

УДК 544.638.2:51-74

UDC 544.638.2:51-74

01.00.00 Физико-математические науки

Physics and Mathematical sciences

**ЭЛЕКТРООСМОС В МИКРО - И  
НАНОКАНАЛАХ. ЧАСТЬ 1. ВЫВОД  
ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА  
ДЕКОМПОЗИЦИИ**

**ELECTRO-OSMOSIS IN MICRO - AND NANO-  
CHANNELS. PART 1. AN OUTPUT OF A  
HIERARCHICAL SYSTEM OF  
MATHEMATICAL MODELS USING THE  
METHOD OF DECOMPOSITION**

Коваленко Анна Владимировна  
к.э.н., доцент  
РИНЦ SPIN-код автора: 3693-4813  
Scopus Author ID: 55328224000

Kovalenko Anna Vladimirovna  
Cand.Econ.Sci., associate professor  
RSCI SPIN-code: 3693-4813  
Scopus Author ID: 55328224000

Уртенов Махамет Али Хусеевич  
д.ф.-м.н., профессор  
РИНЦ SPIN-код: 7189-0748  
Scopus Author ID: 6603363090  
*Кубанский государственный университет,  
Краснодар, Россия*

Urtenov Makhamet Ali Khuseevich  
Dr.Sci.Phys.-Math., professor  
RSCI SPIN-code: 7189-0748  
Scopus Author ID: 6603363090  
*Kuban State University, Krasnodar, Russia*

Герюгова Аминат Аликовна  
аспирантка кафедры математического анализа  
*Карачаево-Черкесский государственный  
университет, Карачаевск, Россия*

Gerugova Aminat Alikovna  
postgraduate student of the Faculty of mathematical  
analysis  
*Karachaev-Circassian state university, Karachaevsk,  
Russia*

Микро- и нанофлюидика – новые междисциплинарные области науки, одной из задач, которых является создание и управление потоками жидкости в тонких каналах размером несколько десятков нано- или микрометров под воздействием внешнего электрического поля, стенками которых служат ионообменные мембраны. Важную роль в этих задачах играет электроосмос (электроконвекция), движение раствора под действием внешнего поля. Электроосмосу посвящено большое число работ. Духин С.С. и Мишук Н.А., и Рубинштейн И. первыми дали теоретическое объяснение сверхпредельного тока электроосмосом. Для расчета течения раствора электролита они использовали двумерное уравнение Стокса, а для расчета величины электрической силы – одномерные уравнения Нернста-Планка и Пуассона. Однако из-за вычислительных сложностей исследования двумерных уравнений при математическом моделировании в этих работах имеются множественные ограничения. Таким образом, возникает актуальная проблема асимптотического решения краевых задач для двумерных систем уравнений Нернста-Планка и Пуассона без этих ограничений. В данной работе, с использованием метода декомпозиции выведены упрощенные модели электроосмоса в гальванодинамическом режиме. В работе, создана иерархическая система двумерных математических моделей переноса ионов соли и электроосмоса в

Micro and nanofluidics are the new multidisciplinary sciences. One of the tasks of which is creation and management of flow of fluid in the thin channels size of a few nano- or micrometer which exposed the external electric field, where the walls are the ion exchange membrane. Electroosmosis (electroconvection) plays an important role in these tasks. A large number of articles were devoted to electroosmosis. One of the first, Dukhin S.S., Mishchuk N.A. and Rubinstein I. gave a theoretical explanation of the overlimiting current by electroosmosis. They used two-dimensional Stokes equation to calculate the flow of the electrolyte, and one-dimensional equations of Nernst-Planck and Poisson to calculate the electric power. These researches have multiple limitations because of the computational complexity the mathematical simulation. Thus, there is an actual problem of the asymptotic solution of boundary value problems for the two-dimensional systems of equations of Nernst-Planck and Poisson without these restrictions. These researches we derived in simplified models of electroosmosis in galvanic dynamical mode using the decomposition method. We have created a hierarchical system of two-dimensional mathematical models of ion transport of salt and electroosmosis in micro- and nanochannels formed by selective ion-exchange membranes

микро- и наноканалах, образованных  
селективными ионообменными мембранами

Ключевые слова: МЕМБРАННАЯ СИСТЕМА,  
ИОНООБМЕННАЯ МЕМБРАНА,  
ЭЛЕКТРОДИАЛИЗ, ЭЛЕКТРООСМОС,  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, МИКРОКАНАЛ,  
НАНОКАНАЛ, ГАЛЬВАНОДИНАМИЧЕСКИЙ  
РЕЖИМ

Keywords: MEMBRANE SYSTEM, ION  
EXCHANGE MEMBRANE, ELECTRO-DIALYSIS,  
ELECTRO OSMOSIS, MATHEMATICAL MODEL,  
MICRO-CHANNEL, NANO-CHANNEL, GALVAN  
DYNAMIC MODE

## ВВЕДЕНИЕ

Микро- и нанофлюидика – новые междисциплинарные области науки, одной из задач, которых является создание и управление потоками жидкости в тонких каналах размером несколько десятков нано- или микрометров. В статье рассматриваются задачи, в которых стенками каналов служат ионообменные мембраны и накладывается внешнее электрическое поле. Такие задачи возникают в молекулярной биологии, при создании «лабораторий на чипе», в микро- и нанофлюидных устройствах [1-3]. Важную роль в этих задачах играет электроосмос (электроконвекция), движение раствора под действием внешнего поля. Электроосмосу посвящено большое число работ. Духин С.С. и Мищук Н.А. [6, 17], и Рубинштейн И. [19, 20] первыми дали теоретическое объяснение сверхпредельного тока электроосмосом. Для этого они использовали двумерное уравнение Стокса для расчета течения раствора электролита и одномерные уравнения Нернста-Планка и Пуассона для расчета величины электрической силы. Однако в этих работах для математического моделирования накладываются следующие ограничения: отсутствует вынужденная конвекция, уравнение Пуассона используется лишь для одномерного случая, а в двумерном случае вместо него используется условие электронейтральности в сочетании с условием скольжения на межфазной границе. Использование приближенных решений краевых задач для одномерных [9, 10, 12-14, 16], а не двумерных уравнений Нернста-Планка и Пуассона объясняется математическими сложностями исследования двумерных уравнений.

Впервые исследование электроконвекции на основе численного решения двумерной системы уравнений Нернста-Планка и Пуассона и Навье-Стокса проведено в работах [15, 18, 21] с некоторыми ограничениями на величины начальной концентрации и скорости потока раствора. Таким образом, возникает актуальная проблема асимптотического решения краевых задач для двумерных систем уравнений Нернста-Планка и Пуассона без этих ограничений.

Электромембранные системы функционируют в двух разных электрических режимах: потенциодинамическом (потенциостатическом), когда задается падение потенциала или гальванодинамическом (гальваностатическом) режиме, когда задается средняя плотность тока в цепи. Эти режимы в физическом смысле равноправны, однако исследования удобно проводить в гальваностатическом режиме, поскольку известны критические значения плотности тока: предельный ток, ток экзальтации, ток Харкаца и т.д. [8]. Этим критическим значениям плотности тока не всегда удобно теоретически или экспериментально сопоставлять конкретные значения падения потенциала. Так, например, предельному току теоретически соответствует бесконечно большое значение падения потенциала. Именно поэтому, в настоящее время накоплено большое количество экспериментальных данных полученных для гальванодинамического (гальваностатического) режима, которые требуют анализа. В связи с этим возникает проблема вывода уравнений и краевых условий, удобных для моделирования этих режимов. Двумерная математическая модель гальваностатического режима при выполнении условия локальной электронейтральности впервые была представлена в работе [23] и подробно изучена в работах [24-29], причем в работах [26-29] использовалась при построении и анализе математической модели гравитационной конвекции в электрохимических системах в гальваностатическом режиме.

В данной работе, с использованием метода декомпозиции выведены упрощенные модели электроосмоса в гальванодинамическом режиме.

### 1 Постановка задачи

Перенос ионов соли с учетом электроосмоса в электромембранных системах описывается уравнениями Нернста-Планка-Пуассона и Навье-Стокса [11] с учетом пространственной силы. Векторная запись этой системы для бинарного электролита, в случае отсутствия химических реакций, имеет следующий безразмерный вид [30]:

$$\vec{J}_i = z_i D_i C_i \vec{E} - D_i \nabla C_i + Pe C_i \vec{V}, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$$Pe \frac{\partial C_i}{\partial t} = -\text{div} \vec{J}_i, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

$$\varepsilon \Delta \varphi = -(z_1 C_1 + z_2 C_2), \quad (3)$$

$$\vec{I} = z_1 \vec{J}_1 + z_2 \vec{J}_2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \Delta \vec{V} + K_{el} \varepsilon \Delta \varphi \nabla \varphi, \quad (5)$$

$$\text{div}(\vec{V}) = 0, \quad (6)$$

где  $\nabla$  – градиент,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\vec{V}$  – скорость течения раствора,  $P$  – давление,  $\vec{J}_1, \vec{J}_2, C_1, C_2$  – потоки и концентрации катионов и анионов в растворе, соответственно,  $z_1, z_2$  – зарядовые числа катионов и анионов,  $\vec{I}$  – плотность тока,  $D_1, D_2$  – коэффициенты диффузии катионов и анионов, соответственно,  $\varphi$  – потенциал электрического поля,  $t$  – время,  $\varepsilon, K_{els}$  – безразмерные параметры,  $Pe, Re$  – числа Пекле и Рейнольдса. Физический смысл параметров  $\varepsilon, K_{els}$  описан в [30].

Система уравнений Нернста-Планка-Пуассона (1-3) является сингулярно возмущенной, из-за малого параметра  $\varepsilon$  (см. ниже оценки), поэтому она неудобна для численного решения. Кроме того, структура системы уравнений такова, что из нее можно легко вывести лишь модельную задачу с условием локальной электронейтральности

$z_1 C_1 + z_2 C_2 = 0$ , в результате чего, складывается представление, что использование уравнения Пуассона (3) и условия электронейтральности альтернативны друг другу. Заметим, что использование условия электронейтральности не позволяет осуществлять прямое моделирование явлений, связанных с пространственным зарядом, в том числе, электроосмос.

Система уравнений (1-6) удобна для моделирования явлений в потенциодинамическом (потенциостатическом) режиме, поскольку содержит уравнения для потенциала (3), однако неудобна для моделирования явлений в гальванодинамическом (гальваностатическом) режиме, поскольку нет дифференциального уравнения для плотности тока.

В работе [31] для решения этих проблем производится преобразование исходной системы уравнений путем введение новых неизвестных функций:

1) Индикаторной функции (обобщенной концентрации)

$\tilde{S} = C_1 + C_2 + z_1 z_2 \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2$ . В области электронейтральности функция  $\tilde{S}$  имеет смысл суммарной концентрации и является, соответственно, положительной функцией, в области пространственного заряда, функция  $\tilde{S}$  описывает дефект концентрации (отрицательная величина), вызванный дополнительным сверхпредельным переносом ионов.

2) Общей плотности тока  $\vec{\Phi} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{Pe} \vec{I}$ . В то время, как плотность тока  $\vec{I}$ ,

определяемая потоком ионов не является соленоидальным полем, можно показать, общая плотность тока является соленоидальным полем, что позволяет ввести функцию тока  $\eta$  для общей плотности тока

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\Phi_1, \frac{\partial \eta}{\partial x} = \Phi_2 \right).$$

Преобразование системы уравнений (1)-(6) производится так, чтобы число неизвестных функций уменьшилось, структура уравнений

улучшилась, и появилась возможность формировать математические модели, промежуточные между использованием уравнения Пуассона и условия электронейтральности. Полученная таким образом, система уравнений была названа декомпозиционной [31]:

$$\begin{aligned}
 Pe \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = & d_2 z_1 z_2 \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{E}) - \frac{\varepsilon}{2} d_2 z_1^2 z_2^2 \operatorname{div}(\|\vec{E}\|^2 \vec{E}) - \varepsilon d_3 (\operatorname{div} \vec{E})^2 - \\
 & - \frac{1}{2} \varepsilon d_3 \Delta \|\vec{E}\|^2 + \varepsilon d_3 \|\nabla E_1\|^2 + \varepsilon d_3 \|\nabla E_2\|^2 - d_1 \Delta \tilde{S} + z_1 z_2 \frac{d_1 \varepsilon}{2} \Delta \|\vec{E}\|^2 + \\
 & + \varepsilon d_2 \Delta (\operatorname{div} \vec{E}) - Pe \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{V}) + z_1 z_2 Pe \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{div}(\|\vec{E}\|^2 \vec{V}) + z_1 z_2 Pe \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\vec{E}\|^2,
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon Pe \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = & d_3 z_1 z_2 \tilde{S} \vec{E} - \frac{\varepsilon}{2} d_3 z_1^2 z_2^2 \|\vec{E}\|^2 \vec{E} - \varepsilon d_4 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - d_2 z_1 z_2 \nabla \tilde{S} - \\
 & + \frac{\varepsilon}{2} d_2 z_1^2 z_2^2 \nabla \|\vec{E}\|^2 + \varepsilon d_3 \Delta \vec{E} - \varepsilon Pe (\vec{V} \operatorname{div} \vec{E}) + Pe \cdot \vec{\Phi}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 Pe \cdot \Delta \eta = & \left( \nabla \left( -d_3 z_1 z_2 \tilde{S} + d_3 z_1^2 z_2^2 \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2 + d_4 \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} \right), \vec{E} \right)_1 + \\
 & + \varepsilon Pe (\Delta \vec{E}, \vec{V})_1 + \varepsilon Pe \operatorname{div} \vec{E} \cdot r(\vec{V}),
 \end{aligned} \tag{9}$$

где  $r(\vec{u}) = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$ ,  $(\vec{a}, \vec{b})_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$ .

К этой системе уравнений следует добавить и уравнения Навье-Стокса (5), (6).

Система уравнений (5-9) является замкнутой и содержит 6 уравнения с 6 неизвестными (в скалярном виде)  $\vec{V}$ ,  $\tilde{S}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\eta$  в то время как исходная система (1-6) состояла из 12 уравнений с 12 неизвестными. Система уравнений (5-9), как будет показано ниже, удобна для вывода различных упрощенных моделей переноса ионов соли с учетом электроосмоса.

## 2 Оценка безразмерных параметров

Для вывода модельных задач используется асимптотическая оценка членов уравнения, в связи с чем, необходимо оценить величины безразмерных параметров.

### 2.1 Оценка числа Рейнольдса

Характерным размером в микро- и наноплюидике служит ширина  $H$  нано- и микроканалов имеющая порядок микронов и нанометров.

Из формулы числа Рейнольдса  $Re = V_0 H / \nu$  следует, что уменьшение линейных размеров ( $H$ ) и (или) средней скорости течения ( $V_0$ ) при неизменной вязкости ( $\nu$ ) эквивалентно (число Рейнольдса остается постоянным и соответствующие течения будут подобными) увеличению вязкости ( $\nu$ ) при неизменных линейных размеров ( $H$ ) и средней скорости течения ( $V_0$ ). Таким образом, с уменьшением линейных размеров жидкости ведут себя как более вязкие и для придания им даже небольших скоростей движения необходимо прилагать значительные давления, что не всегда возможно. Кроме того, это ведет к уменьшению экономичности процессов. Поэтому средние скорости течения  $V_0$  в микро- и нанофлюидике значительно меньше, чем, например, в канале обессоливания электродиализного аппарата, имеющем ширину порядка 1мм. Все это приводит к тому, что число Рейнольдса в микро- и наноканалах значительно меньше чем в канале обессоливания электродиализного аппарата. Характерная ширина микроканалов имеет порядок от 10 мкм до 100 мкм, поэтому число Рейнольдса имеет порядок от  $Re \approx 10 \cdot V_0$  до  $Re \approx 100 \cdot V_0$ , где скорость задается в м/с. В реальных условиях в микро- и наноканалах, когда средняя скорость имеет, например, порядок 10 мкм/с, число Рейнольдса – от  $10^{-4}$  до  $10^{-3}$ . Для наноканалов число Рейнольдса значительно меньше чем для микроканалов. Для обычных условий скорости и линейного размера, такое число соответствует весьма вязкой жидкости, т.е. в микро- и наноканалах имеем ползучее течение, которое описывается уравнением Стокса. В дальнейшем число Рейнольдса будем считать малым параметром.

## 2.2 Оценка числа Пекле

Число Пекле для микроканала имеет порядок от  $Pe = 10^4 V_0$  до  $Pe = 10^5 V_0$  и для характерных скоростей прокачки для микроканалов имеет порядок 1, т.е. для микроканалов число Пекле не

является ни большим, ни малым параметром. Диффузия и конвективный перенос в микроканалах имеют одинаковое значение. Для наноканалов, при средних скоростях 0.1мм/с и меньше, число Пекле можно считать малым параметром и диффузия доминирует над конвективным переносом.

### 2.3 Оценка параметра $\varepsilon$

Этот параметр, впервые введен в работах [4, 5], где дана его интерпретация в виде удвоенного квадрата отношений Дебаевской длины  $l_D$  к ширине канала  $\varepsilon = 2l_D^2 / H^2$ . Формула для  $\varepsilon$  для наноканалов (например, при  $H = 10$  нм) запишется в виде:  $\varepsilon = 2l_D^2 / H^2 = 2 \cdot 10^{16} \cdot 1,16 \cdot 10^{-18} / C_0 = 2,32 \cdot 10^{-2} / C_0$ . Из этой формулы следует, что параметр  $\varepsilon$  уже при  $C_0 = 10 \text{ моль} / \text{м}^3$  имеет порядок  $10^{-3}$ . Для микроканалов  $\varepsilon$  еще меньше. В дальнейшем его будем считать малым параметром.

### 2.4 Оценка параметра $K_{el}$

Этот параметр, впервые введен в работах [31], где дана его интерпретация. Для оценки значения  $K_{el}$  запишем его в виде:

$$K_{el} = \frac{RTC_0}{\rho_0 V_0^2} = \frac{8,314 \cdot 293 \cdot C_0}{1002,5 \cdot V_0^2} \approx 2,42 \frac{C_0}{V_0^2} \text{ или } K_{el} \approx 2,42 \frac{C_0}{V_0^2}.$$

Оценка параметра  $K_{el}$  в зависимости от значений  $C_0$  и  $V_0$  дана ниже в таб.1.

Таблица 1. Оценка параметра  $K_{el}$ .

$C_0 \text{ моль} / \text{м}^3$	100	10	1	0,1	0,01
$V_0 \text{ м} / \text{с}$					
$10^{-3}$	$2,42 \cdot 10^8$	$2,42 \cdot 10^7$	$2,42 \cdot 10^6$	$2,42 \cdot 10^5$	$2,42 \cdot 10^4$
$10^{-4}$	$2,42 \cdot 10^{10}$	$2,42 \cdot 10^9$	$2,42 \cdot 10^8$	$2,42 \cdot 10^7$	$2,42 \cdot 10^6$

Видно, что число  $K_{el}$  может считаться большим параметром.

### 2.5 Оценка параметра $Re K_{el}$

Важным для упрощения уравнения Навье-Стокса является оценка значения  $Re K_{el}$ . Из формул для  $Re$  и  $K_{el}$  получаем:  $Re K_{el} = 2,42 \cdot 10^{-2} C_0 / V_0$ .

Оценка  $Re K_{el}$  в зависимости от значений  $C_0$  и  $V_0$  дана ниже в табл.2

Таблица 2. Оценка величины  $Re K_{el}$

$C_0$ моль/м <sup>3</sup>	100	10	1	0.1	0.01
$V_0$ м/с					
$10^{-3}$	$2,42 \cdot 10^3$	242	24.2	2,42	0,242
$10^{-4}$	$2,42 \cdot 10^4$	$2,42 \cdot 10^3$	242	24.2	2,42

Из табл. 2 следует, что значения  $Re K_{el}$  немалы, а для концентрации 10 моль/м<sup>3</sup> и 100 моль/м<sup>3</sup> больше, при скорости меньше  $10^{-4}$  и  $10^{-3}$  меньше, являются большими.

### 3. Алгоритм вывода иерархической системы математических моделей

Для вывода иерархической системы математических моделей переноса используем физически очевидные гипотезы и предположения, справедливость которых проверена численно и аналитически в одномерном случае [8-10, 12-14]:

1) В ядре потока раствора выполняется условие локальной электронейтральности. В области электронейтральности все неизвестные функции и их производные ограничены при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ :  $\tilde{S} = O(1)$ ,  $\vec{E} = O(1)$ ,  $\eta = O(1)$  и т.д.

2) Область пространственного заряда расположена вблизи межфазных границ, причем все неизвестные функции и их производные, в этой области, за исключением напряженности электрического поля, ограничены при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . Напряженность электрического поля и ее производные имеют порядок  $O(1/\sqrt{\varepsilon})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ ;

3) Будем оценивать члены каждого из декомпозиционных уравнений, отдельно в области электронейтральности и пространственного заряда, и выделять значимые. Оставляя в каждом уравнении значимые, хотя бы в одной из областей члены, и отбрасывая другие, получим упрощенные уравнения.

4) Согласно теории сингулярных возмущения [32], [33] старшие производные, умноженные на малый параметр, необходимо удерживать в уравнениях для удовлетворения краевых условий.

5) При упрощении уравнения Навье-Стокса нужно учесть, что число Рейнольдса является малым параметром.

б) Пункты 1)-5) представляют собой лишь способ рассуждения, но не обоснование, позволяющий получать упрощенные уравнения. Адекватность соответствующих математических моделей должна проверяться впоследствии и независимо от 1)-5).

#### 4 Упрощение декомпозиционных уравнений

##### 4.1 Упрощение уравнения для обобщенной концентрации

$$Pe \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = d_2 z_1 z_2 \operatorname{div}(\tilde{S} \bar{E}) - \frac{\varepsilon}{2} d_2 z_1^2 z_2^2 \operatorname{div}(\|\bar{E}\|^2 \bar{E}) - \varepsilon d_3 (\operatorname{div} \bar{E})^2 - \\ - \frac{1}{2} \varepsilon d_3 \Delta \|\bar{E}\|^2 + \varepsilon d_3 \|\nabla E_1\|^2 + \varepsilon d_3 \|\nabla E_2\|^2 - d_1 \Delta \tilde{S} + z_1 z_2 \frac{d_1 \varepsilon}{2} \Delta \|\bar{E}\|^2 + \\ + \varepsilon d_2 \Delta (\operatorname{div} \bar{E}) - Pe \operatorname{div}(\tilde{S} \bar{V}) + z_1 z_2 Pe \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{div}(\|\bar{E}\|^2 V) + z_1 z_2 Pe \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\bar{E}\|^2,$$

а) Оценим члены уравнения в области электронейтральности и найдем значимые члены уравнения.

Очевидно, что в области электронейтральности все члены уравнения, содержащие малый параметр  $\varepsilon$  будут незначимыми, а значимыми будут следующие члены уравнения:

$$Pe \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}, d_2 z_1 z_2 \operatorname{div}(\tilde{S} \bar{E}), -d_1 \Delta \tilde{S}, -Pe \operatorname{div}(\tilde{S} \bar{V}). \quad (10)$$

б) Оценим члены уравнения в области пространственного заряда и найдем значимые члены уравнения.

В области пространственного заряда значимыми будут члены уравнения, имеющие порядок  $O(1/\sqrt{\varepsilon})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , а именно

$$z_1 z_2 d_2 \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{E}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad z_1^2 z_2^2 d_2 \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{div}\left(\|\vec{E}\|^2 \vec{E}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right). \quad (11)$$

$$Pe \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = d_2 z_1 z_2 \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{E}) - \frac{\varepsilon}{2} d_2 z_1^2 z_2^2 \operatorname{div}\left(\|\vec{E}\|^2 \vec{E}\right) - d_1 \Delta \tilde{S} - Pe \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{V}). \quad (12)$$

Оставляя в уравнении только члены уравнения (10) и (11) получаем уравнение (12), которое должно быть справедливым одновременно в областях электронейтральности и пространственного заряда.

#### 4.2 Упрощение уравнения для напряженности электрического поля

$$\varepsilon Pe \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = d_3 z_1 z_2 \tilde{S} \vec{E} - \frac{\varepsilon}{2} d_3 z_1^2 z_2^2 \|\vec{E}\|^2 \vec{E} - \varepsilon d_4 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - d_2 z_1 z_2 \nabla \tilde{S} - \frac{\varepsilon}{2} d_2 z_1^2 z_2^2 \nabla \|\vec{E}\|^2 + \varepsilon d_3 \Delta \vec{E} - \varepsilon Pe (\vec{V} \operatorname{div} \vec{E}) + Pe \cdot \vec{\Phi}.$$

а) Очевидно, как и выше, в области электронейтральности все члены уравнения, содержащие малый параметр  $\varepsilon$ , будут незначимыми, а значимыми будут следующие члены уравнения

$$d_3 z_1 z_2 \tilde{S} \vec{E}, \quad -d_2 z_1 z_2 \nabla \tilde{S}, \quad Pe \vec{\Phi}. \quad (13)$$

б) В области пространственного заряда значимыми будут члены уравнения, имеющие порядок  $O(1/\sqrt{\varepsilon})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , а именно

$$d_3 z_1 z_2 \tilde{S} \vec{E}, \quad -\frac{\varepsilon}{2} d_3 z_1^2 z_2^2 \|\vec{E}\|^2 \vec{E}. \quad (14)$$

$$\varepsilon Pe \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \varepsilon d_3 \Delta \vec{E}. \quad (15)$$

Особого внимания требуют к себе слагаемые (15), содержащие старшие производные. В соответствии с теорией сингулярных возмущений их необходимо удерживать для удовлетворения начального и граничных условий.

Оставляя в уравнении только члены (13), (14) и (15), получаем уравнение

$$\varepsilon Pe \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = d_3 z_1 z_2 \tilde{S} \vec{E} - \frac{\varepsilon}{2} d_3 z_1^2 z_2^2 \|\vec{E}\|^2 \vec{E} - d_2 z_1 z_2 \nabla \tilde{S} + \varepsilon d_3 \Delta \vec{E} + Pe \vec{\Phi}, \quad (16)$$

которое должно быть справедливым одновременно в областях электронейтральности и пространственного заряда.

#### 4.3 Упрощение уравнения для $\eta$

$$Pe \cdot \Delta \eta = \left( \nabla \left( -d_3 z_1 z_2 \tilde{S} + d_3 z_1^2 z_2^2 \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2 + d_4 \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} \right), \vec{E} \right)_1 + \varepsilon Pe (\Delta \vec{E}, \vec{V})_1 + \varepsilon Pe \operatorname{div} \vec{E} \cdot r(\vec{V}).$$

Рассуждения, аналогичные, проведенным выше, приводят к уравнению

$$Pe \cdot \Delta \eta = \left( \nabla \left( -d_3 z_1 z_2 \tilde{S} + d_3 z_1^2 z_2^2 \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2 \right), \vec{E} \right)_1. \quad (17)$$

#### 4.4 Упрощение уравнения Навье-Стокса

Перейдем в уравнении Навье-Стокса в выражении электрической силы к напряженности электрического поля ( $\vec{E} = -\nabla \varphi$ ) и умножим обе части на число Рейнольдса, тогда получим:

$$Re \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + Re (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -Re \nabla P + \Delta \vec{V} + Re K_{el} \varepsilon \vec{E} \operatorname{div} \vec{E}.$$

Используя те же рассуждения что и выше и дополнительно учитывая, что число Рейнольдса мало, получаем, что в области электронейтральности значимым является только  $\Delta \vec{V}$ , а в области пространственного заряда  $\varepsilon Re K_{els} \vec{E} \operatorname{div} \vec{E}$ . Учитывая дополнительно и  $Re \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ ,

получаем следующее упрощенное уравнение

$$Re \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \Delta \vec{V} + \varepsilon Re K_{els} \vec{E} \operatorname{div} \vec{E}, \quad (18)$$

которое является нестационарным уравнением Стокса с пространственной силой.

## 5 Иерархическая система математических моделей

### 5.1 Общая упрощенная модель (ОУМ)

Объединяя вместе все упрощенные выше уравнения (12), (16)-(18), получаем общую упрощенную модель (ОУМ), которая описывается системой уравнений:

$$Pe \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = d_2 z_1 z_2 \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{E}) - \frac{\varepsilon}{2} d_2 z_1^2 z_2^2 \operatorname{div}(\|\vec{E}\|^2 \vec{E}) - d_1 \Delta \tilde{S} - Pe \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{V}),$$

$$\varepsilon Pe \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = d_3 z_1 z_2 \tilde{S} \vec{E} - \frac{\varepsilon}{2} d_3 z_1^2 z_2^2 \|\vec{E}\|^2 \vec{E} - d_2 z_1 z_2 \nabla \tilde{S} + \varepsilon d_3 \Delta \vec{E} + Pe \vec{\Phi},$$

$$Pe \cdot \Delta \eta = \left( \nabla \left( -d_3 z_1 z_2 \tilde{S} + d_3 z_1^2 z_2^2 \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2 \right), \vec{E} \right)_1,$$

$$Re \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \Delta \vec{V} + \varepsilon Re K_{el} \vec{E} \operatorname{div} \vec{E}.$$

Система уравнений ОУМ по сравнению с исходной и декомпозиционными системами уравнений значительно проще. При решении системы уравнений ОУМ на все неизвестные функции  $\vec{V}$ ,  $\tilde{S}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\eta$  необходимо накладывать граничные и начальные условия (за исключением  $\eta$ ).

### 5.2 Модель без начального погранслоя (БНП)

Члены уравнения  $\varepsilon Pe \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ,  $Re \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$  системы ОУМ отвечают за переходные процессы (начальные погранслои). Если не учитывать переходные процессы, то получим модельную задачу, описываемую системой уравнений:

$$Pe \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = d_2 z_1 z_2 \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{E}) - \frac{\varepsilon}{2} d_2 z_1^2 z_2^2 \operatorname{div}(\|\vec{E}\|^2 \vec{E}) - d_1 \Delta \tilde{S} - Pe \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{V}), \quad (19)$$

$$d_3 z_1 z_2 \tilde{S} \vec{E} - \frac{\varepsilon}{2} d_3 z_1^2 z_2^2 \|\vec{E}\|^2 \vec{E} - d_2 z_1 z_2 \nabla \tilde{S} + \varepsilon d_3 \Delta \vec{E} + Pe \vec{\Phi} = 0, \quad (20)$$

$$Pe \Delta \eta = \left( \nabla \left( -d_3 z_1 z_2 \tilde{S} + d_3 z_1^2 z_2^2 \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2 \right), \vec{E} \right)_1, \quad (21)$$

$$\Delta \vec{V} + \varepsilon Re K_{els} \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (22)$$

Система уравнений (19-22) описывает нестационарный процесс переноса ионов соли и электроосмос без начального погранслоя (переходных процессов), поэтому соответствующую модель будем называть моделью БНП (без начального погранслоя). Естественно, что при решении системы (19)-(22) начальные условия на функции  $\vec{E}$  и  $\vec{V}$  не накладываются.

### 5.3 Модель с обобщенным законом Ома

Во втором уравнении,  $\varepsilon d_3 \Delta \vec{E}$  служит для удовлетворения граничных условий для напряженности электрического поля. Если отбросить  $\varepsilon d_3 \Delta \vec{E}$ , то получим систему уравнений:

$$Pe \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = d_2 z_1 z_2 \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{E}) - \frac{\varepsilon}{2} d_2 z_1^2 z_2^2 \operatorname{div}(\|\vec{E}\|^2 \vec{E}) - d_1 \Delta \tilde{S} - Pe \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{V}), \quad (23)$$

$$d_3 z_1 z_2 \tilde{S} \vec{E} - \frac{\varepsilon}{2} d_3 z_1^2 z_2^2 \|\vec{E}\|^2 \vec{E} - d_2 z_1 z_2 \nabla \tilde{S} + Pe \vec{\Phi} = 0, \quad (24)$$

$$Pe \Delta \eta = \left( \nabla \left( -d_3 z_1 z_2 \tilde{S} + d_3 z_1^2 z_2^2 \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2 \right), \vec{E} \right)_1, \quad (25)$$

$$\Delta \vec{V} + \varepsilon Re K_{els} \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (26)$$

Выражая  $\vec{E}$ , из уравнения (24), получаем, что для этой модели выполняется некоторое обобщение закона Ома [11], а именно:

$$\vec{E} = -\frac{d_2 z_1 z_2}{\chi} \nabla \tilde{S} + \frac{1}{Pe \cdot \chi} \vec{\Phi}, \quad \text{где}$$

$$\chi(C) = -d_3 z_1 z_2 \left( \tilde{S} - z_1 z_2 \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2 \right) = -d_3 z_1 z_2 S_0 = -d_3 z_1 z_2 (C_1 + C_2) \quad \text{является}$$

проводимостью раствора, следовательно, модель переноса бинарного электролита, описываемую системой уравнений (23-26) можно назвать моделью электроосмоса в приближении обобщенного закона Ома (ЗОМ).

Уравнение (24) является относительно  $\vec{E}$  векторным кубическим уравнением, допускающим точное решение. Таким образом, для решения модели ЗОМ не требуется краевых условий на потенциал. Кроме того, уравнение (25) является уравнением, позволяющим находить плотность

тока. Таким образом, модель ЗОМ удобна для моделирования гальванодинамического режима. При решении системы уравнений (23-26) краевые условия на  $\vec{E}$  не требуются.

#### 5.4 Модель ЗОМ для 1:1 электролита

Простейшей моделью ЗОМ электроосмоса является модель ЗОМ для симметричного 1:1 электролита с одинаковыми коэффициентами диффузии катиона и аниона. В качестве такого электролита можно приближенно рассматривать водный раствор *KCl*. В этом случае  $d_1 = -1$ ,  $d_2 = 0$ ,  $d_3 = 1$ ,  $d_4 = 0$  и система уравнений (23-26) значительно упрощается:

$$Pe \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \Delta \tilde{S} - Pe \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{V}), \quad (27)$$

$$-\tilde{S} \vec{E} - \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2 \vec{E} + Pe \vec{\Phi} = 0, \quad (28)$$

$$Pe \Delta \eta = \left( \nabla \left( \tilde{S} + \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{E}\|^2 \right), \vec{E} \right)_1, \quad (29)$$

$$\Delta \vec{V} + \varepsilon Re K_{els} \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (30)$$

Заметим, что для симметричного электролита, выполняется закон Ома:  $\vec{E} = Pe \vec{\Phi} / \chi$ . Кроме того, (27) является линейным дифференциальным уравнением, содержащим лишь  $\tilde{S}$ , и может решаться независимо от других уравнений. Как и (24), уравнение (28) является относительно  $\vec{E}$  векторным кубическим уравнением, допускающим точное решение, причем (29) является условием его разрешимости, (30) – это уравнение Стокса с электрической силой. Таким образом, при соответствующей постановке краевых условий, модель ЗОМ будет иметь решение. В работе [34] было показано, что краевая задача для системы уравнений (27-29) достаточно хорошо приближает решение краевой задачи для исходной системы уравнений (1-4). В то же время известно, что при малых числах  $Re$  решение краевой задачи для уравнения Стокса хорошо приближает решение краевой задачи для уравнения Навье-Стокса. Таким образом, есть

основание считать модель ЗОМ является адекватной моделью электроосмоса. Проверке этого, а также постановке краевых условий посвящена часть 2 данной работы.

**Замечание 1.** Наряду с нестационарными моделями, рассмотренными выше можно рассмотреть и стационарные модели электроосмоса.

**Замечание 2.** Приведенные выше уравнения, являются фактически законами сохранения и должны дополняться для каждого случая соответствующими краевыми условиями, определяющими цели конкретного исследования.

### **6. Общая идея асимптотического решения**

Пусть  $H$ ,  $L$  - ширина и длина канала. Основная идея решения модели ЗОМ, заключается в разбиении области решения  $[0, H] \times [0, L]$  на несколько областей (рис.1): область электронейтральности  $U_2$ , область пространственного заряда  $U_{1,1} \cup U_{1,2}$ , промежуточная область  $U_3 \cup U_4$ . В каждой из этих областей решение ищется в виде разложения по разным асимптотическим шкалам, которые затем сращиваются. Можно показать, что начальные асимптотические разложения в основных областях, электронейтральности, пространственного заряда у всех моделей совпадают. Таким образом, основой решения моделей БНП и ОУМ служит решение модели ЗОМ. Чтобы получить начальное приближение решения модели БНП нужно дополнить начальное приближение решения модели ЗОМ решением в погранслоях (1-3) (рис.1) и угловых погранслоях (4) и (5). Для решения ОУМ нужно добавить к решению модели БНП начальные погранслои.

Асимптотическим разложениям посвящена часть 3 данной работы.

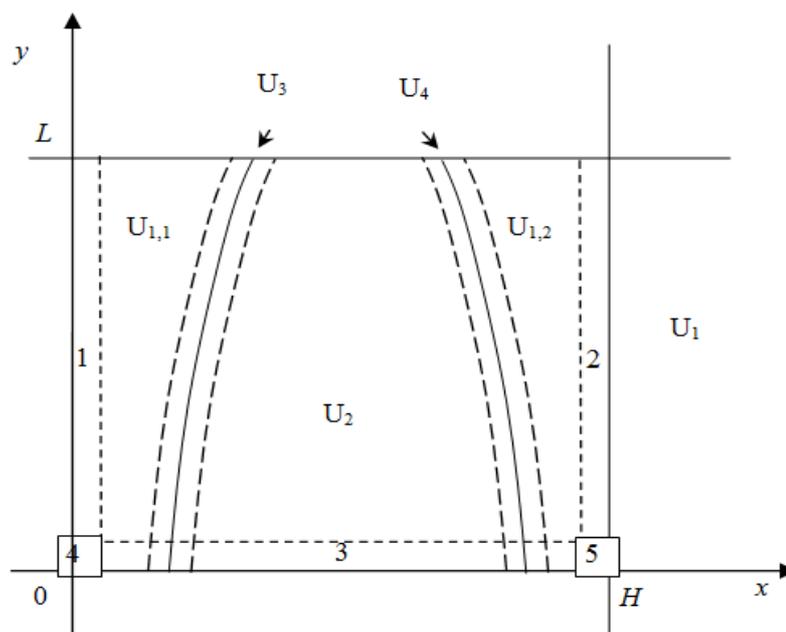


Рисунок 1. Разбиении области решения на подобласти:  $U_1 = U_{1,1} \cup U_{1,2}$  – область пространственного заряда;  $U_2$  – область электронейтральности;  $U_3, U_4$  – промежуточные слои; 1 – ПОУ – погранслои около  $x=0, \forall y$ ; 2 – ПНУ – погранслои около  $x=H, \forall y$ ; 3 – ПХО – погранслои около  $y=0, \forall x$ ; 4 – УПОО – угловой погранслои около  $x=0, y=0$ ; 5 – УПНО – угловой погранслои около  $x=H, y=0$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе с использованием метода декомпозиции разработана система иерархических моделей электроосмоса в микро- и наноканалах ограниченных ионообменными мембранами. Построена простейшая модель электроосмоса для 1:1 электролита с одинаковыми коэффициентами диффузии катионов и анионов. Эта модельная задача достаточно проста для численного и аналитического решения и может служить эталонной моделью электроосмоса в микро- и наноканалах.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-08-96525 р\_юг\_а, 13-08-93105-НЦНИЛ\_а, 13-08-93106-НЦНИЛ\_а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Orenstein D. 'Microfluidic' chips may accelerate biomedical research//Stanford Report, Jan 18, 2006
2. Holstun C.L., Tyvoll D. (assignee: Hewlett-Packard Development Company, L.P.) Generation of gas in a lab-on-a-chip environment//US Patent, 6814852 B2, 2004, 1-14
3. Kim H.Y. (assignee: Electronics and Telecommunications Research Institute) LAB-ON-A-CHIP AND METHOD OF DRIVING THE SAME//US Patent, 0151475, 2011, 1-15
4. Графов Б.М. Прохождение постоянного тока через раствор бинарного электролита / Б.М. Графов, А.А. Черненко // Журнал физической химии. — 1963. — Т.37. — С. 664.
5. Графов Б.М. Теория прохождения постоянного тока через раствор бинарного электролита/ Б.М. Графов, А.А. Черненко // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 146. №1. — С. 135-138.
6. Духин С.С. Исчезновение феномена предельного тока в случае гранулы ионита / С.С. Духин, Н.А. Мищук// Коллоидный журнал —1989. — Т.51. — №4.—С.659.
7. Коваленко А.В. 2Д моделирование переноса 1:1 электролита в электромембранных системах при выполнении условия электронейтральности // Политематический сетевой электронный научный журнал КубГАУ — Краснодар: КубГАУ, 2015. — №06(110).
8. Коваленко А.В. Краевые задачи для системы электродиффузионных уравнений. Часть 1. Одномерные задачи. / А.В. Коваленко, М.Х. Уртенев Germany, Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. — 2011. — 281 с.
9. Листовничий А.В. Прохождение токов больше предельного через систему электрод-раствор электролита // Электрохимия. — 1989. — Т.25. — №12. — С.1651.
10. Никоненко В.В. Электроперенос ионов через диффузионный слой с нарушенной электронейтральностью / В.В. Никоненко, В.И. Заболоцкий, Н.П. Гнусин // Электрохимия. — 1989. — Т.25. №3. — С.301.
11. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. М.: Мир, 1977, 463 с.
12. Уртенев М.Х. Анализ решения краевой задачи для уравнений Нернста-Планка-Пуассона. Случай 1:1 электролита / М.Х. Уртенев, В.В. Никоненко // Электрохимия. — 1993. — Т.29. — №2. — С.239
13. Уртенев М.Х. Асимптотический и численный анализ уравнений Нернста-Планка-Пуассона // Деп. №6968-В86.М.: ВИНТИ, — 1986. 18с.
14. Уртенев М.Х. Математические модели электромембранных систем очистки воды (монография) / М.Х. Уртенев, Р.Р. Сеидов — Краснодар: КубГУ, — 2000. — 140 с.
15. Уртенев М.Х. Математическое моделирование электроконвекции в канале обессоливания электродиализатора с учетом вынужденной конвекции/ М.Х. Уртенев, А.В. Коваленко, В.В. Никоненко, А.М. Узденова // Экологический вестник научных центров ЧЭС. — Краснодар: КубГУ. — №4. — 2011. — С. 68-74
16. Belashova E.D. Overlimiting mass transfer through cation-exchange membranes modified by Nafion film and carbon nanotubes / E.D. Belashova, N.A. Melnik, N.D. Pismenskaya, K.A. Shevtsova, K.A. Lebedev, V.V. Nikonenko // Electrochim. Acta — 59 (2012) — P. 412
17. Dukhin S.S. Unlimited increase in the current through an ionite granule / S.S. Dukhin, N.A. Mishchuk // Kolloid. Zh. — 49 (8) (1987) — P. 1197.
18. Kwak R. Shear flow of an electrically charged fluid by ion concentration polarization: scaling laws for convection vortices/ R. Kwak, V.S. Pham, J. Han// Phys. Rev. Lett. — 110 (2013) — P. 114501.
19. Rubinstein I. Role of the membrane surface in concentration polarization at ion-

exchange membrane/ I. Rubinstein, E. Staude, O. Kedem, // Desalination — 69 (1988) — P. 101.

20. Rubinstein I. Voltage against current curves of cation-exchange membranes / I. Rubinstein, L. Shtilman// J. Chem. Soc., Faraday Trans. 1979 (75) P. 231.

21. Urtenov M.K. Basic mathematical model of overlimiting transfer enhanced by electroconvection in flow-through electro dialysis membrane cells / M.K. Urtenov, A.M. Uzdanova, V.V. Nikonenko, N.D. Pismenskaya, A.V. Kovalenko, V.I. Vasil'eva, P. Sistat, G. Pourcelly // Journal of Membrane Science — 447. USA. ELSEVIER. — 2013. — P. 190-202

22. Zabolotsky V.I. Coupled transport phenomena in overlimiting current electro dialysis / V.I. Zabolotsky, V.V. Nikonenko, N.D. Pismenskaya, E.V. Laktionov, M.Kh. Urtenov, H. Strathmann, M. Wessling, G.H. Koops // Separ. Purif. Technol. — 14 (1998) — P. 255.

23. Уртенев М.Х., Письменский А.В. Моделирование гравитационной конвекции в электро мембранных системах очистки воды // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – Краснодар: КубГУ, 2004. – №3. – С.64-69.

24. Коваленко А.В., Уртенев М.Х. Вывод и обоснования формул для приближенного решения уравнения для плотности тока при выполнении условия электронейтральности // Обзорение прикладной и промышленной математики. - 2010. – № 5(2).

25. Коваленко А.В., Уртенев М.Х., Ярощук А.Э., Жолковский Э.К. 2Д-моделирование переноса бинарного электролита в электро мембранных системах. Известия Кубанского государственного университета. Естественные науки. Издательско-полиграфический центр Кубанского государственного университета. – Краснодар: 2013. 52-57с.

26. Лаврентьев А.В., Письменский А.В., Уртенев М.Х. Математическое моделирование переноса в электро мембранных системах с учетом конвективных течений: Монография / Кубан. гос. технол. ун-т.- Краснодар: ГОУ ВПО «КубГТУ», 2006. -147с.

27. Pismenskiy A., Urtenov M., Nikonenko V., Pismenskaya N., Pourcelly G Modelling of gravitational convection in electromembrane systems Book of Abstracts of International Congress «Euromembrane'2004», Hamburg, Germany, 28 Sep. - 1 Oct. 2004. TUHH-Technologie GmbH, Hamburg, Germany, 2004. – P.489.

28. Urtenov M., Pismenskiy A., Nikonenko V., Pourcelly G. Pis'menskij A., Nikonenko V., Purselli Zh., Mathematical modelling of gravitational convection in electro dialysis processes // Desalination. – 2006. Vol.192.

29. Коваленко А.В., Уртенев М.Х. , Письменский А.В., Никоненко В.В., Сиса Ф., Письменская Н.Д. Моделирование и экспериментальное исследование гравитационной конвекции в электро мембранной ячейке // Электрохимия Т.48 №7, 2012. С.830-842

30. Коваленко А.В., Никоненко В.В., Уртенев М.Х., Лойко В.И. Физический смысл некоторых критериев подобия процесса переноса в канале обессоливания электро диализного аппарата с учетом электро конвекции // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета: научный журнал КубГАУ. - № 01 (105). <http://ej.kubagro.ru/2015/01/pdf/51.pdf> г. Краснодар "КубГАУ" 2015. с. 846-865

31. Хромых А.А., Коваленко А.В., Уртенев М.Х Двумерные математические модели переноса тернарного электролита в мембранных системах Краснодар, Кубанский государственный университет, 2014. с. 227

32. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 207 с.

33. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.

М.: Наука, 1989. 336с.

34. Коваленко А.В. Численный анализ 2D модели ЗОМ переноса симметричного бинарного электролита // *Фундаментальные исследования*. – 2015. – № 11–1. – С. 59 - 65

#### REFERENCES

1. Orenstein D. 'Microfluidic' chips may accelerate biomedical research//Stanford Report, Jan 18, 2006

2. Holstun C.L., Tyvoll D. (assignee: Hewlett-Packard Development Company, L.P.) Generation of gas in a lab-on-a-chip environment//US Patent, 6814852 B2, 2004, 1-14

3. Kim H.Y. (assignee: Electronics and Telecommunications Research Institute) LAB-ON-A-CHIP AND METHOD OF DRIVING THE SAME//US Patent, 0151475, 2011, 1-15

4. Grafov B.M. Prohozhdenie postojannogo toka cherez rastvor binarnogo jelektrolita / B.M. Grafov, A.A. Chernenko // *Zhurnal fizicheskoj himii*. — 1963. — T.37. — S. 664.

5. Grafov B.M. Teorija prohozhdenija postojannogo toka cherez rastvor binarnogo jelektrolita/ B.M. Grafov, A.A. Chernenko // *Dokl. AN SSSR*. — 1962. — T. 146. №1. — S. 135-138.

6. Duhin S.S. Ischeznoenie fenomena predel'nogo toka v sluchae granuly ionita / S.S. Duhin, N.A. Mishhuk// *Kolloidnyj zhurnal* —1989. — T.51. — №4.—S.659.

7. Kovalenko A.V. 2D modelirovanie perenosa 1:1 jelektrolita v jelektromembrannyh sistemah pri vypolnenii uslovija jelektronejtral'nosti // *Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal KubGAU* — Krasnodar: KubGAU, 2015. — №06(110).

8. Kovalenko A.V. Kraevye zadachi dlja sistemy jelektrodiffuzionnyh uravnenij. Chast' 1. Odnomernye zadachi. / A.V. Kovalenko, M.H. Urtenov Germany, Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. — 2011. — 281 s.

9. Listovnichij A.V. Prohozhdenie tokov bol'she predel'nogo cherez sistemu jelektrod-rastvor jelektrolita // *Jelektrohimija*. — 1989. — T.25. — №12. — S.1651.

10. Nikonenko V.V. Jelektroperenos ionov cherez diffuzionnyj sloj s narushennoj jelektronejtral'nost'ju / V.V. Nikonenko, V.I. Zabolockij, N.P. Gnusin // *Jelektrohimija*. — 1989. — T.25. №3. — S.301.

11. N'jumen Dzh. *Jelektrohimicheskie sistemy*. M.: Mir, 1977, 463 s.

12. Urtenov M.H. Analiz reshenija kraevoj zadachi dlja uravnenij Nernsta-Planka-Puassona. Sluchaj 1:1 jelektrolita / M.H. Urtenov, V.V. Nikonenko // *Jelektrohimija*. — 1993. — T.29. — №2. — S.239

13. Urtenov M.H. Asimptoticheskij i chislennyj analiz uravnenij Nernsta-Planka-Puassona // *Dep. №6968-V86.M.: VINITI*, — 1986. 18s.

14. Urtenov M.H. *Matematicheskie modeli jelektromembrannyh sistem ochistki vody (monografija)* / M.H. Urtenov, R.R. Seidov — Krasnodar: KubGU, — 2000. — 140 s.

15. Urtenov M.H. *Matematicheskoe modelirovanie jelektrokonvekcii v kanale obessolivanija jelektrodializatora s uchetom vyzhdennoj konvekcii/* M.H. Urtenov, A.V. Kovalenko, V.V. Nikonenko, A.M. Uzdenova // *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov ChJeS*. — Krasnodar: KubGU. — №4. — 2011. — S. 68-74

16. Belashova E.D. Overlimiting mass transfer through cation-exchange membranes modified by Nafion film and carbon nanotubes / E.D. Belashova, N.A. Melnik, N.D. Pismenskaya, K.A. Shevtsova, K.A. Lebedev, V.V. Nikonenko // *Electrochim. Acta* — 59 (2012) — P. 412

17. Dukhin S.S. Unlimited increase in the current through an ionite granule / S.S. Dukhin, N.A. Mishchuk // *Kolloid. Zh.* — 49 (8) (1987) — P. 1197.

18. Kwak R. Shear flow of an electrically charged fluid by ion concentration polarization: scaling laws for convection vortices/ R. Kwak, V.S. Pham, J. Han// *Phys. Rev. Lett.* — 110 (2013) — P. 114501.
19. Rubinstein I. Role of the membrane surface in concentration polarization at ion-exchange membrane/ I. Rubinstein, E. Staude, O. Kedem, // *Desalination* — 69 (1988) — P. 101.
20. Rubinstein I. Voltage against current curves of cation-exchange membranes / I. Rubinstein, L. Shtilman// *J. Chem. Soc., Faraday Trans.* 1979 (75) P. 231.
21. Urtenov M.K. Basic mathematical model of overlimiting transfer enhanced by electroconvection in flow-through electro dialysis membrane cells / M.K. Urtenov, A.M. Uzdanova, V.V. Nikonenko, N.D. Pismenskaya, A.V. Kovalenko, V.I. Vasil'eva, P. Sizat, G. Pourcelly // *Journal of Membrane Science* — 447. USA. ELSEVIER. — 2013. — P. 190-202
22. Zabolotsky V.I. Coupled transport phenomena in overlimiting current electro dialysis / V.I. Zabolotsky, V.V. Nikonenko, N.D. Pismenskaya, E.V. Laktionov, M.Kh. Urtenov, H. Strathmann, M. Wessling, G.H. Koops // *Separ. Purif. Technol.* — 14 (1998) — P. 255.
23. Urtenov M.H., Pis'menskij A.V. Modelirovanie gravitacionnoj konvekcii v jelectromembrannyh sistemah oчитки vody // *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva.* – Krasnodar: KubGU, 2004. – №3. – S.64-69.
24. Kovalenko A.V., Urtenov M.H. Vyvod i obosnovanija formul dlja priblizhennogo reshenija uravnenija dlja plotnosti toka pri vypolnenii uslovija jelectronejtral'nosti // *Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki.* - 2010. – № 5(2).
25. Kovalenko A.V., Urtenov M.H., Jaroshhuk A.Je., Zholkovskij Je.K. 2D-modelirovanie perenosa binarnogo jelectrolita v jelectromembrannyh sistemah. *Izvestija Kubanskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki. Izdatel'sko-poligraficheskij centr Kubanskogo gosudarstvennogo universiteta.* – Krasnodar: 2013. 52-57s.
26. Lavrent'ev A.V., Pis'menskij A.V., Urtenov M.H. Matematicheskoe modelirovanie perenosa v jelectromembrannyh sistemah s uchetom konvektivnyh techenij: Monografija / *Kuban. gos. tehnol. un-t.- Krasnodar: GOU VPO «KubGTU», 2006. -147s.*
27. Pismenskiy A., Urtenov M., Nikonenko V., Pismenskaya N., Pourcelly G Modelling of gravitational convection in electromembrane systems *Book of Abstracts of International Congress «Euromembrane'2004», Hamburg, Germany, 28 Sep. - 1 Oct. 2004. TUHH-Technologie GmbH, Hamburg, Germany, 2004. – P.489.*
28. Urtenov M., Pismenskiy A.,Nikonenko V.,Pourcelly G.Pis'menskij A., Nikonenko V.,Purselli Zh., *Mathematical modelling of gravitational convection in electro dialysis processes // Desalination. – 2006. Vol.192.*
29. Kovalenko A.V., Urtenov M.H. , Pis'menskij A.V., Nikonenko V.V., Sista F., Pis'menskaja N.D. Modelirovanie i jeksperimental'noe issledovanie gravitacionnoj konvekcii v jelectromembrannoj jachejke // *Jelectrohimiya T.48 №7, 2012. S.830-842*
30. Kovalenko A.V., Nikonenko V.V., Urtenov M.H., Lojko V.I. Fizicheskij smysl nekotoryh kriteriev podobija processa perenosa v kanale obessolivanija jelectrodializnogo apparata s uchetom jelectrokonvekcii // *Politematicheskij setевой jelectronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta: nauchnyj zhurnal KubGAU. - № 01 (105). <http://ej.kubagro.ru/2015/01/pdf/51.pdf> g. Krasnodar"KubGAU" 2015. s. 846-865*
31. Hromyh A.A., Kovalenko A.V., Urtenov M.H Dvumernye matematicheskie modeli perenosa ternarnogo jelectrolita v membrannyh sistemah Krasnodar, Kubanskiy gosudarstvennyj universitet, 2014. s. 227
32. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij.* M.: Vyssh. shk., 1990. 207 s.

33. П'ин А.М. Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenij reshenij kraevyh zadach. – М.: Nauka, 1989. 336.

34. Kovalenko A.V. Chislennyj analiz 2D modeli ZOM perenosa simmetrichnogo binarnogo jelektrolita // Fundamental'nye issledovanija. – 2015. – № 11–1. – S. 59 - 65