УДК 52.17

01.00.00 Физико-математические науки

ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ УРОВНЯ ВОДЫ В РЕКЕ ГОРНОГО ТИПА С ПРИМЕНЕНИЕМ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Титов Николай Георгиевич
аспирант

Кузякина Марина Викторовна
к.ф.-м.н.

Лебедев Константин Андреевич
д.ф.-м.н., проф.
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Предложена методика краткосрочного прогнозирования уровня воды в русле реки горного типа с использованием цепей Маркова

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЦЕПИ МАРКОВА, ПАВОДКОВАЯ СИТУАЦИЯ, МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

UDC 52.17

Physics and Math

CONSTRUCTING A THEORETICAL MODEL PREDICTING THE LEVEL OF WATER IN A MOUNTAIN RIVER IS USING MARKOV’S CHAINS

Titov Nikolay Georgievich
postgraduate student

Kuzyakina Marina Viktorovna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences

Lebedev Konstantin Andreevich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Kuban state university, Krasnodar, Russia

The article presents a technique of short-term forecasting of water level in the river bed of a mountain type using Markov’s chains

Keywords: MATH MODELING, MARKOV CHAIN FLOOD SITUATION, MARKOV PROCESSES, FORECASTING

Марковские случайные процессы получили свое название в честь выдающегося русского математика А.А.Маркова (1856-1922), впервые начавшего изучение вероятностной связи случайных величин. В последствии основы данной теории явились основой для создания общей теории случайных процессов, а также таких важных прикладных наук, как теория диффузионных процессов, теория надежности, теория массового обслуживания и т.д [1-13]. Чаще всего цепи Маркова применяются в прогнозировании экономических процессов, например в работе посвященной оценке и прогнозированию экономической устойчивости промышленного предприятия написанной А.В. Шмидтом [14]. Существуют примеры применения аппарата Марковских цепей для прогноза миграционных процессов состоящих в перемещении населения между различными городами [15]. Также, данный аппарат нашел применение в биологии, а именно в генетике [16]. Стоит отметить, что прогнозирование гидрологических показателей с помощью данной методики освещено во многих трудах, например [17,18], но прогнозирование именно уровня воды в реке с крутым падением водотока является на данный момент, одной из мало освещенных проблем. Данная работа посвящена этой проблеме.

Рассмотрение изменения уровня воды в горной реке, без учета воздействия внешних факторов, позволяет определить данный процесс как случайный. Особое место в теории случайных процессов занимают Марковские процессы. Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых система принимает только одно из n состояний полной группы, причём условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s-м испытании система будет находиться в состоянии j, при условии, что после (s-1)-го испытания она находилась в состоянии i, не зависит от результатов остальных, ранее произведенных испытаний. Переходной вероятностью p_{ij} называют условную вероятность того, что из состояния i (в котором система оказалась в результате некоторого испытания) в итоге следующего испытания система перейдет в состояние i. Матрицей перехода системы называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы [19]. Периодичность измерений уровня воды на горной реке Мзымта, составляет каждые 12 часов, обычно в 8 часов и 20 часов по Московскому времени. Учитывая это обстоятельство, разумно считать цепь Маркова, состоящую из измерений уровня воды на горной реке Мзымта, как цепь Маркова с дискретным временем[20].

Целью данной работы является построение математической модели прогноза уровня воды, в горной реке основываясь на теорию Марковских процессов с дискретным временем.

Имеются данные об уровне воды $X^t = \{x_i^t\}$ в горной реке Мзымта за 2008, 2009 года, где t-год в котором производилось измерение, а i-порядковый номер измерения. Основываясь, на теории Марковских цепей и равенстве Маркова, построим прогноз уровня воды в горной реке на восемь дней 2010 года, а именно на период с 1 июля по 8 июля 2010 года. Для этого произведём выборку, из представленных данных, длинной шестнадцать элементов, по два наблюдения в сутки, с 1 июля по 8 июля 2008, 2009 годов:

$$X^{2008} = \begin{pmatrix} 331 & 356 \\ 341 & 341 \\ 361 & 351 \\ 341 & 331 \\ 321 & 322 \\ 325 & 330 \\ 335 & 322 \\ 346 & 321 \end{pmatrix}, X^{2009} = \begin{pmatrix} 316 & 321 \\ 322 & 325 \\ 320 & 327 \\ 335 & 342 \\ 351 & 352 \\ 362 & 351 \\ 345 & 335 \\ 320 & 311 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с классификацией уровней воды по чрезвычайным ситуациям разобьём данную выборку на пять категорий ξ_n (таблица 1). Процесс изменения уровня воды обозначим x_i^t.

Таблица 1- разделение уровней воды по категориям

1 категория	$x_i^t \le 321$
2 категория	$321 < x_i^t \le 331$
3 категория	$331 < x_i^t \le 341$
4 категория	$341 < x_i^t < 361$
5 категория	$361 \le x_i^t$

Предполагается, что категория 1 говорит о том, что в реке уровень воды меньше нормы; категория 2 – уровень воды в реке нормальный; категория 3 – допустимо выше нормы; категория 4 – критическое состояние, условно можно назвать «паводок»; категория 5 – недопустимое состояние уровня воды в реке, условно можно назвать «наводнение».

Под состоянием системы будем понимать то, что в каждый дискретный момент времени t процесс принимает одно из значений принадлежащих категории ξ_n, где n = {1, 2…5}, т.е. $x_i^m = \{i \in \xi(n)\}$ - в момент времени $t = m$ случайный процесс принял значение, попадающее в категорию ξ_n.

Случайное событие $x_i^m = \{i \in \xi(n)\}$ означает, что в момент времени $t = m$ в категории ξ_n наблюдается увеличение значений. Тогда система в начальный момент времени t = 2008 выглядит следующим образом $S^{2008} = \{A_k\}, k = 1..5$, где A_k – количество из 16 наблюдений попавших в k- категорию. Таким образом, система состоит из распределения наблюдений уровня воды по пяти категориям, и изменение состояния системы в те моменты времени $t = 2008, 2009, 2010$ – связано с переходом данных наблюдений из одной категории в другую:

$$S^{2008} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что такая система может принимать конечное число состояний. Система может менять свои состояния в определённые моменты t.

Запишем данные за 2009 года в матрицу $A^{2009} = \{a_{ij}^{2009}\}$, где a_{ij}^{2009} – количество замеров уровней воды, которые принадлежали i-категории в момент времени $t = 2008$ и попали в j–категорию в момент $t = 2009$:

$$A^{2009} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Просуммировав столбцы матрицы A^{2009} получим следующий результат:

$$S^{2009} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{5}^{i=1} a_{i1}^{2009} \\ \sum\limits_{5}^{i=1} a_{i2}^{2009} \\ \sum\limits_{5}^{i=1} a_{i3}^{2009} \\ \sum\limits_{5}^{i=1} a_{i4}^{2009} \\ \sum\limits_{5}^{i=1} a_{i5}^{2009} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для будущей проверки качества нашего прогноза, составим матрицу перехода для 2010 года обозначив ее, как A_{real}^{2010}:

$$A_{real}^{2010} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Просуммировав столбцы матрицы A_{real}^{2010}, получим следующий результат:

$$S_{real}^{2010} = \begin{pmatrix} \sum_{5}^{i=1} a_{i1}^{2010} \\ \sum_{5}^{i=1} a_{i2}^{2010} \\ \sum_{5}^{i=1} a_{i3}^{2010} \\ \sum_{5}^{i=1} a_{i4}^{2010} \\ \sum_{5}^{i=1} a_{i5}^{2010} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя равенство Маркова:

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m) P_{rj}(n-m),$$

где $P_{ij}(n)$ - вероятность перехода системы из начального состояния i в конечное состояние j за n шагов, r – промежуточное расстояние между i и j, $P_{ir}(m)$ - вероятность перехода системы из состояния i в промежуточное состояние r за m шагов, $P_{rj}(n-m)$ - вероятность перехода системы из промежуточного состояния r в конечное состояние j за n-m шагов, и записав его в матричном виде:

$$A_n = (A_1)^n,$$

где A_1 - матрица перехода из состояния в состояние за один шаг, A_n матрица перехода из состояния в состояние за n шагов, вычислим состояние системы в следующий момент времени $t = 2010$ и сравним полученную матрицу S^{2010} с реальной матрицей S_{real}^{2010}.

Вероятностная (стохастическая) матрица перехода для 2009 года имеет следующий вид:

$$P = \left\{ a_{11}^{2009} \big/ A_1 \right\} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0,16 & 0 & 0,16 & 0,5 & 0,16 \\ 0 & 0,5 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,67 & 0,33 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу прогнозированных вероятностей, каждый элемент которой показывает вероятность перехода из состояния $t = 2008$ в состояние $t = 2010$, получим возведением в квадрат матрицы P:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,58 & 0,17 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0,58 & 0,25 & 0,04 & 0,13 & 0 \\ 0,25 & 0,21 & 0,15 & 0,31 & 0,08 \\ 0,39 & 0 & 0,06 & 0,5 & 0,06 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате имеем матрицу, каждый элемент которой показывает прогнозируемое количество наблюдений уровня воды перешедших из i– категории в категорию j. Вычислим матрицу прогнозируемых значений следующим образом:

$$A_{prog}^{2010} = P^2 \times S^{2008} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда прогнозируемое состояние системы

$$S_{prog}^{2010} = S^{2008} \times P^2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A_{real}^{2010} и A_{prog}^{2010} отличаются между собой только значениями, расположенными во второй строке. Данное обстоятельство позволяет говорить о адекватности прогнозных значений реальным.

Аналогичным способом, возможно, построить состояние системы для $t = 2011$:

$$S_{prog}^{2011} = S^{2008} \times P^{3}.$$

В результате проделанной работы был продемонстрирован способ применения цепей Маркова к прогнозированию уровня воды в горной реке. Полученный результат прогноза отвечает высокой согласованности прогнозируемых значений с экспериментальными данными, что позволяет сделать вывод об успешности применения данной методики. Благодаря продемонстрированной методике появляется возможность прогноза состояния системы (уровня воды в горной реке) в будущий момент. Также, стоит отметить и недостаток данного прогноза, а именно то, что данный прогноз дает, всего лишь, вероятность перехода из одной категории значений в другую, а не конкретное значение. Вследствие чего, не представляется возможным оценить конкретную величину опасности паводковой ситуации. Данный способ прогнозирования имеет смысл применять только вместе с другими методами прогноза. Существует объективная возможность создания программного обеспечения использующего как, результаты данной работы, так и другие методы прогнозирования, и дающего более полную оценку состояния уровня воды в горных реках на будущий краткосрочный временной период.

Данная статья выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-96518 р_юг_а и является продолжением цикла исследований посвящённых математическому моделированию состояния уровня воды в горной реке [21–23].

Список используемых источников:

1. Карлин С. Основы теории случайных процессов. — М.: Мир, 1971. — 536 с.
2. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрица- тельные операторы. — М.: Мир, 1989. — 207 с.
3. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. — М.: ФИЗМАТ- ЛИТ, 2012. — 608 с.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. — М.: Мир, 1984. — Т. 1: 528 с., Т. 2: 738 с.
5. Чжун К. Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964
6. Венцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров М.: КНОРУС, 2010.– 351 с.
7. Кельберт, М.Я. Вероятность и статистика в примерах и задачах: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложение / М.Я. Кельберт, Ю.М. Сухов М.: МЦНМО, 2010.– 278 с.
8. И.В. Романовский «Дискретный анализ». 3-е изд., перераб. и доп. Учебн. пособие БХВ-Петерб., Санкт-Петерб. гос. унив. 2003. - 320 с.
9. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1960. – 272 с.
10. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 568 с.
11. Meyn S.P., Tweedie R.L. Markov chains and stochastic stability. — 2nd ed. — London: Springer-Verlag, 1993. — 566 p.
12. И.М. Макаров, Т.М. Виноградская, А.А. Рубчинский, В.Б. Соколов. «Теория выбора и принятия решений»: учебное пособие. Москва, изд. «Наука», 1982.
13. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей. − Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 188 с.
14. Шмидт А.В. Применение цепей Маркова при определении стратегии функционирования и развития предприятия по критерию экономической устойчивости // Вестник ,жно-Уральского государственного университета. Серия: Экономика и менеджмент, 2011, ч. 3, С. 145-153
15. Семенчин Е.А., Бабченко О.В. Применение цепей Маркова для прогнозирования миграционных процессов // Современные проблемы науки и образования. – 2006. – № 2 – С. 57-58
16. Вольвачев Р.Т. Приложение цепей Маркова к биологическим задачам. URL: http://elib.bsu.by/handle/123456789/13479.
17. Болгов М.В. Об источниках неопределенности при прогнозировании уровня каспийского моря и оценке риска затопления прибрежных территорий. Болгов, М.К. Филимонова // Водные ресурсы, 2005, том 32, 6, С. 664-669
18. Задорожный А.И. Методика прогнозирования динамики грунтовых вод на основе аппарата цепей Маркова и оценки убытков в результате недополучения урожая от подтопления сельскохозяйственных территорий // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 6
19. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике М,: Мир, 1965. - 408 с.
20. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. Пособие для втузов. Изд. 5-е, перераб. И доп. М., «Высш. Школа», 1977. – 479 с.
21. Титов, Н.Г. Прогноз уровня воды в реке с крутым падением водотока, основанное на фильтрации Кальмана-Бьюси / Н.Г. Титов, М.В. Кузякина, К.А. Лебедев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета 2014, №104

22. Титов, Н.Г. Сравнительный анализ методов математического моделирования уровня воды в реке горного типа (на примере реки Мзымта) /Н.Г. Титов, Е.А.Семенчин, М.В. Кузякина, К.А. Лебедев // Фундаментальные исследования, ISSN: 1812-7339, № 12 за 2014 год (часть 5), С. 952-957

23. Titov N.G., Kuzyakina M.V., Lebedev K.A. Su uno della metodologia per la valutazione del danno economico inflitto diluvio fiume tipo mountain trama regione. // Italian Science Review. 2014; 12(21), ISSN: 2308-832X. PP. 234-236

References

1. Karlin S. Osnovy teorii sluchajnyh processov. — M.: Mir, 1971. — 536 s.
2. Nummelin Je. Obshhie neprivodimye cepi Markova i neotrica- tel'nye operatory. — M.: Mir, 1989. — 207 s.
3. Fedotkin M.A. Modeli v teorii verojatnostej. — M.: FIZMAT- LIT, 2012. — 608 s.
4. Feller V. Vvedenie v teoriju verojatnostej i ejo prilozhenija. V 2-h tomah. — M.: Mir, 1984. — T. 1: 528 s., T. 2: 738 s.
5. Chzhun K. Odnorodnye cepi Markova. M.: Mir, 1964
6. Vencel', E.S. Teorija sluchajnyh processov i ee inzhenernye prilozhenija / E.S. Vencel', L.A. Ovcharov M.: KNORUS, 2010.– 351 s.
7. Kel'bert, M.Ja. Verojatnost' i statistika v primerah i zadachah: Markovskie cepi kak otpravnaja tochka teorii sluchajnyh processov i ih prilozhenie / M.Ja. Kel'bert, Ju.M. Suhov M.: MCNMO, 2010.– 278 s.
8. I.V. Romanovskij «Diskretnyj analiz». 3-e izd., pererab. i dop. Uchebn. posobie BHV-Peterb., Sankt-Peterb. gos. univ. 2003. - 320 s.
9. Kemeni Dzh., Snell Dzh. Konechnye cepi Markova. M.: Nauka, 1960. – 272 s.
10. Gihman I.I., Skorohod A.V. Vvedenie v teoriju sluchajnyh processov. — M.: Nauka, 1977. — 568 c.
11. Meyn S.P., Tweedie R.L. Markov chains and stochastic stability. — 2nd ed. — London: Springer-Verlag, 1993. — 566 p.
12. I.M. Makarov, T.M. Vinogradskaja, A.A. Rubchinskij, V.B. Sokolov. «Teorija vybora i prinjatija reshenij»: uchebnoe posobie. Moskva, izd. «Nauka», 1982.
13. Kolmogorov A.N., Zhurbenko I.G., Prohorov A.V. Vvedenie v teoriju verojatnostej. − Moskva-Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2003, 188 s.
14. Shmidt A.V. Primenenie cepej Markova pri opredelenii strategii funkcionirovanija i razvitija predprijatija po kriteriju jekonomicheskoj ustojchivosti // Vestnik ,zhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Jekonomika i menedzhment, 2011, ch. 3, S. 145-153
15. Semenchin E.A., Babchenko O.V. Primenenie cepej Markova dlja prognozirovanija migracionnyh processov // Sovremennye problemy nauki i obrazovanija. – 2006. – № 2 – S. 57-58
16. Vol'vachev R.T. Prilozhenie cepej Markova k biologicheskim zadacham. URL: http://elib.bsu.by/handle/123456789/13479.
17. Bolgov M.V. Ob istochnikah neopredelennosti pri prognozirovanii urovnja kaspijskogo morja i ocenke riska zatoplenija pribrezhnyh territorij. Bolgov, M.K. Filimonova // Vodnye resursy, 2005, tom 32, 6, S. 664-669
18. Zadorozhnyj A.I. Metodika prognozirovanija dinamiki gruntovyh vod na osnove apparata cepej Markova i ocenki ubytkov v rezul'tate nedopoluchenija urozhaja ot podtoplenija sel'skohozjajstvennyh territorij // Sovremennye problemy nauki i obrazovanija. – 2012. – № 6
19. Kac M. Verojatnost' i smezhnye voprosy v fizike M,: Mir, 1965. - 408 s.

20. Gmurman V.E. Teorija verojatnostej i matematicheskaja statistika. Ucheb. Posobie dlja vtuzov. Izd. 5-e, pererab. I dop. M., «Vyssh. Shkola», 1977. – 479 s.
21. Titov, N.G. Prognoz urovnja vody v reke s krutym padeniem vodotoka, osnovannoe na fil'tracii Kal'mana-B'jusi / N.G. Titov, M.V. Kuzjakina, K.A. Lebedev // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta 2014, №104
22. Titov, N.G. Sravnitel'nyj analiz metodov matematicheskogo modelirovanija urovnja vody v reke gornogo tipa (na primere reki Mzymta) /N.G. Titov, E.A.Semenchin, M.V. Kuzjakina, K.A. Lebedev // Fundamental'nye issledovanija, ISSN: 1812-7339, № 12 za 2014 god (chast' 5), S. 952-957
23. Titov N.G., Kuzyakina M.V., Lebedev K.A. Su uno della metodologia per la valutazione del danno economico inflitto diluvio fiume tipo mountain trama regione. // Italian Science Review. 2014; 12(21), ISSN: 2308-832X. PP. 234-236