УДК 528.13

25.00.00 Науки о Земле

К ВОПРОСУ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ИЗ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Соколов Юрий Григорьевич
к.т.н., профессор

Струсь Сергей Сергеевич
к.э.н., доцент

Пшидаток Саида Казбековна
к.с.-х.н., доцент
Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

В статье рассматривается вопрос развитии планового обоснования по проездам и просекам в застроенных и лесных районах, а также при создании строительных сеток. Чаще всего рекомендуется использовать способ без диагональных четырехугольников, где в каждой фигуре измеряют все четыре угла и длину одной из сторон, а в первом и последнем четырехугольниках – четыре угла и две стороны. Длины остальных сторон получают в результате вычислений, предварительно уровняв углы в четырехугольниках. Недостатком этого метода является уравнивание таких цепей упрощенным способом, а именно: распределение возникающих невязок в приращениях координат fx и fy поровну на все приращения. В статье предлагается на основе формул Гаусса для прямой угловой засечки составлять условное уравнение дирекционных углов, решая которое по способу наименьших квадратов, находят поправки к измеренным дирекционным углам. Вводя эти поправки, получают координаты искомых пунктов последовательными угловыми засечками. Как видно из предварительных вычислений, погрешности, возникающие вследствие использования дифференциальных поправок в координаты, очень малы и не могут оказывать значительного влияния на результат измерений

Ключевые слова: СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ, ОБРАТНЫЕ ВЕСА, ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ, ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ, КООРДИНАТЫ

UDC 528.13

25.00.00 Earth sciences

THE ISSUES OF EQUALIZATION OF GEODETIC CHAIN OF QUADRANGLES

Sokolov Yuriy Grigoryevich
Dr.Sci.Tech., professor

Strus’ Sergey Sergeyevich
Cand.Econ.Sci., associate professor

Pshidatok Saida Kazbekovna
Cand.Agr.Sci., associate professor
Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

The article examines the development of a planned study on the clearings and roads in built-up and forested areas, as well as for building networks. Most often, it is recommended to use the method without diagonal quadrangles, where in each figure measured all four corners and the length of one of the parties, and in the first and last rectangles – four corners and two sides. The length of the other sides is obtained by computing, previously having leveraged the angles in the quadrilaterals. The disadvantage of this method is the adjustment of such circuits in a simplified manner, namely: the distribution of residuals arising in the augmentation of coordinates fx and fy equally to all augmentation. The article proposes formulas of Gauss for direct angular notches to make the conditional equation of directional angles, deciding which method of least squares, find the amendments to the measured directional angles. Introducing these amendments, I get the coordinates of the desired points of successive angular intersection. As it may be seen from preliminary calculations, the errors resulting from the use of differential corrections in the coordinates are very small and may not have a significant influence on the measurement result

Keywords: METHOD OF LEAST SQUARES, REVERSE WEIGHT, GEODETIC NETWORK, COORDINATES, ACCURACY ASSESSMENT

Известен метод построения планового геодезического обоснования в виде цепи из четырехугольников без диагоналей, где в каждом из них измеряются четыре угла и одна сторона, а в первом и последнем четырехугольниках – четыре угла и две стороны [1.2]. Длины остальных сторон получены в результате вычислений, предварительно уровняв углы в четырехугольниках.

Недостатком этого метода является уравнивание таких цепей упрощенным способом, а именно: распределение возникающих невязок в приращениях координат f_x f_y поровну на все приращения (или пропорционально длинам сторон ходовой линии).

Суть предлагаемого способа заключается в следующем. Пусть имеем цепь (Рис.1), в которой пункты A,1,2,…,n, B – исходные, координаты которых определены с достаточно высокой точностью. Внутри сети выполнены угловые измерения, позволяющие найти дирекционные углы сторон сети в каждом четырехугольнике. При использовании гиротеодолитов эти дирекционные углы можно сразу измерить. Тогда последовательными угловыми засечками по формуле Гаусса можно вычислить предварительные координаты точек 1.1, 1.2, …, 1.(n-1)

Для стороны $S_{1.n}$ путем решения обратной геодезической задачи вычисляют её дирекционный угол по формуле:

$$\alpha_{1.n} = arctg\frac{Y_{1.n} - Y_{1/(n-1)}}{X_{1.n} - X_{1.(n-1)}}, \qquad (1);$$

где: $X_{1.n}$, $Y_{1.n}$ – известные координаты точки $B_{1.n}$;

$X_{1(n-1)}$, $Y_{1(n-1)}$ –координаты точки 1(n-1), вычисленные последовательными угловыми засечками.

В результате для дирекционного угла этой линии появится угловая невязка:

$$f_{\alpha_{1.n}} = \alpha_{1.n(\text{изм})} - \alpha_{1.n(\text{выч})}, \qquad (2);$$

где: $\alpha_{1.n(\text{изм})}$ - измеренное значение дирекционного угла;

$\alpha_{1.n(\text{выч})}$ - вычисленное значение дирекционного угла по формуле 1.

Тогда условное уравнение дирекционных углов будет:

$$\alpha_{1.n} - arctg\frac{Y_{1.n} - Y_{1/(n-1)}}{X_{1.n} - X_{1.(n-1)}} + f_{\alpha_{1.n}} = 0 \qquad (3);$$

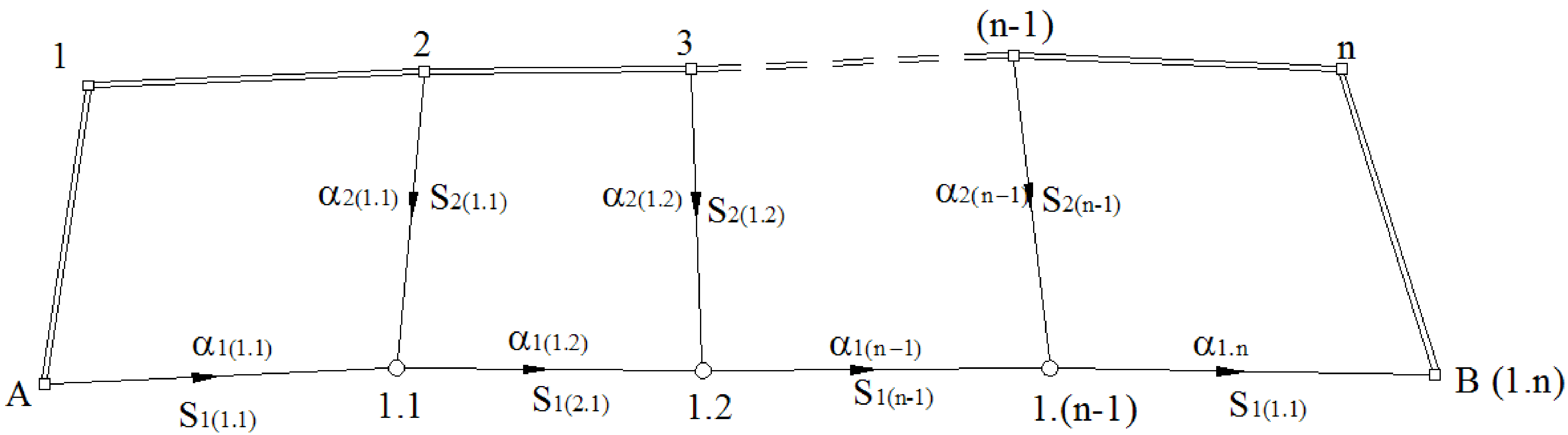

Рисунок 1. Цепь геодезической сети из четырехугольников.

Для получения коэффициентов при неизвестных поправках в дирекционные углы потребуется частные производные по каждой измеренной величине.

Согласно формулам Гаусса для точки 1.1 запишем:

$$\left.\begin{aligned} X_{1.1} &= X_2 + \frac{(X_2 - X_A)tg\alpha_{1(1.1)} + Y_A - Y_2}{tg\alpha_{2(1.1)} - tg\alpha_{1(1.1)}} \\ Y_{1.1} &= Y_2 + (X_{1.1} - X_2)tg\alpha_{2(1.1)} \end{aligned}\right\} \quad (4);$$

Дифференцируя (4) по каждому измеренному дирекционному углу, после преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial X_{1.1}}{\partial\alpha_{1(1.1)}} = S_{1(1.1)}\frac{\cos\alpha_{2(1.1)}}{\sin\gamma_{1.1}}; \quad \frac{\partial Y_{1.1}}{\partial\alpha_{1(1.1)}} = S_{1(1.1)}\frac{\sin\alpha_{2(1.1)}}{\sin\gamma_{1.1}} \\ &\frac{\partial X_{1.1}}{\partial\alpha_{2(1.1)}} = -S_{2(1.1)}\frac{\cos\alpha_{1(1.1)}}{\sin\gamma_{1.1}} \quad \frac{\partial Y_{1.1}}{\partial\alpha_{2(1.1)}} = -S_{2(1.1)}\frac{\cos\alpha_{1(1.1)}}{\sin\gamma_{1.1}} \end{aligned}\right\} \quad (5);$$

На положение точки 1.2 будут влиять ошибки дирекционных углов $\alpha_{1(1.1)}$, $\alpha_{2(1.1)}$ и ошибки дирекционных углов $\alpha_{1(1.2)}$, $\alpha_{2(1.2)}$.

Для точки 1.2 запишем:

$$\left.\begin{aligned} X_{1.2} &= X_3 + \frac{(X_3 - X_{1.1})tg\alpha_{1(1.2)} + Y_{1.1} - Y_3}{tg\alpha_{2(1.2)} - tg\alpha_{1(1.2)}} \\ Y_{1.2} &= Y_3 + (X_{1.2} - X_3)tg\alpha_{2(1.2)} \end{aligned}\right\} \quad (6);$$

Дифференцируя (6), найдем частные производные по всем четырем дирекционным углам, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial X_{1.2}}{\partial\alpha_{1(1.1)}} = -\frac{\left(\frac{\partial X_{1.1}}{\partial\alpha_{1(1.1)}}tg\alpha_{1(1.2)} - \frac{\partial Y_{1.1}}{\partial\alpha_{1(1.1)}}\right)}{\left(tg\alpha_{2(1.2)} - tg\alpha_{1(1.2)}\right)} \\ &\frac{\partial Y_{1.2}}{\partial\alpha_{1(1.1)}} = \frac{\partial X_{1.2}}{\partial\alpha_{1(1.1)}} \times tg\alpha_{2(1.2)} \\ &\frac{\partial X_{1.2}}{\partial\alpha_{2(1.1)}} = -\frac{\left(\frac{\partial X_{1.1}}{\partial\alpha_{2(1.1)}}tg\alpha_{1(1.2)} - \frac{\partial Y_{1.1}}{\partial\alpha_{2(1.1)}}\right)}{\left(tg\alpha_{2(1.2)} - tg\alpha_{1(1.2)}\right)} \\ &\frac{\partial Y_{1.2}}{\partial\alpha_{2(1.1)}} = \frac{\partial X_{1.2}}{\partial\alpha_{2(1.1)}} \times tg\alpha_{2(1.2)} \\ &\frac{\partial X_{1.2}}{\partial\alpha_{1(1.2)}} = S_{1(1.2)}\frac{\cos\alpha_{2(1.2)}}{\sin\gamma_{1.2}}; \quad \frac{\partial Y_{1.2}}{\partial\alpha_{1(1.2)}} = S_{1(1.2)}\frac{\sin\alpha_{2(1.2)}}{\sin\gamma_{1.2}} \\ &\frac{\partial X_{1.2}}{\partial\alpha_{2(1.2)}} = -S_{2(1.2)}\frac{\cos\alpha_{1(1.2)}}{\sin\gamma_{1.2}} \quad \frac{\partial Y_{1.2}}{\partial\alpha_{2(1.2)}} = -S_{2(1.2)}\frac{\cos\alpha_{1(1.2)}}{\sin\gamma_{1.2}} \end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Следуя подобным образом, получим следующий алгоритм вычисления коэффициентов при поправках в дирекционные углы.

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial X_{\text{ОП.j}}}{\partial \alpha_{1.j}} = S_{1.j}\frac{\cos\alpha_{2.j}}{\sin\gamma_j}; \quad \frac{\partial Y_{\text{ОП.j}}}{\partial \alpha_{1.j}} = S_{1.j}\frac{\sin\alpha_{2.j}}{\sin\gamma_j} \\
\frac{\partial X_{\text{ОП.j}}}{\partial \alpha_{2.j}} = -S_{2.j}\frac{\cos\alpha_{1.j}}{\sin\gamma_j}; \quad \frac{\partial Y_{\text{ОП.j}}}{\partial \alpha_{2.j}} = -S_{2.j}\frac{\sin\alpha_{1.j}}{\sin\gamma_j} \\
\frac{\partial X_{ОП.j}}{\partial \alpha_{1.i}} = -\frac{\left(\frac{\partial X_{Л.j}}{\partial \alpha_{1.i}} tg\alpha_{1.j} - \frac{\partial Y_{Л.j}}{\partial \alpha_{1.i}}\right)}{\left(tg\alpha_{2.j} - tg\alpha_{1.j}\right)} \\
\frac{\partial Y_{\text{ОП.j}}}{\partial \alpha_{2.i}} = \frac{\partial X_{\text{ОП.j}}}{\partial \alpha_{1.i}} \times tg\alpha_{2.j} \\
\frac{\partial X_{ОП.j}}{\partial \alpha_{2.i}} = -\frac{\left(\frac{\partial X_{Л.j}}{\partial \alpha_{2.i}} tg\alpha_{1.j} - \frac{\partial Y_{Л.j}}{\partial \alpha_{2.i}}\right)}{\left(tg\alpha_{2.j} - tg\alpha_{1.j}\right)} \\
\frac{\partial Y_{\text{ОП.j}}}{\partial \alpha_{2.i}} = \frac{\partial X_{\text{ОП.j}}}{\partial \alpha_{2.i}} \times tg\alpha_{2.j}
\end{array}\right\} \quad (8);$$

где: j – номер четырехугольника;

$X_{ОП.j}$, $Y_{ОП.j}$, - координаты определяемой точки в j-том четырехугольнике;

$X_{Л.j}$, $Y_{Л.j}$, - координаты левой точки диагонали (по отношению к определяемой точки) в j-том четырехугольнике;

$\alpha_{1.i,}$ и $\alpha_{2.i}$ – дирекционные углы i-того четырехугольника, влияющие на определение координат в j-том четырехугольнике.

Дифференцируя уравнение (3), получим условное уравнение дирекционных улов для рассматриваемой сети следующего вида:

$$\begin{array}{l}
V\alpha_{1.n} + \frac{1}{S_{1.n}}\left[\frac{\partial Y_{1(n-1)}}{\partial \alpha_{1(1.1)}}\cos\alpha_{1.n} - \frac{\partial X_{1(n-1)}}{\partial \alpha_{1(1.1)}}\sin\alpha_{1.n}\right] \times V\alpha_{1(1.1)} + \\
+\frac{1}{S_{1.n}}\left[\frac{\partial Y_{1(n-1)}}{\partial \alpha_{2(1.1)}}\cos\alpha_{1.n} - \frac{\partial X_{1(n-1)}}{\partial \alpha_{2(1.1)}}\sin\alpha_{1.n}\right] \times V\alpha_{2(1.1)} + \\
+\frac{1}{S_{1.n}}\left[\frac{\partial Y_{1(n-1)}}{\partial \alpha_{1(1.2)}}\cos\alpha_{1.n} - \frac{\partial X_{1(n-1)}}{\partial \alpha_{1(1.2)}}\sin\alpha_{1.n}\right] \times V\alpha_{1(1.2)} + \\
+\frac{1}{S_{1.n}}\left[\frac{\partial Y_{1(n-1)}}{\partial \alpha_{2(1.2)}}\cos\alpha_{1.n} - \frac{\partial X_{1(n-1)}}{\partial \alpha_{2(1.2)}}\sin\alpha_{1.n}\right] \times V\alpha_{2(1.2)} + \\
+\ldots+\frac{1}{S_{1.n}}\left[\frac{\partial Y_{1(n-1)}}{\partial \alpha_{1(n-1)}}\cos\alpha_{1.n} - \frac{\partial X_{1(n-1)}}{\partial \alpha_{1(n-1)}}\sin\alpha_{1.n}\right] \times V\alpha_{1(n-1)} + \\
+\frac{1}{S_{1.n}}\left[\frac{\partial Y_{1(n-1)}}{\partial \alpha_{2(n-1)}}\cos\alpha_{1.n} - \frac{\partial X_{1(n-1)}}{\partial \alpha_{2(n-1)}}\sin\alpha_{1.n}\right] \times V\alpha_{2(n-1)} + f\alpha_{1.n} = 0
\end{array} \quad (9).$$

Решая полученное уравнение (9) по способу наименьших квадратов под условием $[V^2]$=min, т.е. считая, что все измеренные дирекционные углы равноточны, получим искомые поправки к дирекционным углам, вводя которые в результате измерений дирекционных углов получим последовательными угловыми засечками координат определяемых пунктов.

Во избежание повторных громоздких вычислений и для контроля предлагается находить дифференциальные поправки в координаты по упрощенным формулам.

Пусть в результате уравнивания получены поправки к дирекционным углам V_1 и V_2 (рис. 2). Требуется найти поправки в координаты $\delta X_{1\text{-}1'}$ и $\delta Y_{1\text{-}1'}$.

Из (3) следует, что для вычисления поправок в координаты для случая линейной засечки они будут находиться по формулам

$$\left.\begin{aligned} \delta X_{1-1'} &= \frac{l_1 \sin\alpha_2 - l_2 \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} \\ \delta Y_{1-1'} &= \frac{l_2 \cos\alpha_1 - l_1 \cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где l_1 и l_2 – поправки в длины измеренных сторон S_1 и S_2.

Из рис. 2 видно, что дирекционный угол линии $\alpha_{1\text{-}1'\text{-}K}$ будет

$\alpha_{1\text{-}1'\text{-}K} = \alpha_2 + 90^o - 180^o = -(90^o - \alpha_2)$, а для линии $\alpha_{1\text{-}1'\text{-}C} = 90^o + \alpha_2$

Тогда для угла γ получим

$$\gamma = \alpha_1 + 90^o - \alpha_2 = 90^o + (\alpha_1 - \alpha_2) \qquad (11)$$

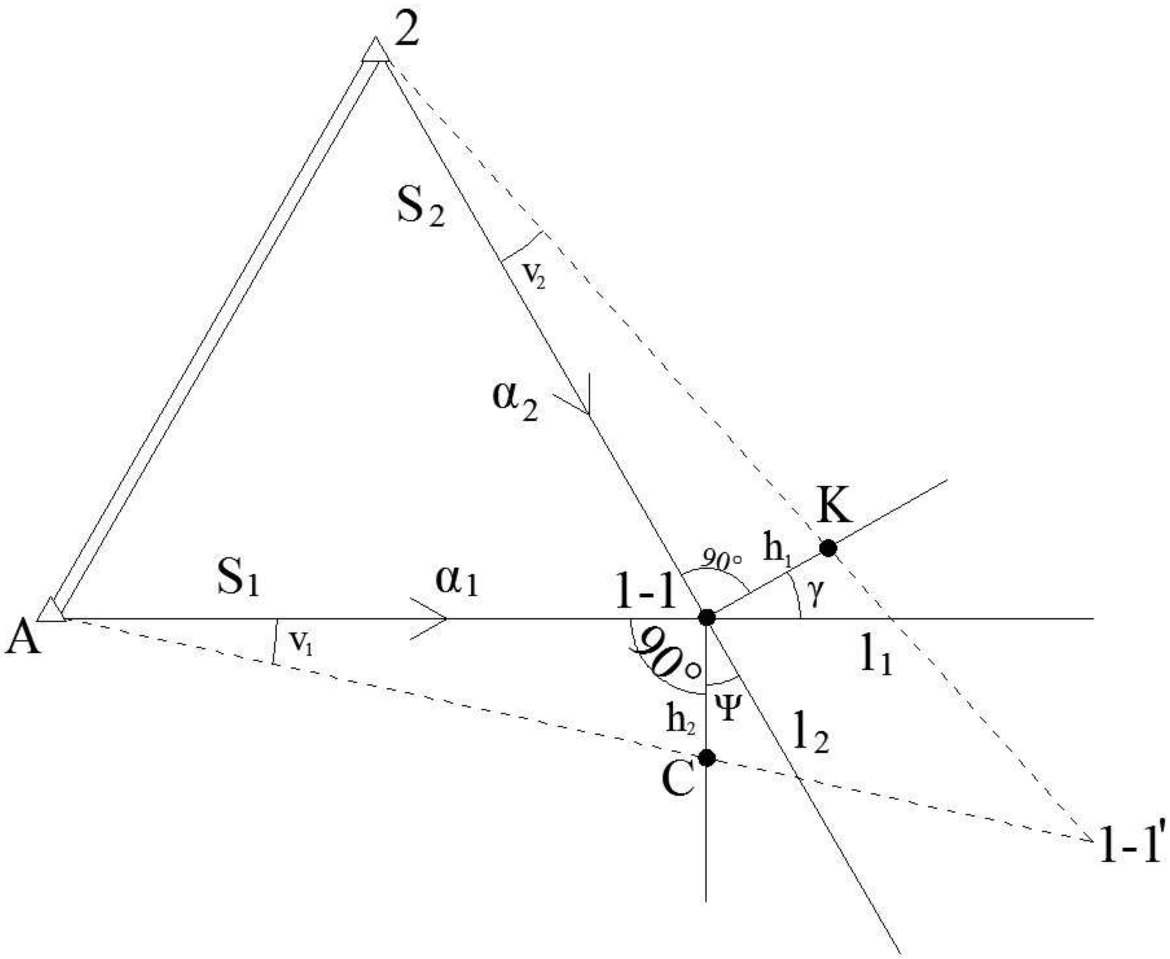

Рис. 2 Схема линейной засечки

Для угла Ψ будем иметь

$$\Psi = \alpha_1 + 90^{o} - \alpha_2 = 90^{o} + (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (12)$$

Учитывая, что поправки V_1 и V_2 малы, а длины линий S_1 и S_2 значительные, запишем

$$\left.\begin{aligned} \frac{h_1}{l_1} &= \cos\gamma, \textit{откуда } h_1 = l_1 \cos\gamma \\ \frac{h_2}{l_2} &= \cos\psi, \textit{откуда } h_2 = l_2 \cos\psi \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Подставляя найденные значения углов γ и Ψ в (13), получим

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= -l_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = l_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \\ h_2 &= -l_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = l_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

С другой стороны, запишем

$$h_1 = \frac{V''_2 S_2}{\rho''};\ h_2 = \frac{V''_1 S_1}{\rho''} \tag{15}$$

Из (14) следует, что

$$l_1 = \frac{h_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)};\ l_2 = \frac{h_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \tag{16}$$

Подставляя (16) в (10) с учетом выражения (15) получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \delta X_{1-1'} &= \frac{V''_2 S_2 \sin\alpha_2 - V''_1 S_1 \sin\alpha_1}{\rho'' \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ \delta Y_{1-1'} &= \frac{V''_1 S_1 \cos\alpha_1 - V''_2 S_2 \cos\alpha_2}{\rho'' \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Рассмотрим пример расчета этих поправок:

S_1=1000,000 м; S_2=1000,000 м; α_1=90º; α_2=150º; l_1=l_2=100мм;

X_A=1000,000м; Y_A=1000,000м.

$$h_1 = l_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 86{,}6\,мм$$

$$h_2 = l_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 86{,}6\,мм$$

$$V_1 = \frac{h_2 \rho''}{S_1} = 17.9'';\ V_2 = \frac{h_1 \rho''}{S_2} = 17.9''$$

$$\delta X_{1-1'} = \frac{17.9 \times 1000000 \sin 150^\circ - 17.9 \times 1000000 \sin 90^\circ}{206265'' \times 0.75} = -57{,}8\ мм$$

$$\delta Y_{1-1'} = \frac{17.9 \times 1000000 \sin 90^\circ - 17.9 \times 1000000 \sin 150^\circ}{206265'' \times 0.75} = 100{,}2\ мм$$

Как видно из приведенного примера, погрешности, возникающие вследствие использования дифференциальных поправок в координаты очень малы и не оказывают значительного влияния на результат измерений.

Список используемой литературы

1. Поклад Г.Г, Гриднев С.П. Геодезия, М., Академический проект, 2007. с.442;
2. Субботин И.Е., Мазницкий А.С. Справочник строителя по инженерной геодезии, Киев, 1972. с.179;
3. Соколов Ю.Г., Пшидаток С.К. Об определении координат геодезических пунктов линейными засечками. Политематический сетевой электронный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс].- Краснодар: КубГАУ, 2007.- №32, С.8-17;
4. Соколов Ю.Г., Биматов И.Б. Упрощенный способ определения поправок в координаты при уравновешивании линейной триангуляции. Материалы научно-технической конференции, ТИСИ, г. Томск, 1972.

References

1. Poklad G.G, Gridnev S.P. Geodezija, M., Akademicheskij proekt, 2007. s.442;
2. Subbotin I.E., Maznickij A.S. Spravochnik stroitelja po inzhenernoj geodezii, Kiev, 1972. s.179;
3. Sokolov Ju.G., Pshidatok S.K. Ob opredelenii koordinat geodezicheskih punktov linejnymi zasechkami. Politematicheskij setevoj jelektronnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs].- Krasnodar: KubGAU, 2007.- №32, S.8-17;
4. Sokolov Ju.G., Bimatov I.B. Uproshhennyj sposob opredelenija popravok v koordinaty pri uravnoveshivanii linejnoj trianguljacii. Materialy nauchno-tehnicheskoj konferencii, TISI, g. Tomsk, 1972.