

УДК 530.12+537.86

UDC 530.12+537.86

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and mathematics

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В АППАРАТЕ ШТЕРНА-ГЕРЛАХА**SIMULATION OF PARTICLE DYNAMICS IN THE STERN-GERLACH APPARATUS**

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D., директор
Scopus Author ID: 6603801161
SPIN-код автора: 4945-6530

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D., C.E.O.
Scopus Author ID: 6603801161

Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

В работе развиты модели движения частиц в аппарате Штерна-Герлаха в рамках классической и квантовой механики. Представлены данные моделирования траекторий частиц и распределения атомов серебра на поверхности пластины при их осаждении. Установлено, что для получения экспериментально наблюдаемой двумерной фигуры распределения атомов необходимо предположить, что атомы не вовлекаются в прецессионное движение в магнитном поле, сохраняя направление магнитного момента, например, параллельно вектору индукции магнитного поля на протяжении всего времени движения в аппарате. Для получения реалистичной картины фигуры рассеяния атомов использована классическая модель движения и выражение силы, совместное с квантовой картиной движения частиц со спином $\frac{1}{2}$. Магнитное поле моделируется на основе оригинальных данных, опубликованных в работе Штерна и Герлаха, по распределению градиента компоненты индукции, связанной с расщеплением пучка. Квантовая модель движения частиц построена на основе уравнения Паули в приближении пограничного слоя. Установлено, что в такой модели в зависимости от исходной поляризации частиц пучок либо расщепляется на два, либо отклоняется к лезвию магнита или в противоположную сторону. Показано, что для условий задачи, воспроизводящих геометрические размеры и магнитное поле в аппарате Штерна-Герлаха, фигура рассеяния частиц по форме очертания похожа на экспериментально наблюдаемую фигуру

The model of the motion of particles in the Stern-Gerlach apparatus in the classical and quantum mechanics was developed. The data simulation of particle trajectories and distribution of silver atoms on the surface of the plate in their deposition are discussed. It was found that for the experimentally observed distribution of two-dimensional shapes of the atoms must be assumed that the atoms are not involved in the precession motion in a magnetic field, while maintaining the direction of the magnetic moment, for example, parallel to the induction vector of the magnetic field during the time of motion in the apparatus. To obtain a realistic picture of the figure of the scattering of atoms used a classical model of movement and expression of forces compatible with the quantum picture of the motion of particles with spin $\frac{1}{2}$. The magnetic field is simulated based on the original Stern-Gerlach data describing the distribution of the gradient of the induction components related to the splitting of the beam. Quantum model of particle motion is based on the Pauli equation in the boundary layer approximation. It is found that in this model, depending on the initial polarization of the particle, beam is split into either two or is deflected towards the magnet blade or in the opposite direction. It is shown that if the initial conditions for the task are reproducing the geometric dimensions and the magnetic field in the Stern-Gerlach apparatus, the figure of the scattering particles in the shape of the outline is similar to the experimentally observed shape

Ключевые слова: КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ, НЕОДНОРОДНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, ОПЫТ ШТЕРНА-ГЕРЛАХА, СПИН

Keywords: QUANTUM MECHANICS, CLASSICAL MECHANICS, MAGNETIC MOMENT, AN INHOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD, STERN-GERLACH EXPERIMENT, SPIN

Введение

Опыт Штерна-Герлаха [1-4] широко используется для демонстрации пространственного квантования, обусловленного наличием спина у атомов [5-8]. Ввиду исключительного значения эксперимента Штерна-Герлаха для квантовой механики движение частиц в их аппарате неоднократно было исследовано с разных сторон [9-18]. Исторически опыт Штерна-Герлаха был направлен на проверку гипотез Бора, Зоммерфельда и Дебая о пространственном квантовании момента [1, 5]. Отметим, что Бор предсказывал расщепление на два пучка, тогда как Зоммерфельд и Дебай предсказывали расщепление на три пучка [19].

Однако в настоящее время этот опыт считается своеобразным архетипом измерения квантовых свойств, поскольку в этом эксперименте впервые было открыто свойство пространственного квантования [5-18].

Экспериментальная установка Штерна и Герлаха [1-3] состояла из печки, в которой при температуре около 1300С испарялось серебро, и электромагнита с южным полюсом в форме лезвия длиной 3.5 см, в поле которого отклонялся пучок атомов серебра – рис. 1. Пучок атомов формировался при истечении из печки через круглое отверстие площадью $3 \cdot 10^{-3}$ квадратных миллиметров. Этот пучок падал на диафрагму в форме щели длиной 0.8 мм и шириной 0.03-0.04 мм, сделанную в платиновой фольге, установленной на расстоянии 2.5 см от первой диафрагмы вплотную к передней кромке магнита. Щель была ориентирована длинной стороной перпендикулярно лезвию ножа электромагнита – рис. 1, а.

Вплотную к задней кромке магнита была приставлена пластина, на которой происходило осаждение атомов серебра. В установке поддерживался вакуум около 10^{-5} миллиметров ртутного столба. Отдельный эксперимент по <http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/60.pdf>

осаждению атомов длился от 4 до 8 часов. За это время атомы могли образовать заметный слой серебра, который изучался под микроскопом. В отсутствии магнитного поля атомы при осаждении образовывали фигуру, которая была проекцией щели – левый рис. 2.

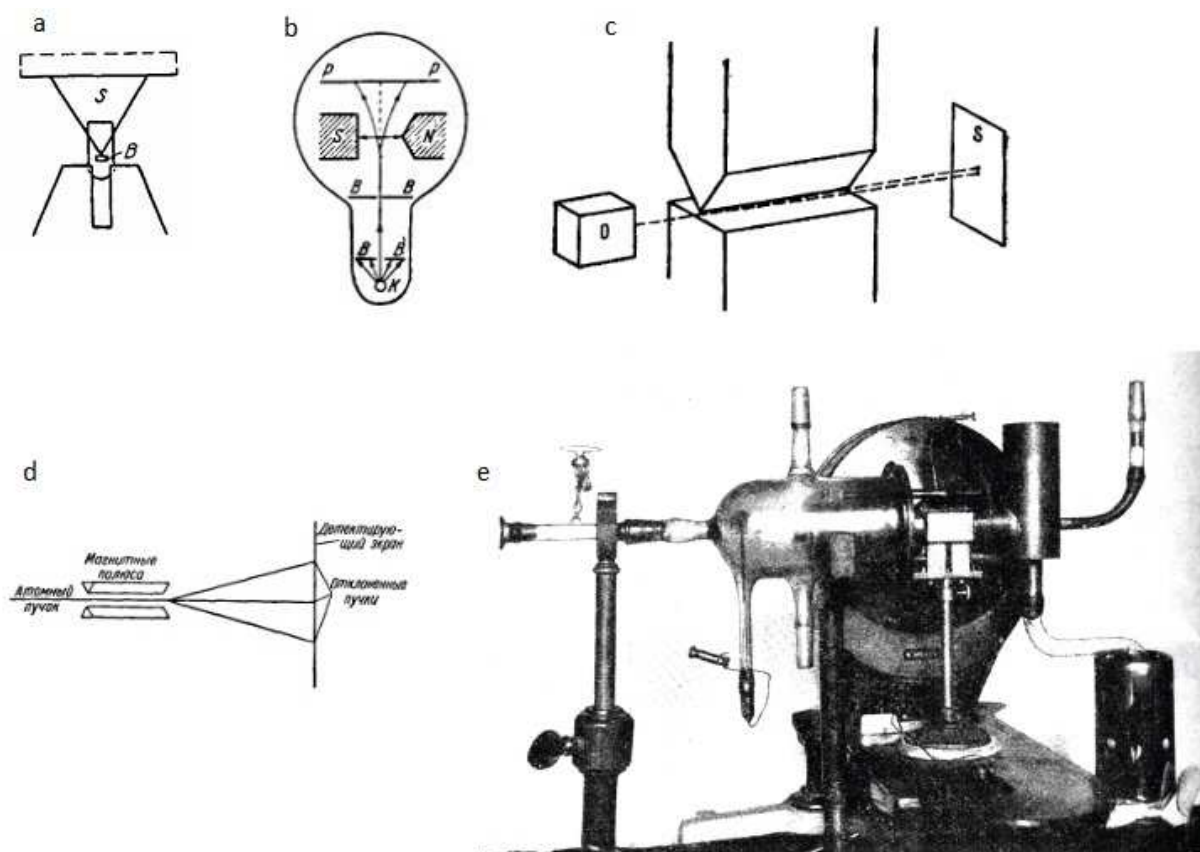


Рис. 1. Общий вид (е) и схема аппарата Штерна-Герлаха по данным различных авторов: а – расположение щели В относительно лезвия магнита S [3]; б – «от шарика К атомный пучок, вырезаемый диафрагмой В, проходит через сильное неоднородное магнитное поле NS, а затем этот пучок перехватывается пластинкой Р» [5]; с – «Один полюс имел вид лезвия, а второй, помещенный против него, был плоским либо с выемкой» [6]; д – [7].

Проекция щели имела следующие размеры: длина 1.1, ширина в самом узком месте 0.06 мм и в самом широком месте 0.1 мм [3]. Эти данные позволяют оценить компоненты скорости пучка при истечении из щели. При наличии магнитного поля пучок атомов серебра рассеивался, в результате на пластине возникала своеобразная фигура – правый рис. 2. Осуществлявший эти эксперименты Герлах отправил телеграмму Штерну со словами «Бор оказался прав!» и фотографию фигуры рассеяния атомов Бору со словами «мы поздравляем Вас с подтверждением вашей теории!» [19].

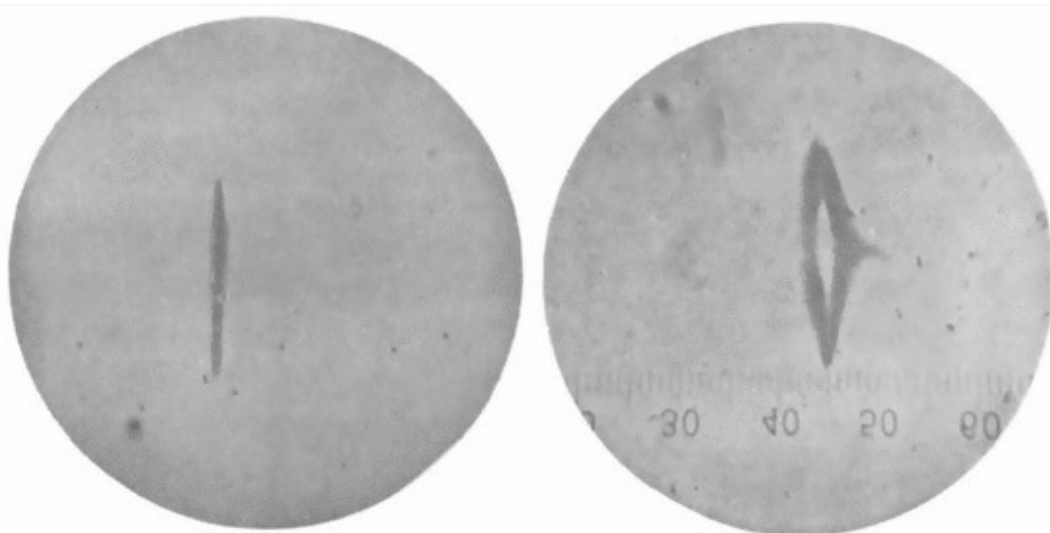


Рис. 2. Проекция щели (слева) и фигура, возникающая при рассеянии атомов серебра в аппарате Штерна-Герлаха в магнитном поле (справа) по данным [3].

Арнольд Зоммерфельд - автор монографии по квантовой механике, первое издание которой было опубликовано еще в 1919 г, предложил следующую интерпретацию результатов эксперимента: «Как можно истолковать эти две полоски на фотографии? Очевидно, ориентационным квантованием атомов серебра. Как только атом попадает в магнитное поле, <http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/60.pdf>

его магнитный момент ориентируется параллельно или антипараллельно силовым линиям поля» [5].

Аналогичную интерпретацию, охватывающую более общий случай, дал Борн [6]: «Штерн добился достаточной неоднородности, удачно сконструировав полюсы магнита, создающего поле. Один полюс имел вид лезвия, а второй, помещенный против него, был плоским либо с выемкой (смотрите рис. 1, с). Благодаря этому магнитные силовые линии сгущались у лезвия, так что напряженность поля около него была значительно больше, чем у другого полюса. Выбрасываемый из печи сквозь систему диафрагм тонкий пучок атомов пролетал между полюсами. Каждый отдельный атом отклонялся в неоднородном поле в соответствии с величиной и направлением его момента. Следы отдельных атомов можно было увидеть на экране (усиливая их в случае необходимости, как в фотографии). С классической точки зрения на экране должен был получиться при этом расширившийся пучок — ведь по классической теории моменты летящих сквозь поле атомов могут иметь все направления относительно поля. Но в квантовой теории, с учетом пространственного квантования, возможны не все ориентации, а лишь некоторое конечное число их.... Следовательно, на экране след пучка будет расщеплен на конечное число отдельных следов. Реально на экране должно появиться в точности $2j+1$ отдельных следов, если атомы находятся в состоянии с внутренним квантовым числом j ».

Бом [7] дает похожую интерпретацию: «Поскольку перед тем, как атомы попадают в магнитное поле, нет предпочтительных ориентации L_z , то очевидно, что атомы с каждым возможным значением L_z будут встречаться одинаково часто и беспорядочным образом по мере их испарения с металла. Поэтому на экране, получается, по одному пятну для каждого из возможных <http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/60.pdf>

значений L_z . Так как полное число возможных значений составляющих L_z равно $2l+1$, то можно определить l простым подсчетом пятен на экране....

Надо отметить, что опыт Штерна и Герлаха дает прямое доказательство квантовой природы момента количества движения, поскольку по классической теории должен быть непрерывный ряд значений моментов количества движения и, следовательно, непрерывный ряд точек на экране, в которые попадают атомы».

Наконец, авторы [8] даже не утруждают себя описание аппарата Штерна-Герлаха и их опытов с атомами серебра, но в двух главах просто освещают принципы квантования спина частиц, которые могут быть открыты с использованием некоей усовершенствованной теоретической модели этого аппарата. Свою теорию они начинают словами: «Начнем с явления расщепления пучка атомов на три отдельных пучка в опыте Штерна-Герлаха. Вы помните, что если имеется неоднородное магнитное поле, созданное магнитом с острым полюсным наконечником, и если через прибор пропустить пучок частиц, то этот пучок может расщепиться на несколько пучков; их количество зависит от сорта атома и его состояния».

Таким образом, этот краткий обзор показывает, что квантование момента атомов серебра было признано основным механизмом расщепления пучка представителями старой школы квантовой механики [5-8]. Никакие альтернативные гипотезы не рассматривались. В то время это казалось очевидным, однако в наше время, когда поставлен вопрос о происхождении квантовой механики [20-23], уместно будет рассмотреть и различные альтернативные гипотезы.

В работе Штерна [4] и в монографиях [5-7] предполагается, что движение атомов в аппарате Штерна-Герлаха описывается уравнениями <http://ej.kubagro.ru/2016/03/pdf/60.pdf>

классической механики, в которых учитывается сила, действующая на частицу, обладающую магнитным моментом в форме

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \quad (1)$$

Роль квантовой механики сводится к утверждению, что магнитный момент в уравнении (1) квантуется пропорционально угловому моменту или спину. В таком виде теория рассеяния атомов в неоднородном магнитном поле использовалась для решения практических задач, связанных с определением магнитного момента атомов по методу Штерна-Герлаха [16-18].

Однако такое положение теории нельзя признать удовлетворительным, поэтому предпринимались многочисленные попытки описания движения частиц в аппарате Штерна-Герлаха в рамках квантовой механики [8-16]. При этом мало кого интересовали детали эксперимента [2-3] и специфический вид фигуры рассеяния атомов, представленной на левом рис. 2.

В настоящей работе в рамках классической и квантовой механики исследовано движение частиц в оригинальном аппарате Штерна-Герлаха [3]. Нас, прежде всего, интересовала возможность достаточно точного воспроизведения фигуры рассеяния, приведенной на рис. 2, а также проверка различных альтернативных гипотез расщепления пучка атомов.

Динамика частиц

Рассмотрим движение атомов в аппарате Штерна-Герлаха. Предполагается, что атомы во внешнем магнитном поле движутся как классические частицы под влиянием силы (1), имеем [4-7]

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \quad (2)$$

Здесь m – масса атома. Обозначим W_x, W_y, W_z – расстояние от диафрагмы до экрана, высота щели и ее ширина соответственно. Граничные условия задаются в плоскости диафрагмы в сечении $x = 0$ в форме

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & u_x(0) &= u_x, \\ y(0) &= p, & u_y(0) &= u_y(p), \quad -W_y/2 \leq p \leq W_y/2 \\ z(0) &= z_M + q, & u_z(0) &= u_z(p, q), \quad -W_z/2 \leq q \leq W_z/2 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь (p, q) – координаты точки в пределах щели, z_M – расстояние от центра щели до лезвия магнита – рис. 3. Скорость частицы в плоскости щели задается в соответствии с температурой пучка в предположении, что выполняется распределение Максвелла. Штерн в ряде публикаций, включая [2] показал, что среднее значение скорости в пучке соответствует

$$u_0 = \sqrt{\frac{7k_B T_0}{2m}} \quad (4)$$

$k_B = 1.3806488 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ – постоянная Больцмана, $T_0 = 1573.15 \text{ K}$ – температура атомов в печи. Для атомов серебра $m = 1.79122 \times 10^{-25} \text{ kg}$ находим из уравнения (4) $u_0 = 651.461 \text{ m/s}$.

Используя данные [3] в пределах щели положим:

$$\begin{aligned} u_z &\approx u_0 \\ u_y(p) &= (0.3/350)(2p/W_y)u_z, \quad -W_y/2 \leq p \leq W_y/2 \\ u_z(p, q) &= (0.1/350)(2q/W_z)[1 - (2p/W_y)^2]u_z, \quad -W_z/2 \leq q \leq W_z/2 \end{aligned} \quad (5)$$

Для этих данных расчетная проекция щели представлена на рис 3, d.

Моделирование траекторий частиц в классической механике

Как известно, в аппарате Штерна-Герлаха был использован электромагнит фирмы Hartmann & Braun [19]. Данные по распределению градиента $\partial B_z / \partial z$ в зависимости от расстояния до лезвия магнита были

опубликованы в работе [2]. В настоящей работе магнитное поле представляется как суперпозиция поля двух токов, текущих в противоположных направлениях вдоль лезвия ножа магнита расположенных в точках $(\pm y_0, z_0)$, где $y_0 = W_z, z_0 = 0.6W_y$. Поле двух токов описывается выражениями

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{G(z+z_0)}{(y+y_0)^2+(z+z_0)^2} - \frac{G(z+z_0)}{(y-y_0)^2+(z+z_0)^2} \\ B_z &= \frac{G(y-y_0)}{(y+y_0)^2+(z+z_0)^2} - \frac{G(y+y_0)}{(y-y_0)^2+(z+z_0)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Выражения (6) позволяют вычислить градиенты поля в виде

$$\begin{aligned} B_{yy} &= \frac{-2G(z+z_0)(y+y_0)}{[(y+y_0)^2+(z+z_0)^2]^2} + \frac{2G(z+z_0)(y-y_0)}{(y-y_0)^2+(z+z_0)^2} \\ B_{yz} &= \frac{G}{(y+y_0)^2+(z+z_0)^2} - \frac{G}{(y-y_0)^2+(z+z_0)^2} + \\ & \frac{-2G(z+z_0)^2}{[(y+y_0)^2+(z+z_0)^2]^2} + \frac{2G(z+z_0)^2}{(y-y_0)^2+(z+z_0)^2} \\ B_{zy} &= \frac{-G}{(y+y_0)^2+(z+z_0)^2} + \frac{G}{(y-y_0)^2+(z+z_0)^2} + \\ & \frac{2G(y+y_0)^2}{[(y+y_0)^2+(z+z_0)^2]^2} - \frac{2G(y-y_0)^2}{(y-y_0)^2+(z+z_0)^2} \\ B_{zz} &= \frac{-2G(z+z_0)(y-y_0)}{[(y+y_0)^2+(z+z_0)^2]^2} + \frac{2G(z+z_0)(y+y_0)}{(y-y_0)^2+(z+z_0)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь нормировочный множитель G подбирается из условия согласования с экспериментальными данными [2] – рис. 3. Распределение поля относительно щели показано на рис. 3, а. Сопоставление градиента $\partial B_z / \partial z$ с экспериментальными данными [2] показано на рис. 3, б.

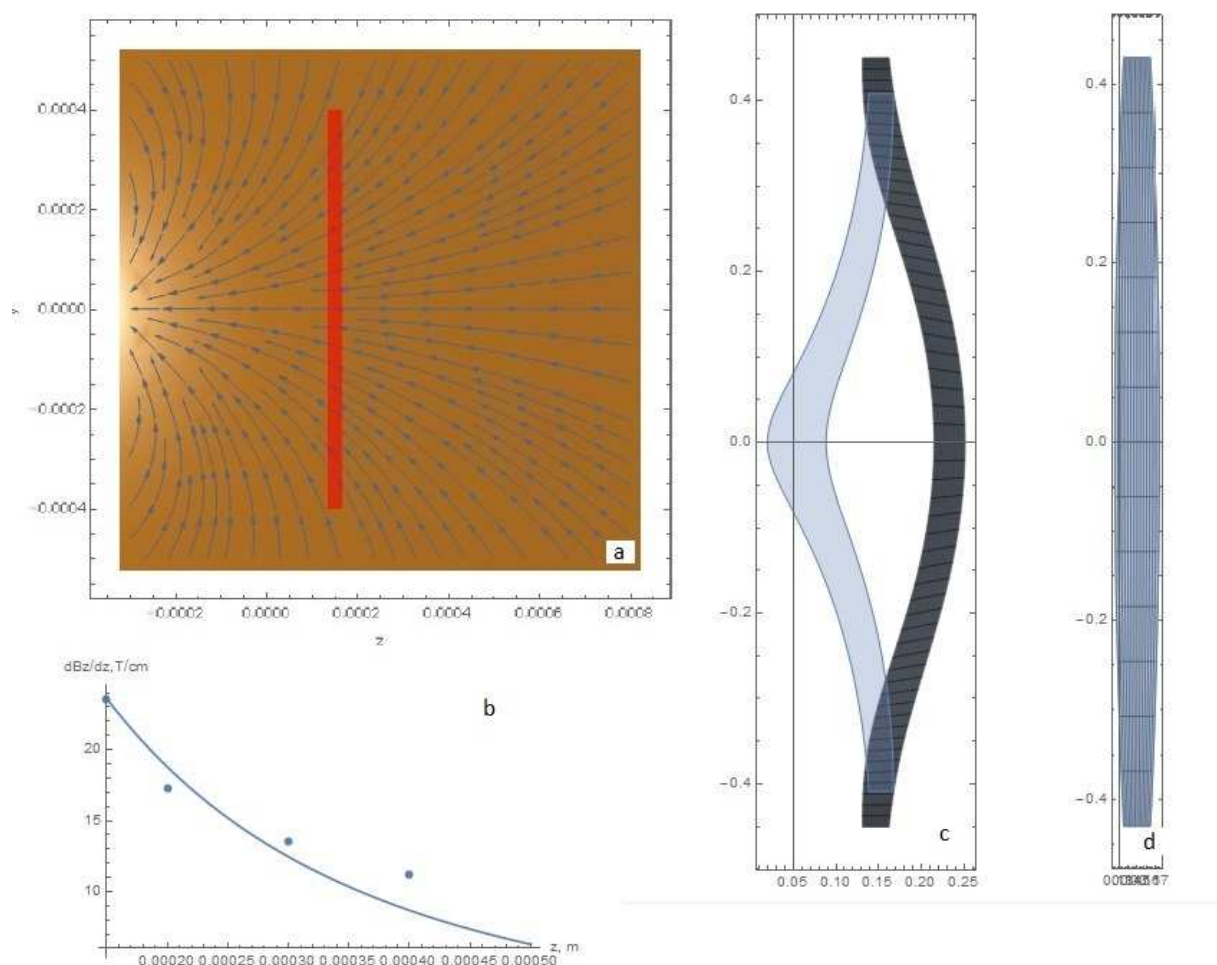


Рис. 3. а) Силовые линии индукции магнитного поля в окрестности щели диафрагмы (прямоугольник красного цвета); б) градиент $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ в зависимости от расстояния до острия лезвия магнита вместе с данными [2]; в) фигура рассеяния частиц в случае квантования момента; д) проекция щели, вычисленная в соответствии с начальными данными (5).

В соответствии с гипотезой Зоммерфельда [5] действующие силы определяются из выражения (1), в котором магнитный момент принимает два значения, соответствующие ориентации по полю или против поля:

$$\boldsymbol{\mu} = \pm \mu_B \mathbf{B} / B \quad (8)$$

Здесь $\mu_B = 1.27401 \times 10^{-24} \text{ J/T}$ – магнетон Бора. Подставляя выражение (8) в уравнение (1) и предполагая, что $\mathbf{B} = (0, 0, B_z(z))$ находим

$$F_z = \pm \mu_B \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (9)$$

Уравнение (2) вместе с выражением силы (9) широко используется для моделирования движения частиц в аппаратах типа Штерна-Герлаха [16-18]. Основная задача, которая ставится в этом случае, это определение величины расщепления в плоскости симметрии $y = 0$. Если атом обладает моментом l , то должно быть расщепление на $2l + 1$ пучков, что позволяет определить значение l . Однако эта модель не позволяет установить вид фигуры рассеяния атомов, поскольку используется выражение силы (9), справедливое только в плоскости симметрии $y = 0$.

Наиболее естественное расширение описанной выше модели заключается в том, что вместо условия квантования вводится некоторый угол между направлением момента и вектором индукции магнитного поля, в результате чего выражение силы (1) принимает вид

$$\begin{aligned} F_y &= \mu_B \cos \phi \frac{B_y}{B} \frac{\partial B_y}{\partial y} + \mu_B \sin \phi \frac{B_z}{B} \frac{\partial B_z}{\partial y}, \\ F_z &= \mu_B \cos \phi \frac{B_y}{B} \frac{\partial B_y}{\partial z} + \mu_B \sin \phi \frac{B_z}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (10)$$

Модель (10) воспроизводит квантовые свойства системы, рассмотренные ниже. Если в уравнениях (10) мы положим $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$, $\mathbf{B} = (0, 0, B_z(z))$, то придем к уравнению (9). Результаты

моделирования координат траекторий частиц на плоскости в сечении $x = W_x$

по уравнениям (2)-(7) с выражением силы в форме (10) представлены на среднем рис. 3. Положение атомов в пределах фигуры рассеяния представляется парой координат $y(t_0, p, q), z(t_0, p, q)$, которые отображают частицу, начавшую движение в некоторой точке с координатами $y(0) = p, z(0) = z_M + q$, лежащей в пределах щели диафрагмы. Отметим качественное совпадение фигуры рассеяния на рис. 3 с экспериментально наблюдаемой фигурой, представленной на рис. 2.

Если предположить, что есть отклонение от точного «квантового» значения $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$, то получим ряд промежуточных моделей между точной квантовой моделью и классической моделью, в которой угол изменяется непрерывно в пределах $0 \leq \phi \leq 2\pi$ - рис. 4. В этом случае, как следует из данных, приведенных на рис. 4, в классическом случае пучок не расщепляется, а фигура рассеяния получается сплошной. Отметим, что данные на рис. 4 соответствуют значениям координаты частицы в пределах щели $-W_y/2 \leq p \leq W_y/2, q = 0$.

Однако это справедливо только для модели (10), которая вытекает из предположения (8) о поляризации пучка вдоль направления магнитного поля. Можно отказаться от этого предположения и просто положить в уравнении (2), что

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}), \boldsymbol{\mu} = \mu_B (\cos \theta, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi) \quad (11)$$

Результаты моделирования траекторий частиц по уравнениям (2)-(7) с выражением силы в форме (11) представлены на рис. 5 для случая $\theta = \pi/2$ - цветные рисунки, и для случая $0 \leq \theta \leq \pi$ - серые рисунки для разной высоты щели - $W_y = 0.6; 0.3; 0.1$ мм соответственно. Как следует из данных,

приведенных на рис. 5, высота и ширина фигуры рассеяния, как и ее внешний вид не согласуется с экспериментальными данными [2]. Однако существенным результатом можно считать расщепление на два пучка в средней части фигуры, хотя никакого квантового механизма в модели (11) не предполагается.

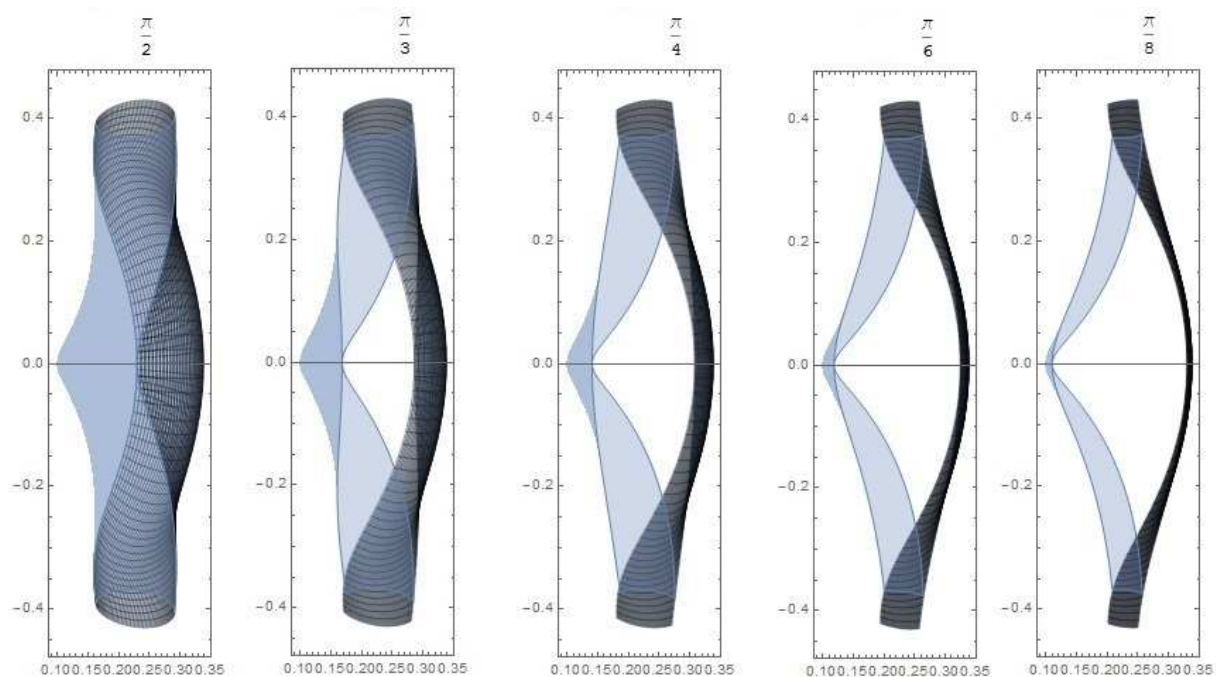


Рис. 4. Фигура рассеяния для частиц, покидающих щель из точки с координатами $-W_y/2 \leq p \leq W_y/2, q = 0$ для различных углов $-\phi_0 \pm \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \phi_0 \pm \frac{\pi}{2}$.

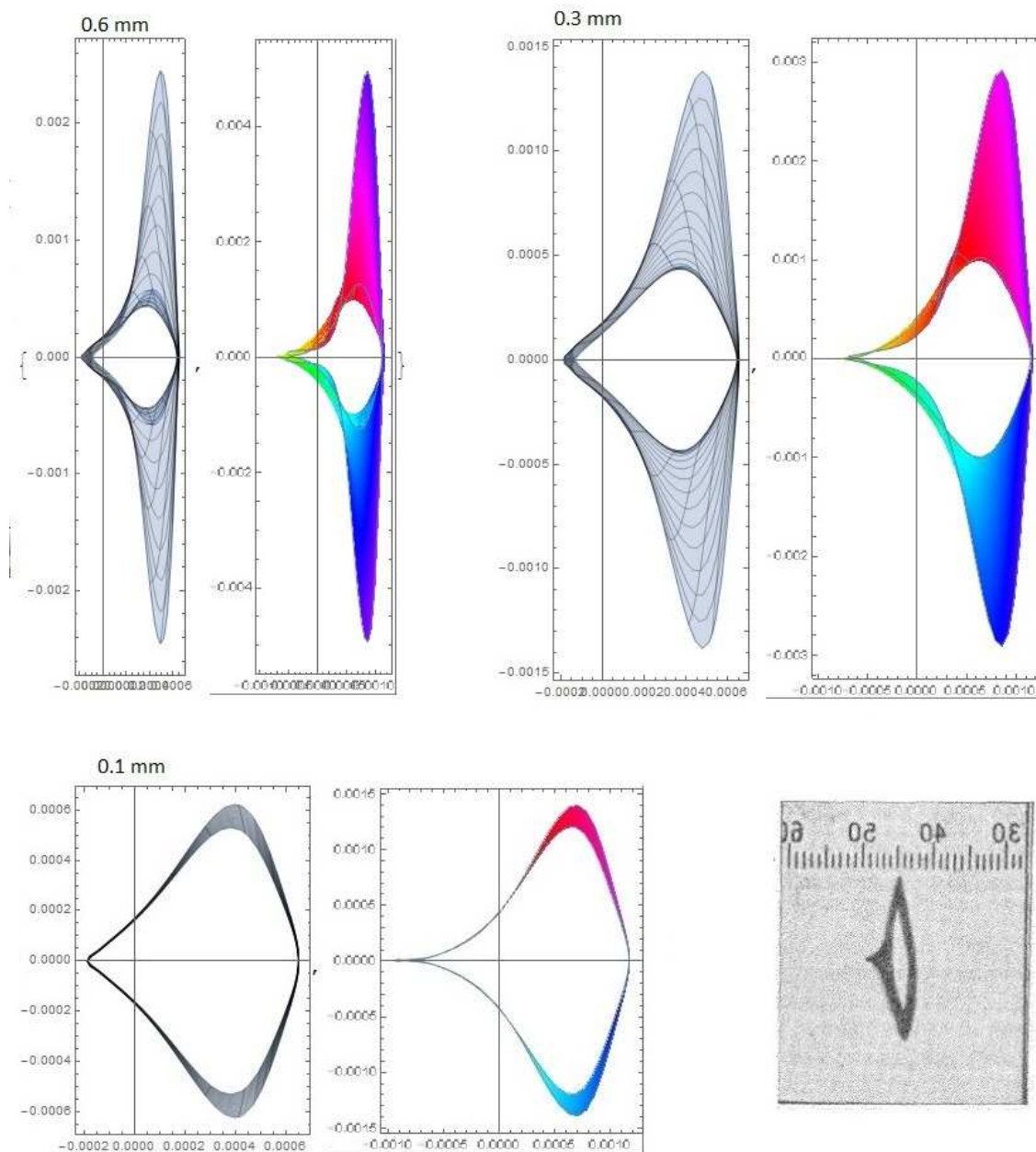


Рис. 5. Фигура рассеяния для частиц, покидающих щель из точки с координатами $-W_y/2 \leq p \leq W_y/2, q = 0$ для различных углов $0 \leq \phi \leq 2\pi, \theta = \pi/2$ - цветные рисунки и $0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$ - серые рисунки. Высота щели указана над рисунками.

Квантовое описание эксперимента Штерна-Герлаха

Отметим, что классическая частица, обладающая магнитным моментом, испытывает во внешнем магнитном поле не только влияние силы (1), но и момента сил, что приводит к изменению механического углового момента в соответствии с уравнением

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}] \quad (12)$$

В случае линейной связи между угловым и магнитным моментом уравнение (12) описывает прецессию углового момента с характерной частотой $\omega_0 = \frac{\mu_B B}{\eta}$. Поскольку, однако предполагается, что магнитный момент атомов серебра квантуется, то вместо уравнения (12) имеет место квантовое движение в соответствии с уравнением Паули [11-12, 24].

Как известно движение нейтральных частиц в магнитном поле в нерелятивистском приближении описывается волновой функцией, которая является двухкомпонентным спинором и удовлетворяет уравнению [24]

$$i\eta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\eta^2}{2m} \nabla^2 \psi + \mu_B (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ - матрицы Паули. Полагая, что вектор индукции магнитного поля имеет вид $\mathbf{B} = (0, B_y, B_z)$, находим систему уравнений:

$$\begin{aligned} i\eta \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= -\frac{\eta^2}{2m} \nabla^2 \psi_1 + \mu_B (B_z \psi_1 - iB_y \psi_2), \\ i\eta \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= -\frac{\eta^2}{2m} \nabla^2 \psi_2 - \mu_B (B_z \psi_2 - iB_y \psi_1) \end{aligned} \quad (14)$$

Систему уравнений (14) будем решать численно в следующих приближениях:

- 1) Считаем, что масштабы изменения величин вдоль направления пучка, вдоль щели и поперек нее пропорциональны соответствующим масштабам W_x, W_y, W_z - расстояние от диафрагмы до экрана, высоте щели и ее ширине соответственно;
- 2) предполагается, что движение частиц вдоль направления пучка является свободным, следовательно, решение уравнения (13) может быть представлено в форме бегущей волны $\psi \sim \exp(ik_x x + i\omega t)$.

В этих предположения система уравнений (14) может быть приведена к виду

$$i\eta\omega \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{\eta^2}{2mW_z^2} \psi_{\zeta\zeta} + \mu_B (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Здесь введены новые переменные $\xi = k_x x + \omega t$, $\zeta = z/W_z$. Отметим, что решение уравнения (15) зависит от координаты y как от параметра через распределение магнитного поля и начальные данные. Учитывая, что исследуемый пучок частиц является достаточно узким, используем разложение в степенные ряды для компонент магнитного поля в форме

$$B_y = -B_0 y [1 + 2(h+z)/L]/W_z, \quad B_z = B_0 (z+h) [1 + (h+z)/L]/W_z \quad (16)$$

Здесь параметры B_0, h, L связаны с параметрами G, y_0, z_0 , фигурирующими в выражениях (6). Отметим, что $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, как для выражений компонент поля в форме (6), так и для выражений (16).

Для уравнения (15) поставим следующую задачу о распаде начального состояния:

$$\psi(0, \zeta) = \exp(-y^2 / W_y^2 - \zeta^2 / 2) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \psi(t, -L) = \psi(t, L) \quad (17)$$

Результаты численного моделирования задачи (15)-(17) приведены на рис. 6-7.

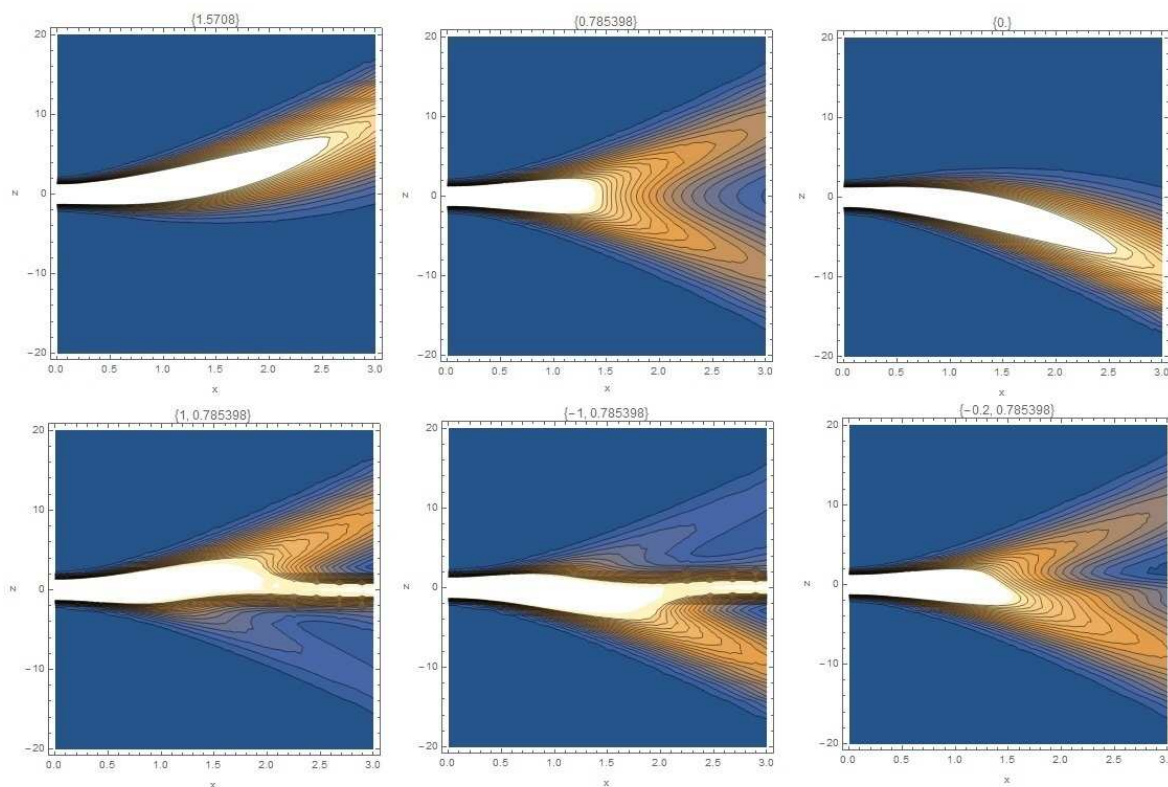


Рис. 6. Распад начального состояния в магнитном поле: верхние рисунки $y = 0; \phi = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0$ соответственно; нижние рисунки $\phi = \frac{\pi}{4}; y/W_y = 1, -1, -0.2$ соответственно.

Из данных, приведенных на рис.6 следует, что чистые состояния, соответствующие $\phi = \frac{\pi}{2}, 0$ отклоняются в магнитном поле строго вверх или

вниз, а смешанные состояния со значением $\phi = \frac{\pi}{4}$ распадаются на два пучка одинаковой интенсивности.

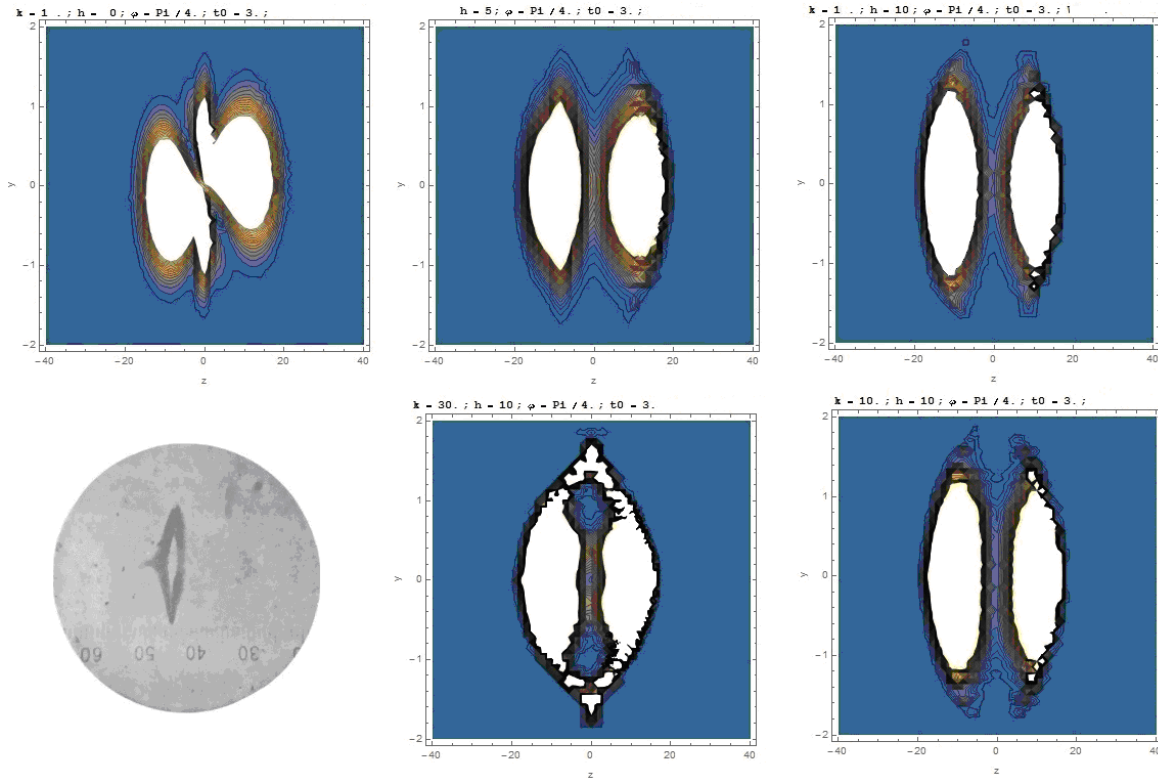


Рис. 7. Распад начального состояния в магнитном поле: при $k = W_y / W_z = 30$ в плоскости (y, z) образуется замкнутая фигура – нижний средний рисунок, которая по форме очертания похожа на экспериментально наблюдаемую фигуру.

Данные, приведенные на рис. 7 показывают различные варианты формирования фигуры рассеяния частиц, в зависимости от параметра h характеризующего положение щели относительно полюса магнита и параметра $k = W_y / W_z$, характеризующего геометрию щели. Отметим, что в

квантовом случае всегда есть разделение на два пучка, однако фигура рассеяния получается не столь выразительная, как в классическом случае – рис. 3-5.

Наконец, заметим, что выражение силы (10) следует из системы уравнений (14) в предположении, что существует отображение, которое переводит квантовую картину движения – рис. 6, в классическую картину, в которой волновая функция заменяется пучком траекторий. Априори не ясно, существует ли такое отображение в данной задаче [13], хотя классическая механика и используется повсеместно для моделирования движения частиц в аппарате Штерна-Герлаха [9, 17-18]. Поскольку результаты, представленные на рис. 3-4, не противоречат экспериментальным данным [3] и, более того, согласуются с ними качественно и количественно, то можно рассматривать выражения (10) как реалистичную модель силы действующей на частицы со спином $\frac{1}{2}$ в магнитном поле.

Библиографический список

1. Otto Stern. Ein Weg zur experimentellen Prufung der Richtungsquantelung im Magnetfeld//Zeitschrift fur Physik, 1921, Volume 7, Issue 1, pp 249-253
2. W. Gerlach, O. Stern. Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms//Zeitschrift fur Physik, 1922, Volume 8, Issue 1, pp 110-111
3. W. Gerlach, O. Stern. Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld, Zeitschrift fur Physik 9 (1922) 349-352
4. Otto Stern. Bemerkungen uber die Auswertung der Aufspaltungsbilder bei der magnetischen Ablenkung von Molekularstrahlen// Zeitschrift fur Physik, Volume 41, Issue 5, pp 563-568, 1927.
5. А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры. Т. 1. – ГИТТЛ, Москва, 1956.
6. М. Борн. Атомная физика.- М., Мир, 1965.
7. D. Bohm. Quantum theory. - Prentice Hall, Inc., New York, 1951; Д. Бом. Квантовая теория. М., Наука, 1965.
8. Р.Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Том 8. Квантовая механика -1. – М., Мир, 1966.
9. S. Cruz-Barrios, J. Gomez-Camacho. Semiclassical description of Stern-Gerlach experiments//arXiv:quant-ph/0010079, Phys. Rev. A 63, 012101, 30 Nov, 2000.

10. John Ashmead. A Stern-Gerlach Experiment in Time//arXiv:quant-ph/0306007,1 Jun 2003
11. G. Potel, F. Barranco, S. Cruz-Barrios, J. Gomez-Camacho. Quantum mechanical description of Stern-Gerlach experiments// Phys. Rev. A 71, 052106, 27 May, 2005.
12. Michel Gondran, Alexandre Gondran. A complete analysis of the Stern-Gerlach experiment using Pauli spinors//arXiv:quant-ph/0511276, 30 Nov 2005.
13. M. Dugic, M. Arsenijevic, J. Jeknic-Dugic. On the existence of the "classical trajectories" of atoms in the Stern-Gerlach experiment// arXiv:0812.1677v1, 9 Dec, 2008.
14. Nirupam Dutta¹, and Ansuman Dey. Blurred path-spin entanglement in Stern-Gerlach apparatus: interplay between magnetic inhomogeneity and Larmor precession// arXiv:1410.4396v1 [nucl-th] 16 Oct, 2014.
15. Jared Rees Stenson. REPRESENTATIONS FOR UNDERSTANDING THE STERN-GERLACH EFFECT. Brigham Young University, August 2005.
16. Jeff Lieberman. The Stern Gerlach Experiment, Massachusetts Institute of Technology, June 22, 1998.
17. C. Weiser and P.E. Siska. Analysis of splitting patterns from Stern-Gerlach magnetic deflection of supersonic molecular beams: application to M_j-state-resolved deflection of J= 2 atoms//Z. Phys. D - Atoms, Molecules and Clusters 10, 165-169 (1988)
18. F.W. Payne, Wei Jiang, J.W. Emmert, Jun Deng, and L.A. Bloomfield. Magnetic structure of free cobalt clusters studied with Stern-Gerlach deflection experiments//Phys. Rev. B 75, 094431, 27 March, 2007.
19. J. Peter Toennies, Horst Schmidt-Bocking, Bretislav Friedrich, Julian C.A. Lower. Otto Stern (1888-1969): The founding father of experimental atomic physics// <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1109/1109.4864.pdf> September 22, 2011.
20. Stephen L. Adler. Statistical Dynamics of Global Unitary Invariant Matrix Models as Pre-Quantum Mechanics// arXiv:hep-th/0206120v1 13 Jun 2002.
21. Stephen L. Adler. Where is quantum theory headed? // arXiv:1401.0896 [quant-ph], 5 Jan 2014.
22. Ricardo Gallego Torrome´. On the emergence of quantum mechanics, diffeomorphism invariance and the weak equivalence principle from deterministic Cartan-Randers systems// arXiv:1402.5070v1 [math-ph], 20 Feb 2014.
23. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность и квантовая теория. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 с.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. IV/В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Квантовая электродинамика. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, Гл. Ред. Физ.-мат. Лит., 1989, - 728 с.

References

1. Otto Stern. Ein Weg zur experimentellen Prufung der Richtungsquantelung im Magnetfeld//Zeitschrift fur Physik, 1921, Volume 7, Issue 1, pp 249-253
2. W. Gerlach, O. Stern. Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms//Zeitschrift fur Physik, 1922, Volume 8, Issue 1, pp 110-111
3. W. Gerlach, O. Stern. Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld, Zeitschrift fur Physik 9 (1922) 349-352

4. Otto Stern. Bemerkungen über die Auswertung der Aufspaltungsbilder bei der magnetischen Ablenkung von Molekularstrahlen// Zeitschrift für Physik, Volume 41, Issue 5, pp 563-568, 1927.
5. A. Zommerfel'd. Stroenie atoma i spektry. T. 1. – GITTL, Moskva, 1956.
6. M. Born. Atomnaja fizika.- M., Mir, 1965.
7. D. Bohm. Quantum theory. - Prentice Hall, Inc., New York, 1951; D. Bom. Kvantovaja teorija. M., Nauka, 1965.
8. R. Fejnman, R. Lejton, M. Sjends. Fejnmanovskie lekcii po fizike. Tom 8. Kvantovaja mehanika -1. – M., Mir, 1966.
9. S. Cruz-Barrios, J. Gomez-Camacho. Semiclassical description of Stern-Gerlach experiments//arXiv:quant-ph/0010079, Phys. Rev. A 63, 012101, 30 Nov, 2000.
10. John Ashmead. A Stern-Gerlach Experiment in Time//arXiv:quant-ph/0306007, 1 Jun 2003
11. G. Potel, F. Barranco, S. Cruz-Barrios, J. Gomez-Camacho. Quantum mechanical description of Stern-Gerlach experiments// Phys. Rev. A 71, 052106, 27 May, 2005.
12. Michel Gondran, Alexandre Gondran. A complete analysis of the Stern-Gerlach experiment using Pauli spinors//arXiv:quant-ph/0511276, 30 Nov 2005.
13. M. Dugic, M. Arsenijevic, J. Jeknic-Dugic. On the existence of the "classical trajectories" of atoms in the Stern-Gerlach experiment// arXiv:0812.1677v1, 9 Dec, 2008.
14. Nirupam Dutta¹, and Ansuman Dey. Blurred path-spin entanglement in Stern-Gerlach apparatus: interplay between magnetic inhomogeneity and Larmor precession// arXiv:1410.4396v1 [nucl-th] 16 Oct, 2014.
15. Jared Rees Stenson. REPRESENTATIONS FOR UNDERSTANDING THE STERN-GERLACH EFFECT. Brigham Young University, August 2005.
16. Jeff Lieberman. The Stern Gerlach Experiment, Massachusetts Institute of Technology, June 22, 1998.
17. C. Weiser and P.E. Siska. Analysis of splitting patterns from Stern-Gerlach magnetic deflection of supersonic molecular beams: application to M_j-state-resolved deflection of J= 2 atoms//Z. Phys. D - Atoms, Molecules and Clusters 10, 165-169 (1988)
18. F.W. Payne, Wei Jiang, J.W. Emmert, Jun Deng, and L.A. Bloomfield. Magnetic structure of free cobalt clusters studied with Stern-Gerlach deflection experiments//Phys. Rev. B 75, 094431, 27 March, 2007.
19. J. Peter Toennies, Horst Schmidt-Bocking, Bretislav Friedrich, Julian C.A. Lower. Otto Stern (1888-1969): The founding father of experimental atomic physics// <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1109/1109.4864.pdf> September 22, 2011.
20. Stephen L. Adler. Statistical Dynamics of Global Unitary Invariant Matrix Models as Pre-Quantum Mechanics// arXiv:hep-th/0206120v1 13 Jun 2002.
21. Stephen L. Adler. Where is quantum theory headed? // arXiv:1401.0896 [quant-ph], 5 Jan 2014.
22. Ricardo Gallego Torrome'. On the emergence of quantum mechanics, diffeomorphism invariance and the weak equivalence principle from deterministic Cartan-Randers systems// arXiv:1402.5070v1 [math-ph], 20 Feb 2014.
23. Trunev A.P. Geometricheskaja turbulentnost' i kvantovaja teorija. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 s.

24. Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaja fizika: Uchebnoe posobie. V 10 t. T. IV/V.B. Beresteckij, E.M. Lifshic, L.P. Pitaevskij. Kvantovaja jelektrodinamika. – 3-e izd., ispr. – M.: Nauka, Gl. Red. Fiz.-mat. Lit., 1989, - 728 s.