

33. Einstein A. Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhangs von Gravitation und Elektrizität// Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 23—25; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966, с. 83.

34. Einstein A., Bargmann V., and Bergmann P. On Five-dimensional Representation of Gravitation and Electricity/ Theodore von Karman Anniversary Volume, Pasadena, Calif. Inst. Technol., 1941, 212—225; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966, с. 543.
35. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике. – М., Гостехиздат, 1956. 152 с.
36. Hanson A.J. A Construction for Computer Visualization of Certain Complex Curves// cs.indiana.edu/~hansona/papers/CP2-94.pdf
37. Hai Lin, Baosen Wu, Shing-Tung Yau. Heterotic String Compactification and new Vector Bundles// arXiv:1412.8000v1 [hep-th] 26 Dec 2014.
38. Braun V, Candelas P., Davies R. A Three-Generation Calabi-Yau Manifold with Small Hodge Numbers// arXiv:0910.5464v1, 28 Oct, 2009.
39. Трунев А.П. Риманова геометрия и единая теория поля в 6D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2015. – №01(105). С. 161 – 186. – IDA [article ID]: 1051501008. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2015/01/pdf/08.pdf>
40. Mohr P.J., Newell D.B., Taylor B.N. CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2014// arXiv:1507.07956v1, 21 Jul 2015.
41. Роберт Орос ди Бартини. Некоторые соотношения между физическими константами// Доклады АН СССР, т. 163, № 4. 1965;
42. Robert Oros di Bartini. Relations between Physical Constants// Progress in Physics, Vol. 3, pp. 34-40, October, 2005.
43. Трунев А.П. Электрический заряд в 6D / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №10(104). С. 2154 – 2177. – IDA [article ID]: 1041410152. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/10/pdf/152.pdf>

References

1. Langacker P. Structure of the Standard Model// arXiv:hep-ph/0304186v1, 19 Apr 2003.
2. Leutwyler H. Progress in understanding Quantum Chromodynamics/ Schladming Winter School, 2012.
3. Schwartz M. D. Quantum Field Theory and the Standard Model. - Cambridge University Press, 1 ed., 2013.
4. Donoghue J.F., Golowich E., Holstein B.R. Dynamics of the Standard Model (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology). - Cambridge University Press, 2 ed., 2014.
5. Durr S., Fodor Z., Frison J. et all. Ab Initio Determination of Light Hadron Masses// Science, 21 November 2008: Vol. 322, no. 5905 pp. 1224-1227.
6. Weinberg S. The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe - 2nd edition, Basic Books, 1993.
7. Zeldovich, Y. B. The Cosmological Constant and the Theory of Elementary Particles// Soviet Physics Uspekhi vol. 11, 381-393, 1968.
8. Weinberg Steven. The Cosmological Constant Problems// arXiv:astro-ph/0005265v1 12 May 2000.
9. Rugh S.E. and Zinkernagel H. The Quantum Vacuum and the Cosmological Constant Problem//Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 33(4), 2002.

10. Burgess C.P. The Cosmological Constant Problem: Why it's hard to get Dark Energy from Micro-physics//arXiv:1309.4133v1 [hep-th] 16 Sep 2013

11. Trunев A.P. Metrika virtual'nyh mirov / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №09(093). S. 1569 – 1589. – IDA [article ID]: 0931309109. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/09/pdf/109.pdf>

12. Trunев A.P. Supergravitacija v 112D / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2016. – №03(117). S. 1263 – 12184. – IDA [article ID]: 1171603082. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/82.pdf>

13. Hugh Everett, III. The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics. Thesis, Princeton University, (1956, 1973), pp 1-140.

14. David Deutsch. The Fabric of Reality: The Science of Parallel Universes and Its Implications. London: Penguin, 1997.

15. A.K. Guc. Teoretiko-toposnaja model' mul'tiversa Dojcha// Matematicheskie struktury i modelirovanie. 2001. Vyp.8. S.76-90.

16. Silas R. Beane, Zohreh Davoudi, Martin J. Savage. Constraints on the Universe as a Numerical Simulation//arXiv:1210.1847v2, <http://arxiv.org/abs/1210.1847>

17. Bostrom N. Are you living in a computer simulation?//Philosophical Quarterly, Vol 53, No 211, 243, 2003.

18. Natalie Wolchover. Is Nature Unnatural?//Quanta Magazine, May 24, 2013.

19. Lucenko E.V. Kriterii real'nosti i princip jekvivalentnosti virtual'noj i "istinnoj" real'nosti // Nauchnyj zhurnal KubGAU, 2004. – №06(008). S. 70 – 88. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2004/06/pdf/10.pdf>

20. Trunев A. P., Lucenko E. V. Astrosociotipologija: Monografija (nauchnoe izdanie). – Krasnodar: KubGAU, 2008, – 279 s.

21. Einstein A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917.

22. Einstein A. Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitatstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1931, 235—237.

23. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464;

24. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.

25. Trunев A.P. Gravitacionnye volny i kvantovaja teorija Shredingera / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>

26. Trunев A.P. Gravitational waves and quantum theory / A.P. Trunев // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1146 – 1161. – IDA [article ID]: 0961402078. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf>

27. Trunев A.P. Geometricheskaja turbulentnost' i kvantovaja teorija. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 s.

28. Petrov A.Z. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

29. Bernard de Wit, Jan Louis. Supersymmetry and Dualities in various dimensions// arXiv: hep-th/9801132v2, 18 Feb 1998.
30. Bernard de Wit. Supergravity // arXiv: hep-th/0212245v1 19 Dec 2002.
31. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). - Pergamon Press, ISBN 978-0-08-016019-1, 1971.
32. Kaluza Theodor. Zum Unitätsproblem in der Physik// Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.), 966–972. 1921.
33. Einstein A. Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhangs von Gravitation und Elektrizität// Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1927, 23—25; Albert Jejnshitejn. Sobranie nauchnyh trudov. T. 2. – M., Nauka, 1966, s. 83.
34. Einstein A., Bargmann V., and Bergmann P. On Five-dimensional Representation of Gravitation and Electricity/ Theodore von Karman Anniversary Volume, Pasadena, Calif. Inst. Technol., 1941, 212—225; Albert Jejnshitejn. Sobranie nauchnyh trudov. T. 2. – M., Nauka, 1966, s. 543.
35. Rumer Ju. B. Issledovanija po 5-optike. – M., Gostehizdat, 1956. 152 s.
36. Hanson A.J. A Construction for Computer Visualization of Certain Complex Curves// cs.indiana.edu/~hanson/papers/CP2-94.pdf
37. Hai Lin, Baosen Wu, Shing-Tung Yau. Heterotic String Compactification and new Vector Bundles// arXiv:1412.8000v1 [hep-th] 26 Dec 2014.
38. Braun V, Candelas P., Davies R. A Three-Generation Calabi-Yau Manifold with Small Hodge Numbers// arXiv:0910.5464v1, 28 Oct, 2009.
39. Trunev A.P. Rimanova geometrija i edinaja teorija polja v 6D / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2015. – №01(105). S. 161 – 186. – IDA [article ID]: 1051501008. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2015/01/pdf/08.pdf>
40. Mohr P.J., Newell D.B., Taylor B.N. CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2014// arXiv:1507.07956v1, 21 Jul 2015.
41. Robert Oros di Bartini. Nekotorye sootnoshenija mezhdu fizicheskimi konstantami// Doklady AN SSSR, t. 163, № 4. 1965;
42. Robert Oros di Bartini. Relations between Physical Constants// Progress in Physics, Vol. 3, pp. 34-40, October, 2005.
43. Trunev A.P. Jelektricheskij zarjad v 6D / A.P. Trunev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №10(104). S. 2154 – 2177. – IDA [article ID]: 1041410152. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/10/pdf/152.pdf>