УДК 544.638.2:51-74

01.00.00 Физико-математические науки

3D МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА БИНАРНОГО ЭЛЕКТРОЛИТА В ГАЛЬВАНОСТАТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ В УСЛОВИЯХ ЭЛЕКТРОНЕЙТРАЛЬНОСТИ

Коваленко Анна Владимировна
к.э.н., доцент
РИНЦ SPIN-кодавтора: 3693-4813
Scopus Author ID: 55328224000

Казаковцева Екатерина Васильевна
РИНЦ SPIN-код автора: 4895-4042

Уртенов Махамет Али Хусеевич
д.ф.-м.н., профессор
РИНЦ SPIN-код: 7189-0748
Scopus Author ID: 6603363090
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

В работе выведены 3D математические модели процесса нестационарного переноса бинарного электролита в ЭМС (электромембранных системах: электродиализные аппараты, электромембранные ячейки и т.д.) для гальваностатического режима. Для конкретности в качестве ЭМС рассматривается канал обессоливания ЭДА (электродиализного аппарата) и ЭМС с ВМД (вращающимся мембранным диском). Выведена формула, выражающая напряженность электрического поля через плотность тока и концентрацию. Также получено дифференциальное уравнение для плотности тока. Принципиальным моментом при этом является то, что выведено новое уравнение для неизвестной вектор-функции плотности тока из исходной системы уравнений Нернста-Планка. Кроме того, в статье показан вывод уравнения для плотности тока в трехмерном случае, предложены различные методы решения уравнения плотности тока, а также краевые условия для плотности тока. Предложенные математические модели переноса бинарного электролита несложно обобщить на случай произвольного электролита. Однако при этом соответствующие уравнения имеют громоздкий вид. Хотелось бы также отметить, что краевые условия могут быть разнообразными и зависят от цели конкретного исследования, в связи с этим, в данной работе приведены лишь уравнения, имеющие общий вид

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, 3D МОДЕЛИРОВАНИЕ, ГАЛЬВАНОСТАТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ, УРАВНЕНИЯ НЕРНСТА-ПЛАНКА-ПУАССОНА

UDC 544.638.2:51-74

Physics and Mathematical sciences

3D MODELING OF TRANSPORT BINARY ELECTROLYTE IN THE GALVANOSTATIC MODE IN THE CONDITION OF ELECTRONEUTRALITY

Kovalenko Anna Vladimirovna
Cand.Econ.Sci., associate professor
RSCI SPIN-code: 3693-4813
Scopus Author ID: 55328224000

Kazakovtseva Ekaterina Vasilyevna
RSCI SPIN-code: 4895-4042

Urtenov Makhamet Ali Khuseevich
Dr.Sci.Phys.-Math., professor
RSCI SPIN-code: 7189-0748
Scopus Author ID: 6603363090
Kuban State University, Krasnodar, Russia

In the article we have derived mathematical models of non-stationary transport binary electrolyte in EMS (electromembrane systems: electrodialysis apparatus, electromembrane cell, etc.) for the galvanostatic mode. To be specific, as EMS viewed channel of desalting of EDA (electrodialysis apparatus) and EMS with RMD (rotating membrane disk). We present a formula expressing the intensity of the electric field through the current density and concentration. Also, we have received the differential equation for the current density. The fundamental point here is derived new equation for the unknown vector function of current density of the initial system of equations of Nernst-Planck. In addition, the article shows the output equation for the current density in three dimensions; we have proposed various methods for solving the equation of the current density and the boundary conditions for the current density. The proposed mathematical models of transport binary electrolyte are easy to be generalized to an arbitrary electrolyte. However, the corresponding equations are cumbersome. It should be also noted that the boundary conditions can be varied and depend on the purpose of a particular study in this regard, in this work are just the equation having the general form

KEYWORDS: MATHEMATICAL MODELING, 3D MODELING, GALVANOSTATIC MODE, THE NERNST-PLANCK-POISSON EQUATION

ВВЕДЕНИЕ

Для моделирования переноса бинарного электролита в ЭМС, как правило, используется система уравнений Нернста-Планка и условия электронейтральности [1]. ЭМС функционируют в двух разных электрических режимах: потенциостатическом, когда задается падение потенциала или гальваностатическом режиме, когда задается средняя плотность тока в цепи.

Эти режимы в физическом смысле равноправны, однако экспериментальные исследования удобно проводить в гальваностатическом режиме. Кроме того, известны критические значения плотности тока: предельный ток, ток экзальтации, ток Харкаца и т.д. [2]. Этим критическим значениям плотности тока не всегда удобно теоретически или экспериментально сопоставлять конкретные значения падения потенциала. Так, например, предельному току теоретически соответствует бесконечно большое значение падения потенциала.

Именно поэтому, в настоящее время накоплено большое количество экспериментальных данных полученных для гальванодинамического (гальваностатического) режима, которые требуют анализа.

2D модель гальваностатического режима при выполнении условия локальной электронейтральности впервые была представлена в работе [4] и подробно изучена в работах [5, 6], а в работах [7-10] использовалась при построении и анализе математической модели гравитационной конвекции в электрохимических системах в гальваностатическом режиме. В данной статье предлагаются 3D математические модели процесса нестационарного переноса бинарного электролита в ЭМС для гальваностатического режима. Данная работа является развитием работ [2, 4, 6].

§1 Постановка задачи

Векторная запись системы уравнений Нернста-Планка и условия электронейтральности [1] для переноса бинарного электролита имеет следующий вид:

$$\vec{j}_i = -\frac{F}{RT} z_i D_i C_i \nabla\varphi - D_i \nabla C_i + C_i \vec{V}, \quad i = 1{,}2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\mathrm{div}(\vec{j}_i), \quad i = 1{,}2, \tag{2}$$

$$z_1 C_1 + z_2 C_2 = 0, \tag{3}$$

$$\vec{I} = F(z_1 \vec{j}_1 + z_2 \vec{j}_2), \tag{4}$$

где ∇ – градиент, Δ – оператор Лапласа, ρ_0 – характерная плотность раствора, φ – электрический потенциал, $\vec{i}$ – плотность электрического тока, $\vec{V}$ – заданная скорость течения жидкости согласно формулам В.Г. Левича, P – давление, T – абсолютная температура, $\vec{j}_i, C_i$ – потоки и концентрации, D_i, z_i – коэффициенты диффузии и заряды ионов i-го сорта, F – число Фарадея, R – универсальная газовая постоянная. При этом $\vec{j}_i, C_i, \varphi, \vec{i}$ – неизвестные функции, в общем случае зависящие от времени t и координат x, y а остальные величины считаются известными.

Здесь (1) – уравнение Нернста-Планка с учетом соотношения Нернста-Эйнштейна, (2) – условие материального баланса, (3) – условие электронейтральности, (4) – условие протекания электрического тока.

Как отмечалось выше, система уравнений (1)–(4) удобна только для моделирования потенциостатического режима. В то же время она неудобна для моделирования гальваностатического режима, так как не содержит дифференциального уравнения для плотности тока.

В связи с этим, возникает проблема преобразования системы уравнений (1)-(4) к виду удобному для моделирования гальваностатического режима.

Для этого нужно решить две задачи:

1). Необходимо вывести формулу, выражающую напряженность электрического поля через плотность тока и концентрацию, которая должна использоваться вместо уравнения плотности тока (4).

2). Необходимо вывести дифференциальное уравнение для плотности тока $\vec{I}$.

Принципиальным моментом при этом является то, что необходимо вывести новое уравнение для неизвестной вектор-функции плотности тока из исходной системы уравнений Нернста-Планка.

В п. 2 для удобства приведено общеизвестное выражение напряженности электрического поля через плотность тока и концентрации [1]. В п. 3 дан вывод уравнения для плотности тока в трехмерном случае. В п.4. предложены различные методы решения уравнения для плотности тока. В п.5 предложены краевые условия для плотности тока.

§2 Выражаем напряженность электрического поля через плотность тока и концентрации

Напряженность $\vec{E}$ связана с электрическим потенциалом φ выражением:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \ . \tag{5}$$

С учетом этого выражения уравнение (1) для потоков приобретает вид:

$$\vec{j}_i = \frac{F}{RT} z_i D_i C_i \vec{E} - D_i \nabla C_i + C_i \vec{V} \ , \quad i = 1{,}2 \ . \tag{6}$$

Умножим уравнения (6) на z_i и просуммируем:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \vec{j}_i = \frac{F}{RT} \sum_{i=1}^{2} z_i^2 D_i C_i \vec{E} - \sum_{i=1}^{2} z_i D_i \nabla C_i + \sum_{i=1}^{2} z_i C_i \vec{V} \ .$$

С учетом (3) и (4) получаем, что условие протекания электрического тока имеет вид:

$$\vec{I} = \frac{F^2}{RT}\left(\sum_{i=1}^{2} z_i^2 D_i C_i\right)\vec{E} - F\sum_{i=1}^{2} z_i D_i \nabla C_i \,. \tag{7}$$

Из условия электронейтральности, полагая $C = z_1 C_1 = -z_2 C_2$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{2} z_i^2 D_i C_i = (z_1 D_1 - z_2 D_2) C \,,$$

$$\sum_{i=1}^{2} z_i^2 D_i \nabla C_i = (z_1 D_1 - z_2 D_2) \nabla C \,,$$

$$\sum_{i=1}^{2} z_i D_i \nabla C_i = (D_1 - D_2) \nabla C \,,$$

и соотношение (7) принимает вид:

$$\vec{I} = \frac{(z_1 D_1 - z_2 D_2) F^2}{RT} C\vec{E} - F(D_1 - D_2)\nabla C \,, \tag{8}$$

откуда

$$\vec{E} = \frac{RT}{F^2 (z_1 D_1 - z_2 D_2) C}\vec{I} + \frac{(D_1 - D_2) RT}{F (z_1 D_1 - z_2 D_2) C}\nabla C \tag{9}$$

§3 Вывод уравнений для плотности тока в трехмерном случае

Умножим уравнения (2) на z_i и просуммируем. Тогда из выполнения условия электронейтральности (3) следует равенство:

$$\mathrm{div}(\vec{I}) = 0 \,. \tag{10}$$

Поскольку для плотности тока выполнено уравнение (10), то для однозначной разрешимости нужно найти $\mathrm{rot}(\vec{I})$ [3].

Из уравнения (9), учитывая тождество $\mathrm{rot}(\nabla u) = 0, \forall u$, получим:

$$rot\vec{E} = \frac{RT}{F^2 (z_1 D_1 - z_2 D_2)} rot(\frac{1}{C}\vec{I}) + \frac{(D_1 - D_2) RT}{F (z_1 D_1 - z_2 D_2)} rot(\frac{1}{C}\nabla C)$$

Следовательно, учитывая $\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{E}} = -\mathrm{rot}(\nabla\varphi) = 0$, и $\mathrm{rot}(\nabla C) = 0$,

$$\mathrm{rot}(\frac{1}{C}\nabla C) = \nabla(\frac{1}{C})\times\nabla C + \frac{1}{C}\mathrm{rot}(\nabla C) = \nabla(\frac{1}{C})\times\nabla C = -\frac{1}{C^2}\nabla C\times\nabla C = 0 \ ,$$

получим:

$$\mathrm{rot}(\frac{1}{\mathrm{C}}\vec{I}) = 0 \tag{11}$$

Так как

$$\mathrm{rot}(\frac{1}{C}\vec{I}) = -\frac{1}{C^2}\nabla C\times\vec{I} + \frac{1}{C}\mathrm{rot}(\vec{I})$$

то

$$\mathrm{rot}(\vec{I}) = \frac{1}{C}\nabla C\times\vec{I} \tag{12}$$

Таким образом, для нахождения вектора $\vec{I}$ получаем систему уравнений:

$$\mathrm{div}(\vec{I}) = 0 \tag{13}$$

$$\mathrm{rot}(\vec{I}) = \frac{1}{C}\nabla C\times\vec{I} \tag{14}$$

§4 Методы решения уравнения для плотности тока

Рассмотрим различные методы решения системы уравнений для плотности тока.

4.1 Решение системы уравнений с использованием векторного потенциала

Из уравнения (13) следует, что для $\vec{I}$ существует векторный потенциал, т.е. такая вектор-функция $\vec{B}$, что

$$\vec{I} = rot\vec{B} \tag{15}$$

Тогда для функции $\vec{B}$ получаем дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка:

$$\mathrm{C}\,\mathrm{rot}\,rot\vec{B} = \nabla C\times rot\vec{B} \tag{16}$$

Кстати, при этом уравнение (13) выполняется автоматически.

Решение стационарного уравнения (16) удобно находить численно методом установления, используя уравнение:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla C \times rot\vec{B} = C rot\, rot\vec{B} \tag{17}$$

4.2 Решение исходной системы уравнений для плотности тока сведением к неизвестной потенциальной функции

Второе уравнение можно записать в виде:

$\mathrm{rot}\,\vec{I} = \nabla LnC \times \vec{I}$ и поэтому исходную систему уравнений (13), (14) можно записать в виде:

$$\mathrm{div}(\vec{I}) = 0 \tag{18}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{I} = \nabla LnC \times \vec{I} \tag{19}$$

Поскольку, согласно первому уравнению, поле $\vec{I}$ является соленоидальным, то будем искать его в виде [3]:

$\vec{I} = \vec{I}_0 + \nabla\eta$, где $\vec{I}_0$ любое частное решение уравнения (19), а функция η подлежит определению.

Возьмем $\vec{I}_0$ в виде:

$$\vec{I}_0 = \nabla LnC$$

Так как, с одной стороны $rot\,\vec{I}_0 = rot(\nabla LnC) = 0$, а с другой стороны $\nabla LnC \times \nabla LnC = 0$, то $\vec{I}_0$ является решением уравнения (19). Тогда и $\vec{I} = \vec{I}_0 + \nabla\eta$ является решением уравнения (19). Остается выбрать функцию η, так чтобы выполнялось уравнение (18).

Подставим $\vec{I} = \vec{I}_0 + \nabla\eta$ в уравнение (18), тогда $div\,\vec{I} = div(\vec{I}_0 + \nabla\eta) = div\vec{I}_0 + div\nabla\eta = \Delta LnC + \Delta\eta$.

Приравнивая $div\,\vec{I}$ к нулю, получаем для η уравнение:

$$\Delta LnC + \Delta\eta = 0 \tag{20}$$

или

$$\Delta\eta = -\Delta LnC \tag{21}$$

4.3 Решение уравнения для векторного потенциала плотности тока для бинарного электролита для задач с осевой симметрией

Предположим, что необходимо определить плотность тока в некоторой задаче с осевой симметрией. В цилиндрических координатах (z, r, θ) это означает, что вектор $\vec{I}$ не зависит от угла θ, т.е. вектор $\vec{I}$ лежит в плоскости (z, r). Поэтому в качестве $\operatorname{rot}\vec{I}$ будем рассматривать азимутальную составляющую завихренности по формуле $\xi(\vec{I}) = \frac{\partial I_r}{\partial z} - \frac{\partial I_z}{\partial r}$.

В цилиндрической системе координат выражение (9) имеет вид:

$$E_r = \frac{RT}{F(z_1 D_1 - z_2 D_2)} \frac{1}{C} I_r + \frac{(D_1 - D_2)RT}{F(z_1 D_1 - z_2 D_2)} \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial r} C \tag{22}$$

$$E_3 = \frac{RT}{F(z_1 D_1 - z_2 D_2)} \frac{1}{C} I_3 + \frac{(D_1 - D_2)RT}{F(z_1 D_1 - z_2 D_2)} \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial z} C \tag{23}$$

Вычислим $\xi(\vec{E}) = \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial r}$, получаем:

$$\xi(\vec{E}) = \frac{RT}{F(z_1 D_1 - z_2 D_2)} \xi(\frac{1}{C}\vec{I})$$

Так как $\vec{E}(x, y, z) = E_r \vec{r}_e + E_3 \vec{k}$, где $E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$, $E_k = E_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, то $\xi(\vec{E}) = 0$, следовательно:

$$\xi(\frac{1}{C}\vec{I}) = 0$$

или с учетом формулы $\xi(u\vec{a}) = (\nabla u, \vec{a})_1 + u\xi(\vec{a})$, где $(\vec{a}, \vec{b})_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$, $\nabla C = (\frac{\partial C}{\partial r}, \frac{\partial C}{\partial z})^T$:

$$-\frac{1}{C^2}(\nabla C, \vec{I})_1 + \frac{1}{C}\xi(\vec{I}) = 0$$

или

$$\xi(\vec{I}) = \frac{1}{C}(\nabla C, \vec{I})_1 \tag{24}$$

Из (24) следует, что в цилиндрической системе координат имеем:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rI_r) + \frac{\partial}{\partial z}I_z = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r}(rI_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rI_z) = 0\,.$$

Из этого равенства следует существование такой функции η, что:

$$rI_r = \frac{\partial \eta}{\partial z},\ rI_z = -\frac{\partial \eta}{\partial r}$$

или

$$I_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial z},\ I_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial r}$$

Выражение $\xi(\vec{I}) = \frac{\partial I_r}{\partial z} - \frac{\partial I_z}{\partial r}$ через функцию η имеем вид:

$$\xi(\vec{I}) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{r}\Delta\eta\,,$$

где справа оператор Лапласа считается в цилиндрических координатах. Таким образом, уравнение (24) запишется в виде:

$$\frac{1}{r}\Delta\eta = \frac{1}{C}(\nabla C, \vec{I})_1$$

или

$$\Delta\eta = \frac{1}{C}(\nabla C, r\vec{I})_1\,.$$

Так как $(\nabla C, r\vec{I})_1 = (\nabla C, \nabla\eta)$, то окончательно имеем:

$$\Delta\eta = \frac{1}{C}(\nabla C, \nabla\eta) \tag{25}$$

Вид уравнения для η полностью совпадает с двумерным случаем [4, 6].

Замечание 1. Предложенные выше математические модели переноса бинарного электролита несложно обобщить на случай произвольного электролита. Однако при этом соответствующие уравнения имеют громоздкий вид. В связи с этим изложение здесь ограничено бинарным электролитом.

Замечание 2. Краевые условия могут быть разнообразными и зависят от цели конкретного исследования, в связи с этим, в данной работе приведены лишь уравнения, имеющие общий вид.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложены 3D математические модели нестационарного переноса бинарного электролита в канале обессоливания электродиализного аппарата в гальваностатическом режиме в виде системы квазилинейных уравнений с частными производными. Выведено новое уравнение для плотности тока и соответствующие краевые условия. Предложены методы решения краевой задачи для плотности тока. Все описанные математические модели предложены впервые.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-08-00464 А.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. 1977, Мир, 463с.
2. Уртенов М.Х., Лаврентьев А.В., Никоненко В.В., Письменский А.В., Сеидова Н.М Максимальные потоки ионов соли в некоторых математических моделях массопереноса в электромембранных системах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. Краснодар: КубГУ, 2006. №3. С.84-93.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. , 1956. – 656 С.
4. Уртенов М.Х., Письменский А.В. Моделирование гравитационной конвекции в электромембранных системах очистки воды // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – Краснодар: КубГУ, 2004. – №3. – С.64-69.
5. Коваленко А.В., Уртенов М.Х. Вывод и обоснования формул для приближенного решения уравнения для плотности тока при выполнении условия

электронейтральности // Обозрение прикладной и промышленной математики. - 2010. – № 5(2).
6. Коваленко А.В., Уртенов М.Х., Ярощук А.Э., Жолковский Э.К. 2D-моделирование переноса бинарного электролита в электромембранных системах. Известия Кубанского государственного университета. Естественные науки. Издательско-полиграфический центр Кубанского государственного университета. – Краснодар: 2013. 52-57с.
7. Лаврентьев А.В., Письменский А.В., Уртенов М.Х. Математическое моделирование переноса в электромембранных системах с учетом конвективных течений: Монография / Кубан. гос. технол. ун-т.- Краснодар: ГОУ ВПО «КубГТУ», 2006. -147с.
8. Pismenskiy A., Urtenov M., Nikonenko V., Pismenskaya N., Pourcelly G Modelling of gravitational convection in electromembrane systems Book of Abstracts of International Congress «Euromembrane’2004», Hamburg, Germany, 28 Sep. - 1 Oct. 2004. TUHH-Technologie GmbH, Hamburg, Germany, 2004. – P.489.
9. Urtenov M., Pismenskiy A.,Nikonenko V.,Pourcelly G.Письменский А., Никоненко В.,Пурселли Ж., Mathematical modelling of gravitational convection in electrodialysis processes // Desalination. – 2006. Vol.192.
10. Коваленко А.В., Уртенов М.Х. , Письменский А.В., Никоненко В.В., Систа Ф., Письменская Н.Д. Моделирование и экспериментальное исследование гравитационной конвекции в электромембранной ячейке //Электрохимия Т.48 №7, 2012. С.830-842
11. Коваленко А.В., Уртенов М.Х. Краевые задачи для системы электродиффузионных уравнений. Часть 1. Одномерные задачи. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. Germany, Saarbrücken: 2011. 281 с.

References

1. N'jumen Dzh. Jelektrohimicheskie sistemy. 1977, Mir, 463s.
2. Urtenov M.H., Lavrent'ev A.V., Nikonenko V.V., Pis'menskij A.V., Seidova N.M Maksimal'nye potoki ionov soli v nekotoryh matematicheskih modeljah massoperenosa v jelektromembrannyh sistemah // Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva. 2006. Krasnodar: KubGU, 2006. №3. S.84-93.
3. Fihtengol'c G.M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. T.3., 1956. – 656 S.
4. Urtenov M.H., Pis'menskij A.V. Modelirovanie gravitacionnoj konvekcii v jelektromembrannyh sistemah ochistki vody // Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva. – Krasnodar: KubGU, 2004. – №3. – S.64-69.
5. Kovalenko A.V., Urtenov M.H. Vyvod i obosnovanija formul dlja priblizhennogo reshenija uravnenija dlja plotnosti toka pri vypolnenii uslovija jelektronejtral'nosti // Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki. - 2010. – № 5(2).
6. Kovalenko A.V., Urtenov M.H., Jaroshhuk A.Je., Zholkovskij Je.K. 2D-modelirovanie perenosa binarnogo jelektrolita v jelektromembrannyh sistemah. Izvestija Kubanskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki. Izdatel'sko-poligraficheskij centr Kubanskogo gosudarstvennogo universiteta. – Krasnodar: 2013. 52-57s.
7. Lavrent'ev A.V., Pis'menskij A.V., Urtenov M.H. Matematicheskoe modelirovanie perenosa v jelektromembrannyh sistemah s uchetom konvektivnyh techenij: Monografija / Kuban. gos. tehnol. un-t.- Krasnodar: GOU VPO «KubGTU», 2006. -147s.
8. Pismenskiy A., Urtenov M., Nikonenko V., Pismenskaya N., Pourcelly G Modelling of gravitational convection in electromembrane systems Book of Abstracts of International

Congress «Euromembrane’2004», Hamburg, Germany, 28 Sep. - 1 Oct. 2004. TUHH-Technologie GmbH, Hamburg, Germany, 2004. – P.489.
9. Urtenov M., Pismenskiy A.,Nikonenko V.,Pourcelly G.Pis'menskij A., Nikonenko V.,Purselli Zh., Mathematical modelling of gravitational convection in electrodialysis processes // Desalination. – 2006. Vol.192.
10. Kovalenko A.V., Urtenov M.H. , Pis'menskij A.V., Nikonenko V.V., Sista F., Pis'menskaja N.D. Modelirovanie i jeksperimental'noe issledovanie gravitacionnoj konvekcii v jelektromembrannoj jachejke //Jelektrohimija T.48 №7, 2012. S.830-842
11. Kovalenko A.V., Urtenov M.H. Kraevye zadachi dlja sistemy jelektrodiffuzionnyh uravnenij. Chast' 1. Odnomernye zadachi. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. Germany, Saarbrücken: 2011. 281 s.