УДК 517.98: 330.4

01.00.00 Физико-математические науки

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МОДЕЛИ ВОСПРОИЗВОДСТВА НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА

Лайпанова Зульфа Мисаровна
к.ф.-м.н., доцент
Карачаево-Черкесский государственный университетим. У.Д. Алиева, Карачаевск, КЧР, Россия, ул. Ленина,29

Урусова Аза Сейпуловна
доцент
Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Карачаевск, КЧР, Россия, ул. Ленина,29

На практике были разработаны и апробированы математические модели балансовых соотношений (балансовые модели), экономического роста, расширяющейся экономики, рынка труда, теории потребления, производства, конкурентного равновесия, модели экономики в условиях несовершенной конкуренции и другие. В основу этих моделей были положены аппарат линейной алгебры, математического анализа, математического программирования, дифференциальных уравнений, методов оптимизации, теории оптимального управления, теории вероятностей, стохастических процессов, исследования операций, теории игр, статистического анализа. Обратные задачи в различных моделях математической экономики рассматривались редко. Данные задачи достаточно подробно исследовались при изучении физических процессов. Как показал анализ теоретических и прикладных исследований экономических процессов они представляют значительный интерес для практики. Поэтому, рассматриваемая в статье обратная задача математической модели, как показывают уже внедрённые результаты других математических моделей, представляют значительный интерес в прикладных и теоретических исследованиях. В работе поставлена и исследована обратная задача для модели экономического роста. Для её решения авторы предлагают построить системы алгебраических уравнений, воспользовавшись моделью воспроизводства национального дохода, затем, применяя методы квадратичного программирования, найти наилучшее в среднем квадратическом оценки параметра модели

Ключевые слова: ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, МОДЕЛЬ

UDC 517.98: 330.4

Physical-Mathematical sciences

THE INVERSE PROBLEM OF A REPRODUCTION MODEL OF NATIONAL INCOME

Laipanova Zulfa Misarovna
Candidate of Phys.-M., associate Professor
Karachay-Chercassian state University. U. D. Aliev, Karachaevsk, Karachay-Cherkessia, Russia, Lenina str., 29

Urusova Aza Saipulovna
associate Professor
Karachay-Chercassian state University. U. D. Aliev, Karachaevsk, Karachay-Cherkessia, Russia, Lenina str., 29

In practice, there were developed and tested some mathematical models of balance relationships (balance model), economic growth, expanding economy, labour market, theories of consumption, production, competitive equilibrium models of the economy in conditions of imperfect competition and others. The basis of these models were based on linear algebra, mathematical analysis, mathematical programming, differential equations, optimization methods, optimal control theory, probability theory, stochastic processes, operations research, game theory, statistical analysis. The inverse problem in various models of mathematical Economics was considered quite rare. These tasks were sufficiently investigated in the study of physical processes. As shown by the analysis of the theoretical and applied studies of economic processes, they represent considerable interest for practice. Therefore, the considered in the study inverse problems of the mathematical model, as it is shown by the already introduced results of other mathematical models, are of considerable interest in applied and theoretical research. In this article, the authors have formulated and investigated an inverse problem for a model of economic growth. For its solution the authors propose to build a system of algebraic equations, using a reproduction model of national income; then, using methods of quadratic programming, to find the best average quadratic estimates of the model parameter

Keywords: DIRECT AND INVERSE PROBLEMS, MATHEMATICAL MODELING, DIFFERENTIAL EQUATIONS, QUADRATIC PROGRAMMING, MODEL

Введение

За последние 60 - 70 лет сформировалась наука – математическая экономика, которая использует математический аппарат (от самых простейших – алгебраические соотношения, аналитические формулы, графики, диаграммы, таблицы, до последних достижений в области функционального анализа, дифференциальных уравнений, методов оптимизации, теории случайных процессов, математической статистики) для исследования экономических систем и явлений. Непосредственно она исследует не сами объекты, а их математические модели. Под математической моделью реального объекта (в частности, экономического) принято понимать его упрощенную, идеализированную схему, построенную с помощью математических символов, операций и соотношений. При построении этих моделей основополагающее значение имели работы В.Леонтьева, фон Неймана, Л.В. Канторовича, Вальраса, Эрроу – Дебре, Слуцкого, Курно, В.Ф. Кротова, В.А. Колемаева и др. [1].

Математическое моделирование макро – и микроэкономических процессов в настоящее время – один из основных инструментов экономического анализа. Использование экономико-математических методов и моделей позволяет получить новые качественные выводы об экономических процессах и явлениях [2].

В этой статье сформулированы прямая и обратная задачи в рамках изучаемой модели воспроизводства национального дохода, приведена методика решения поставленной обратной задачи.

Теоретический материал сопровождается решениями конкретных примеров с помощью Microsoft Excel.

Цель проведённого исследования – разработать методы решения обратных задач математических моделей макро – и микроэкономики и использовать полученные результаты для анализа и прогноза развития экономики Северо-Кавказского федерального округа в целом и Карачаево-Черкесской республики, в частности.

1. Постановка задачи

Дифференциальное уравнение простейшей модели воспроизводства национального дохода при дополнительных предположениях [3]:

- накопление пропорционально приросту национального дохода $y(t)$ в тот же момент времени;
- динамика потребления независима, т.е. функция $c(t)$ входит в искомое уравнение аддитивно;

имеет вид:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{B}y(t) - \frac{1}{B}c(t), \qquad (1)$$

где $y(t)$ - национальный доход; B - капиталоёмкость национального дохода (отношение производственного накопления к приросту национального дохода); $c(t)$ - часть используемого национального дохода.

Обычно рассматривается следующая задача: по заданным параметрам B, $c(t)$ найти (определить) $y(t)$. Данную задачу условимся называть прямой в рамках модели (1) [1].

В данной статье в рамках модели (1) изучается следующая более сложная обратная задача: по заданному национальному доходу $y(t)$ и части используемого национального дохода $c(t)$ вычислить капиталоёмкость национального дохода B (отношение производственного накопления к приросту национального дохода). Эту задачу называют обратной [1].

Метод решения поставленной задачи

Значения $y(t)$ зададим таблично (таблица 1.):

Таблица 1. Таблица значений национального дохода

t	t_0	t_1	$\dots$	t_n
$y(t)$	$y(t_0)$	$y(t_1)$	$\dots$	$y(t_n)$

Из модели (1) и данных таблицы 1, вытекает следующая система алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} y'(t_1)=\dfrac{1}{B}(y(t_1)-c(t_1)), \\ y'(t_2)=\dfrac{1}{B}(y(t_2)-c(t_2)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'(t_n)=\dfrac{1}{B}(y(t_n)-c(t_n)), \end{cases} \qquad (2)$$

в которой неизвестными являются B (производные $y'(t_1)$, $y'(t_2)$, …, $y'(t_n)$ находим численными методами [4]).

Из системы (2) найдём B_1, B_2, …, B_n. Решая задачу квадратичного программирования[5]:

$$\left(B-B_1\right)^2+\left(B-B_2\right)^2+\ldots+\left(B-B_n\right)^2 \to \min_B, \qquad (3)$$

с помощью средств Microsoft Excel найдём наилучшую в среднем квадратическом оценку $\overline{B}$ параметра B.

Пример. Пусть $y(t)$ задано таблично (таблицей 2.):

Таблица 2. Таблица значений национального дохода

t	0	1	2	3	4
$y(t)$	1800	2000	2100	2300	2500

1). Положим динамику потребления $c(t)=0$. Это означает, что весь национальный доход используют для расширения и потребление фактически отсутствует производства. Требуется вычислить коэффициент B. Тогда подставляя данные таблицы 2. в (2) найдём:

$$200 = \frac{2000}{B_1},\ 100 = \frac{2100}{B_2},\ 200 = \frac{2300}{B_3},\ 200 = \frac{2500}{B_4}$$

или: $B_1 = 10,\quad B_2 = 21,\quad B_3 = 11{,}5,\quad B_4 = 12{,}5.$

Решая задачу квадратичного программирования:

$$(B-10)^2 + (B-21)^2 + (B-11{,}5)^2 + (B-12{,}5)^2 \to \min_B ,$$

с помощью средств Microsoft Excel найдём наилучшую в среднем квадратическом оценку $\overline{B}$ параметра B: $\overline{B} = 13,75$.

Этапы проведённых вычислений задачи квадратичного программирования представлены на рис. 1.-7.

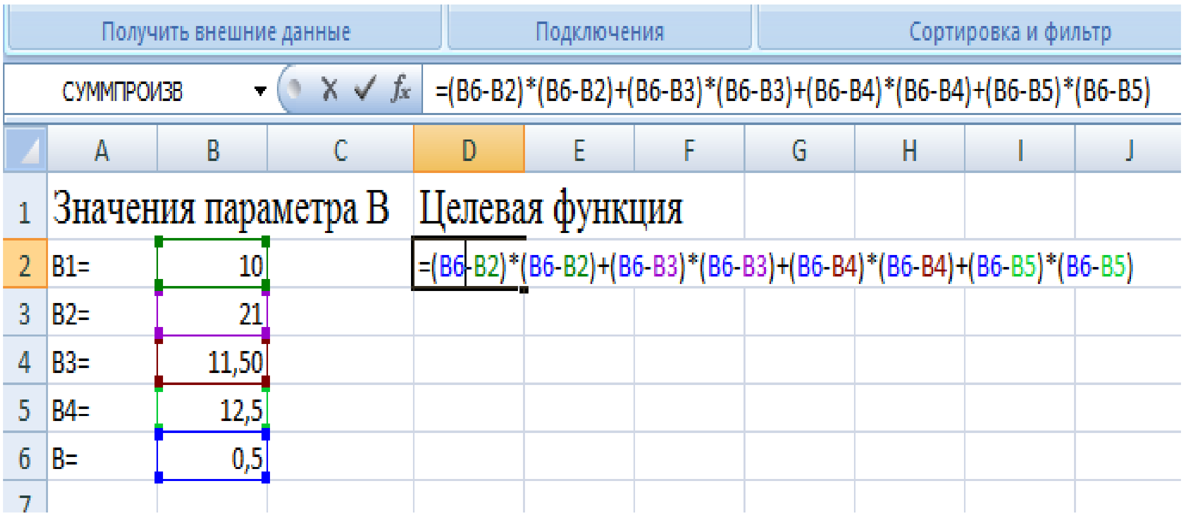


Рис. 1. Ввод данных

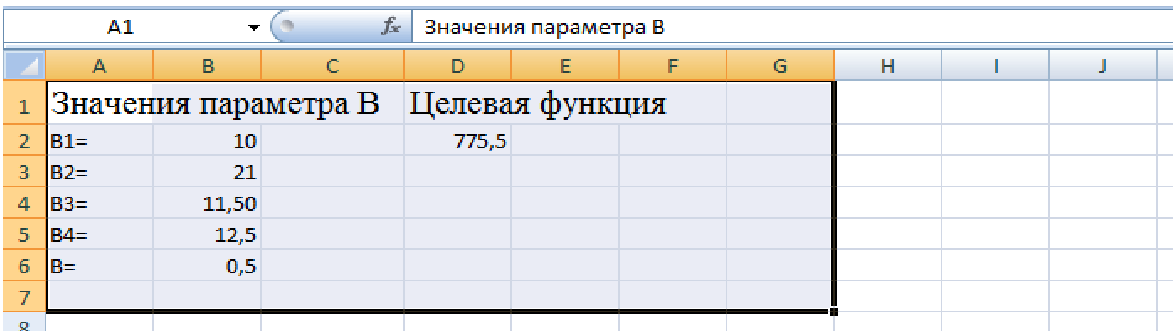


Рис.2.Значение целевой функции

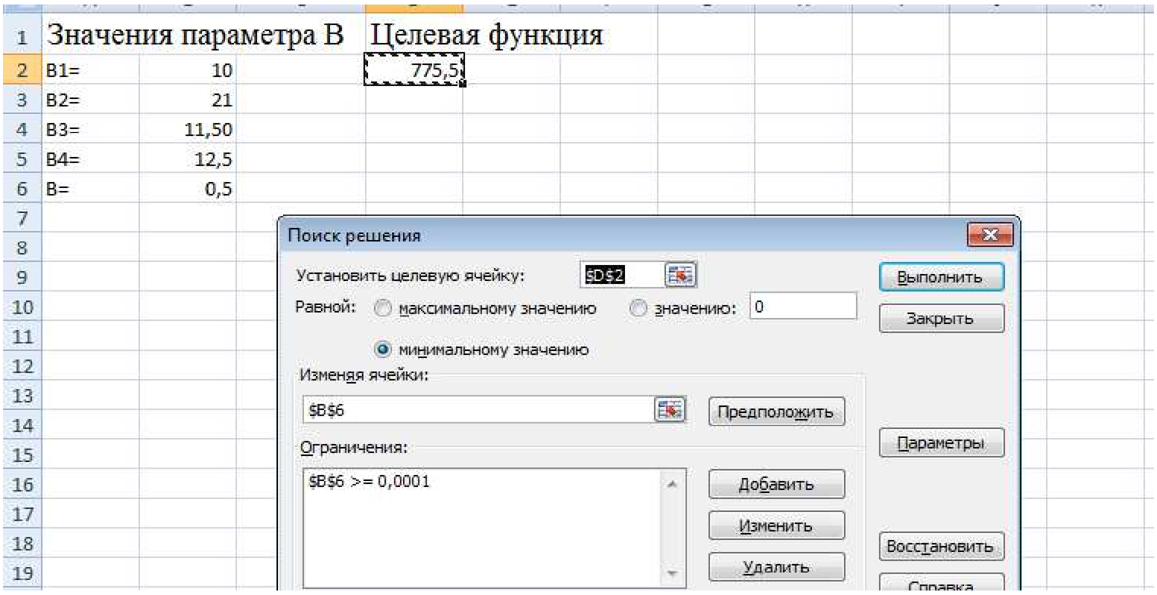


Рис. 3. Ввод ограничений

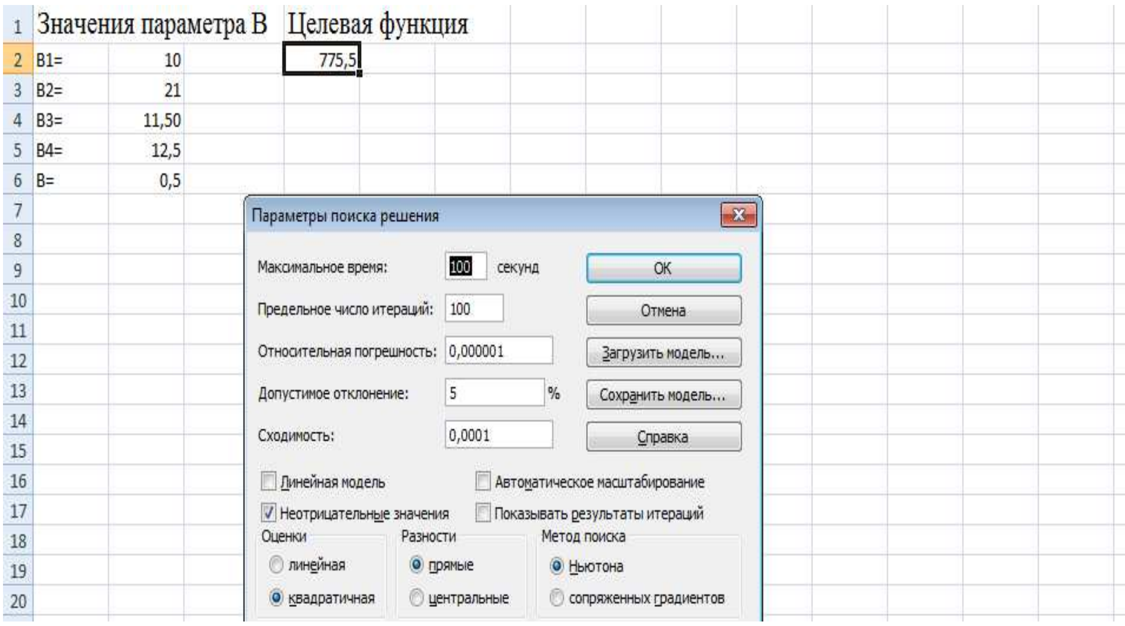


Рис.4. Ввод параметров целевой функции

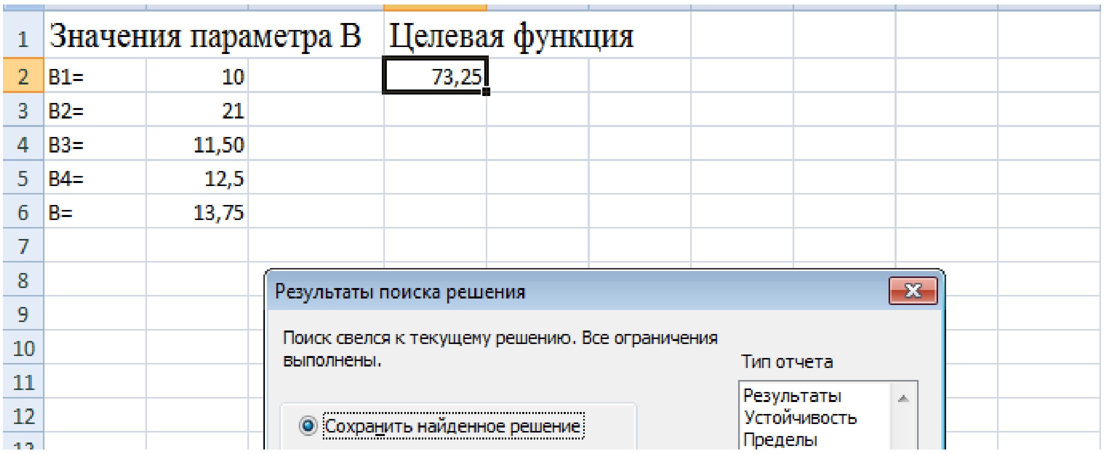
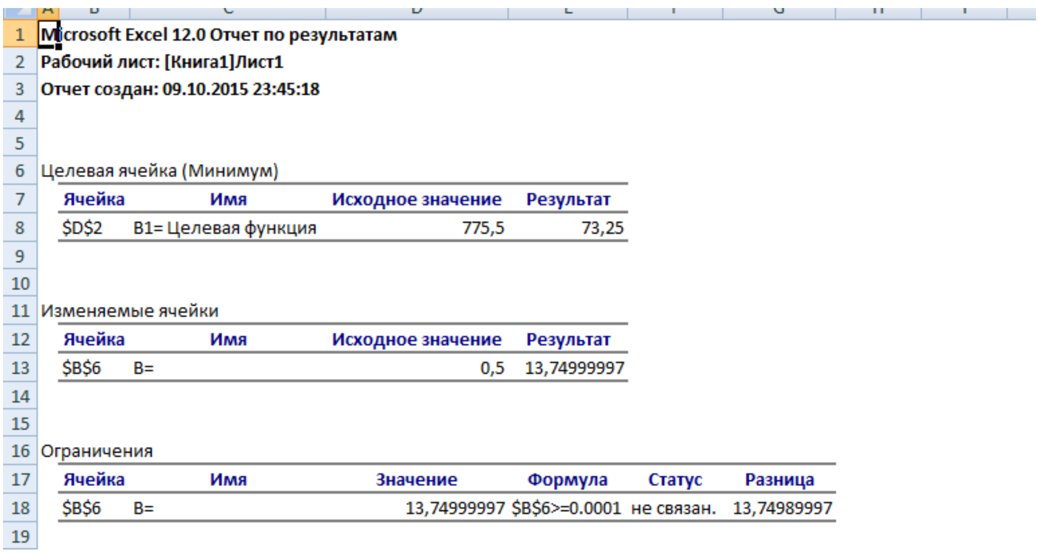


Рис. 5. Результаты поиска решения



Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 09.10.2015 23:45:18

Целевая ячейка (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
D2	B1= Целевая функция	775,5	73,25

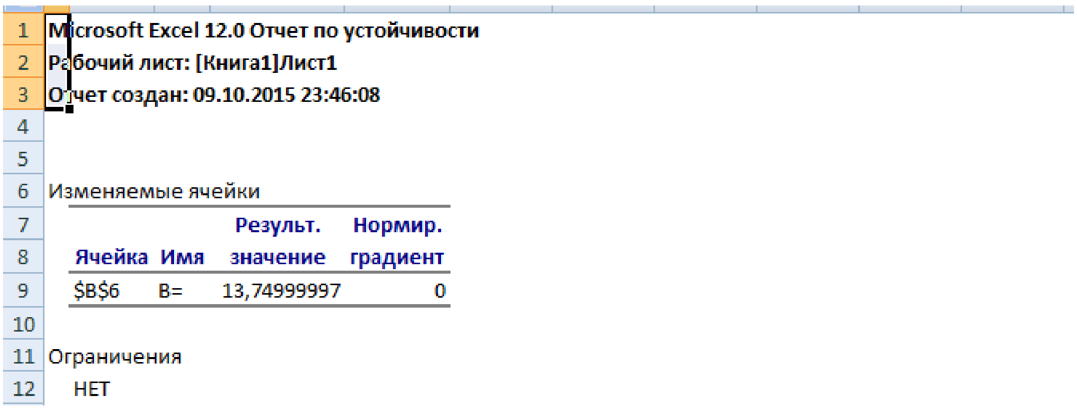
Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
B6	B=	0,5	13,74999997

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
B6	B=	13,74999997	B6>=0.0001	не связан.	13,74989997

Рис. 6. Отчёт по результатам поиска решения



Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 09.10.2015 23:46:08

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
B6	B=	13,74999997	0

Ограничения
НЕТ

Рис. 7. Отчёт по устойчивости

2). Положим динамику потребления $c(t) = c(0) = const = 500$. Пусть имеет место $y(t) > 0$ при всех t, если $y(0) > c(0)$, т.е. в начальный момент времени не весь национальный доход направляется на потребление. Требуется вычислить коэффициент B. Тогда система (2) при этих данных имеет вид:

$$200=\frac{2000-500}{B_1},100=\frac{2100-500}{B_2},200=\frac{2300-500}{B_3},200=\frac{2500-500}{B_4}$$

Отсюда находим: $B_1=7,5,\quad B_2=16,\quad B_3=9,\quad B_4=10.$

Решая задачу квадратичного программирования:

$$(B-7,5)^2+(B-16)^2+(B-9)^2+(B-10)^2\to\min_B,$$

с помощью средств Microsoft Excel найдём наилучшую в среднем квадратическом оценку $\overline{B}$ параметра B: $\overline{B}=10,625$

Результат проведённых вычислений задачи квадратичного программирования представлен на рис. 8.

1	Значения параметра B			Целевая функция	
2	B1=	9,5		66,1875	
3	B2=	20			
4	B3=	11,00			
5	B4=	12			
6	B=	13,125			
7					
8					

Рис. 8. Результаты поиска решения

3) Пусть модель (1) не учитывает технический прогресс и пусть потребление в модели растёт с постоянным темпом $r=0,2$.

Рассмотрим уравнения (1) при $c(t)=c(0)e^{rt}$.

Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$y=\frac{c(0)}{1-Br}e^{rt}+Ce^{\frac{1}{B}t},$$

а частное решение имеет вид:

$$y(t)=[y(0)-\frac{c(0)}{1-Br}]e^{\frac{1}{B}t}+\frac{c(0)}{1-Br}e^{rt} \qquad (*)$$

Прологарифмировав обе части уравнения (*) получим:

$$\ln y(t) = \frac{t}{B} + \ln(\frac{1-Br}{c(0)})y(0) + rt + \ln\frac{c(0)}{1-Br} \text{ или}$$

$$\ln y(t) = \frac{t}{B} + \ln(\frac{1-Br}{c(0)} \times \frac{c(0)}{1-Br})y(0) + rt = \frac{t}{B} + \ln y(0) + rt .$$

Подставляя наши данные из таблицы (1) в последнее уравнение получим:

$$\begin{cases} \ln 2000 = \dfrac{1}{B_1} + \ln 1800 + 0,2 \times 1, \\ \ln 2100 = \dfrac{2}{B_2} + \ln 1800 + 0,2 \times 2, \\ \ln 2300 = \dfrac{3}{B_3} + \ln 1800 + 0,2 \times 3, \\ \ln 2500 = \dfrac{4}{B_4} + \ln 1800 + 0,2 \times 4, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 7,6 = \dfrac{1}{B_1} + 7,5 + 0,2 \times 1, \\ 7,65 = \dfrac{2}{B_2} + 7,5 + 0,2 \times 2, \\ 7,74 = \dfrac{3}{B_3} + 7,5 + 0,2 \times 3, \\ 7,82 = \dfrac{4}{B_4} + 7,5 + 0,2 \times 4. \end{cases}$$

Отсюда найдём B_1, B_2, B_3, B_4:

$$\begin{cases} B_1 = \dfrac{1}{0,08} = 12,5, \\ B_2 = \dfrac{2}{0,06} = 33,3, \\ B_3 = \dfrac{3}{0,04} = 75, \\ B_4 = \dfrac{4}{0,02} = 200. \end{cases}$$

Решая задачу квадратичного программирования:

$$\left(B - 12,5\right)^2 + \left(B - 33,3\right)^2 + (B - 75)^2 + \left(B - 200\right)^2 \to \min_B ,$$

с помощью средств Microsoft Excel найдём наилучшую в среднем квадратическом оценку $\bar{B}$ параметра $B : \bar{B} = 80,2.$

Результат проведённых вычислений задачи квадратичного программирования представлен на рис. 9.

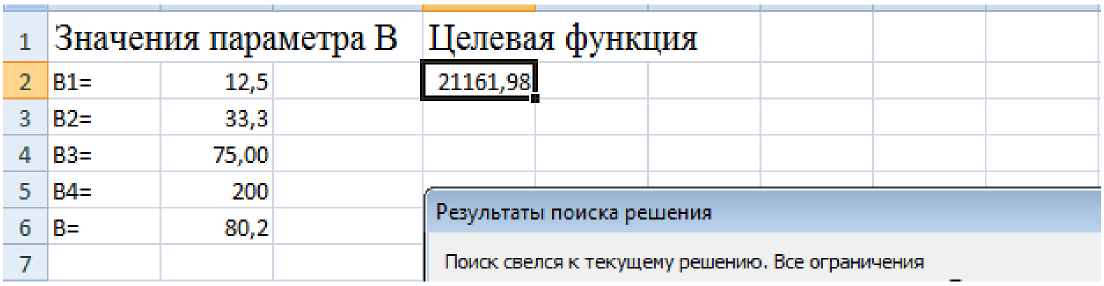


Рис.9. Результаты поиска решения

Выводы

Сформулированы прямые и обратные задачи в рамках модели воспроизводства национального дохода. Разработана методика построения неотрицательных решений обратной задачи. По заданным таблично решениям прямой задачи, строится система алгебраических уравнений, содержащая в качестве неизвестных оцениваемые параметры изучаемой модели. После этого поставленная обратная задача сводится к решению задачи квадратичного программирования, решения которой определяются с помощью надстройки «Поиск решения» в среде MSExcel.

Теоретический материал сопровождается решением конкретного примера с помощью Microsoft Excel.

Список литературы

1. Семенчин Е.А., Урусова А.С. Обратные задачи в экономических балансовых моделях и моделях экономического роста.– Краснодар: Просвещение – Юг, 2009. – 142с.
2. Кундышев Е.С. Математическое моделирование в экономике. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и K^0», 2006. 352с.
3. Журавлёв С.Г., Аниковский В.В. Дифференциальные уравнения.- М.: Издательство «Экзамен», 2005.- 128с.
4. Вержбицкий В.М. Численные методы.-М.: Высшая школа, 2001. – 189с.
5. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование. – М.: Вузовский учебник, 2005. – 144с.

References

1. Semenchin E.A., Urusova A.S. Obratnye zadachi v jekonomicheskih balansovyh modeljah i modeljah jekonomicheskogo rosta.– Krasnodar: Prosveshhenie – Jug, 2009. – 142s.
2. Kundyshev E.S. Matematicheskoe modelirovanie v jekonomike. M.: Izdatel'sko-

torgovaja korporacija «Dashkov i », 2006. 352s.
3. Zhuravljov S.G., Anikovskij V.V. Differencial'nye uravnenija.- M.: Izdatel'stvo «Jekzamen», 2005.- 128s.
4. Verzhbickij V.M. Chislennye metody.-M.: Vysshaja shkola, 2001. – 189s.
5. Orlova I.V. Jekonomiko-matematicheskoe modelirovanie. – M.: Vuzovskij uchebnik, 2005. – 144s.