

УДК 519.688:537.8:372.853

UDC 519.688:537.8:372.853

13.00.00 Педагогические науки

Pedagogical sciences

**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В АНАЛИЗЕ СЛОЖНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ****COMPUTER TECHNOLOGIES IN THE ANALYSIS OF A COMPLEX PHYSICAL PROBLEM**

Черных Анатолий Григорьевич

Chernykh Anatoliy Grigoryevich

к.ф.-м.н., доцент кафедры

Cand.Phys-Math.Sci., associate professor

РИНЦ SPIN-код 3968-2774,

SPIN-code 3968-2774,

[agchernyh@mail.ru](mailto:agchernyh@mail.ru)[agchernyh@mail.ru](mailto:agchernyh@mail.ru)

*ФГБОУ ВПО Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, Красноярск, Россия, 660049, Красноярск, Ады Лебедевой, 89*

*Krasnoyarsk State Pedagogical University after V.P. Astafyev, Krasnoyarsk, Russia, 660049, Krasnoyarsk, st. Ada Lebedeva, 89*

В статье рассматривается технология применения в учебном процессе подготовки учителей физики современных компьютерных инструментов при анализе сложной современной задачи. Рассматривается экспериментальная задача, анализ которой невозможно провести без применения методов вычислительной математики. Массивный проводник в форме сплошного цилиндра помещен в квазистационарное магнитное поле. Необходимо найти параметры магнитного поля в объеме проводника. Предложен алгоритм построения программы численного изучения радиальной зависимости поля в проводнике. Построены графики безразмерной амплитуды поля  $f(h, z - \text{const})$  и фазового сдвига относительно внешнего поля  $\varphi(h, z - \text{const})$  при различных  $z = (\alpha^2 \omega \sigma \mu_0 / 4)$ , где  $\alpha$  и  $\sigma$  – радиус и проводимость материала цилиндра,  $\omega$  – частота внешнего поля,  $h$  – безразмерная радиальная координата, равная  $r/\alpha$ . Графики позволяют «посмотреть», что происходит с полем внутри проводника с изменением управляющих параметров  $z$  и  $h$ . Продемонстрирована самоорганизация исследуемого поля с ростом  $z$ , обусловленная нелинейными обратными связями. Показано, что использование в учебно-исследовательских задачах современных информационных технологий для сопоставления теории с реальным физическим экспериментом, позволяет качественно поднять уровень подготовки будущих учителей физики и информатики. Рекомендовано использование данного метода в учебном процессе педагогических (физика) и технических вузов

The article discusses the technology of using modern computer tools in the educational process of preparation of teachers of physics in the analysis of a complex modern problem. We consider the experimental task, the analysis of which cannot be carried out without the use of methods of calculus mathematics. A massive conductor in the form of a solid cylinder is placed in a quasi-stationary magnetic field. It is necessary to find the parameters of the magnetic field in the volume of the conductor. An algorithm for developing a program of numerical study of the radial dependence of the field in the conductor is given. The graphs of dimensionless amplitude of the field  $f(h, z - \text{const})$  and of the phase shift relative to the external field  $\varphi(h, z - \text{const})$  at different  $z = (\alpha^2 \omega \sigma \mu_0 / 4)$  are drawn where  $\alpha$  and  $\sigma$  are the radius and conductivity of the material of the cylinder,  $\omega$  is the frequency of the external field,  $h$  is a dimensionless radial coordinate equal to  $r/\alpha$ . The graphs let us “see” what is going on with the field inside the conductor with the change of control parameters  $z$  and  $h$ . We demonstrate the self-organization of the test field with increasing  $z$ , which happens because of the nonlinear feedbacks. It is shown that the use of modern information technology in educational research tasks to confront theory with real physical experiments lets us raise the level of quality of training future teachers of physics and computer science. The use of this method in the educational process of pedagogical (physics) and technical institutes of higher education is recommended

Ключевые слова: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА В ФИЗИКЕ, КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ, ОБУЧЕНИЕ ФИЗИКЕ

Keywords: COMPUTATIONAL MATHEMATICS IN PHYSICS, QUASI-STATIONARY MAGNETIC FIELD, FEEDBACKS, LEARNING PHYSICS

## 1. Введение

В настоящее время учебный процесс подготовки будущих учителей физики в силу объективных и субъективных причин не позволяет студентам приблизиться к глубокому пониманию современных достижений физики. Заканчивая обучение в вузе, студент не получает достаточного опыта научной работы по физике. Пожалуй, единственным инструментом, позволяющим разрешить эту проблему, являются компьютерные технологии, лежащие в основе вычислительной математики. Используя вычислительную математику, студент может провести анализ сложной учебно-исследовательской физической задачи. Необходимо подобрать задачу, которая находилась бы на грани понимания студентом, но в то же время вполне соответствовала его интеллектуальным возможностям. Кроме того, задача должна содержать современную физику. Желательно, чтобы результаты компьютерного анализа стали основой для экспериментального исследования выбранной задачи. Только студент, получивший опыт применения компьютерных технологий для анализа сложной физики, в сочетании с последующим экспериментальным исследованием, будет применять обретенные навыки в своей работе со школьниками. Цель данной работы – рассмотреть технологию применения современных компьютерных инструментов при анализе сложной физической задачи.

## 2. Постановка задачи

В качестве примера, раскрывающего суть предлагаемого метода анализа сложного физического явления, рассмотрим задачу, являющуюся классической и в полной мере отвечающую заявленным требованиям. Длинный, однородный, проводящий цилиндр, радиус которого  $a$ , проводимость  $\sigma$ , помещен в переменное квазистационарное магнитное поле  $H_0 \cos(\omega t)$ , параллельное оси цилиндра. Необходимо определить параметры магнитного поля в цилиндре  $H(r, t)$ , где  $r$  – радиальная координата. Исследование

параметров этого поля интересно в силу того, что уравнения Максвелла, описывающие динамику изменения поля в проводнике с ростом  $\omega$ , содержит обратные связи, обусловленные явлением электромагнитной индукции. В силу математической сложности анализа этот аспект задачи до сих пор не исследован. Обратные связи, как правило, приводят к синергетическим эффектам [3], что означает – магнитное поле в проводнике должно иметь сложную структуру. Точное решение нелинейного дифференциального уравнения, определяющего магнитное поле в проводящем цилиндре, выражается через специальные функции от комплексных переменных [1, 4]. Аналитические зависимости получены для двух предельных случаев ( $\omega \rightarrow 0$ ) и ( $\omega \rightarrow \infty$ ). Первая асимптотика очевидна – индукционные токи малы, поле равно внешнему полю. Вторая асимптотика показывает, что магнитное поле при  $\omega \rightarrow \infty$  локализуется в тонком поверхностном скин-слое проводника. Поток магнитного поля  $\mathbf{H}(r, t)$  через поперечное сечение цилиндра исследовался в работах [5,6]. В [5] предложен способ бесконтактного измерения электропроводности материала цилиндра. Для измерения  $\sigma$  анализируется амплитуда ЭДС, наведенной в индукционном датчике магнитным полем  $\mathbf{H}(r, t)$  для широкого интервала частот внешнего поля. Индукционный датчик – проволочная катушка, плотно намотанная поверх исследуемого цилиндра и подключенная в осциллографу или ламповому вольтметру. В [6] подробно проведены численные расчеты параметров ЭДС (амплитуда и фазовый сдвиг ЭДС относительно внешнего поля) с последующим обсуждением алгоритма построения компьютерной программы численного построения графиков параметров ЭДС. Исследуя ЭДС, мы теряем информацию о структуре магнитного поля внутри цилиндра, так как ЭДС определяется интегральной характеристикой поля – потоком через поперечное сечение проводника.

### 3. Математическая постановка задачи

При гармонической зависимости внешнего магнитного поля от времени, напряженность поля удобно представить в комплексном виде  $H(t) = H_0 e^{-i\omega t}$ . Магнитное поле внутри проводящего цилиндра определяется уравнениями Максвелла в квазистационарном приближении [1, 4]. Зависимость этого поля от радиальной координаты  $r$  и  $t$  имеет вид

$$H(r, t) = H_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

где  $k = (i + 1)/\delta$ ,  $\delta$  – толщина скин-слоя определяется соотношением  $\delta = 2/\sqrt{2\sigma\omega\mu_0}$ .

В формулу (1) входят функции Бесселя нулевого порядка, определяемые степенным рядом

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! n!}. \quad (2)$$

Для анализа выражения (1) приведем его к виду, удобному для применения методов вычислительной математики. Рассмотрим  $J_0(ka)$  – ряд, являющийся знаменателем в формуле (1). Учтем, что  $(ka/2)^2 = i(a^2/2\delta^2)$ .

Введем безразмерную переменную  $z = (a^2/2\delta^2)$ , тогда  $J_0(ka)$  как функция  $z$ , примет вид

$$J_0(ka) = J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (iz)^n}{n! n!}. \quad (3)$$

В сумме (3) выделим действительную и мнимую части, т.е. представим

$$I_0(z) = A_0 + iB_0.$$

Несложно показать, что

$$A_0 = 1 - \frac{z^2}{(2!)^2} + \frac{z^4}{(4!)^2} - \frac{z^6}{(6!)^2} + \dots \quad (4)$$

$$B_0 = \frac{z}{(1!)^2} - \frac{z^3}{(3!)^2} + \frac{z^5}{(5!)^2} - \frac{z^7}{(7!)^2} + \dots \quad (5)$$

Ряды (4) и (5) знакопеременные, поэтому их можно численно суммировать с заданной точностью. Функцию  $I_0(kr)$ , стоящую в числителе соотношения (1), также представим в виде комплексного числа  $I_0(kr) = A_1 + iB_1$ . Величина  $A_1$  определяется рядом (4), где аргументом является величина  $(h^2 z)$ ,  $h$  – безразмерная радиальная координата, равная  $h = r/a$ , ( $0 \leq h \leq 1$ ). Величина  $B_1$  определяется суммой (5), где  $z$  заменена на величину  $(h^2 z)$ .  $H(r, t)$  в новых переменных примет вид

$$H(r, t) = H_0 \left( \frac{A_1 + iB_1}{A_0 + iB_0} \right) e^{-i\omega t} \quad (6)$$

Формула (6) стандартным образом [2] приводится к виду

$$H(z, h, t) = H_0 \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2}{A_0^2 + B_0^2}} e^{-i(\omega t - \varphi)}, \quad (7)$$

где

$$\varphi(z, h) = \operatorname{arctg} \left( \frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{A_1 A_0 + B_1 B_0} \right). \quad (8)$$

Величина  $f(z, h) = \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2}{A_0^2 + B_0^2}}$  является безразмерной амплитудой поля (6).

$\varphi(z, h)$  определяет сдвиг фазы магнитного поля внутри цилиндра относительно внешнего магнитного поля. Действительная часть выражения (7) определяет магнитное поле внутри цилиндрического образца. Величины  $A_0$  и  $B_0$  являются функциями  $z$ . Величины  $A_1$  и  $B_1$  зависят от  $z$  и  $h$ . Это означает, что  $z$  и  $h$  являются управляющими параметрами исследуемой физической системы. Магнитное поле внутри цилиндра определяется тремя параметрами  $a$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ , входящими в  $z = (a^2 \omega \sigma \mu_0 / 4)$ . Помимо этого, магнитное поле сложным образом зависит от радиальной координаты. Все эти зависимости можно определить, только используя компьютерные технологии.

#### 4. Численное построение графиков $f(h, z = \text{const})$ и $\varphi(h, z = \text{const})$

Прежде всего, студент должен предложить алгоритм суммирования рядов (4) и (5). Эти ряды напоминают ряды, определяющие тригонометрические функции  $\sin(x)$  и  $\cos(x)$ . Отличие состоит в том, что знаменателями в слагаемых ряда стоят квадраты соответствующего факториала. Поэтому в учебных целях студенту можно сначала предложить написать программу построения графика  $y = \sin(x)$ , который определяется рядом  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ . Этот ряд почти совпадает с рядом, определяющим  $B_0$ .

Листинг программы построения графиков:

```

screen 9                                     графический редактор
window (-0.1,-1.6)-(1.1,1.6)
Line(-0.1,0)-(1.1,0):Line(0,1)-(1,1)       координатные оси
p=4*atn(1)                                   число  $\pi$ 
line(-0.1,p/2)-(1,p/2):line(-0.1,-p/2)-(1,-p/2)  вспомогательные линии
z=2.02                                       величина z, при которой строятся графики
n1=1000000                                   число слагаемых в рядах (4), (5)
for h=0 to 1 step 0.01                       цикл по h
z1=h*h*z:a=1:x=-z1*z1:s=1                   цикл вычисления  $A_1$ 
for n=2 to n1 step 2
b=(n-1)*n*n*(n-1)
a=a*x/b
s=s+a
a1=s
next n
d1=a1*a1
a=-z1:s=-z1:x=-z1*z1                       цикл вычисления  $B_1$ 
for n=3 to n1 step 2
b=(n-1)*n*n*(n-1)
a=a*x/b
s=s+a
b1=s
next n
d2=b1*b1
a=1:s=1:x=-z*z                             цикл вычисления  $A_0$ 
for n=2 to n1 step 2
b=(n-1)*n*(n-1)*n

```

```

a=a*x/b
s=s+a
a0=s
next n
d3=a0*a0
a=-z:s=-z:x=-z*z
for n=3 to n1 step 2
b=(n-1)*n*(n-1)*n
a=a*x/b
s=s+a
b0=s
next n
d4=b0*b0
f0=(d1+d2)/(d3+d4)
y=(f0^0.5)
pset(h,y),2
f=(a0*b1-b0*a1)/(a1*a0+b1*b0)
y1=atn(f)
pset(h,y1),4
next h

```

ЦИКЛ ВЫЧИСЛЕНИЯ  $D_0$

построение графика  $f(h, z = const)$

построение графика  $\varphi(h, z = const)$

На рис. 1 – 5 показаны графики  $f(h, z = const)$  и  $\varphi(h, z = const)$  при различных  $z$ . Сплошная линия –  $f(h, z = const)$ , пунктир –  $\varphi(h, z = const)$ .



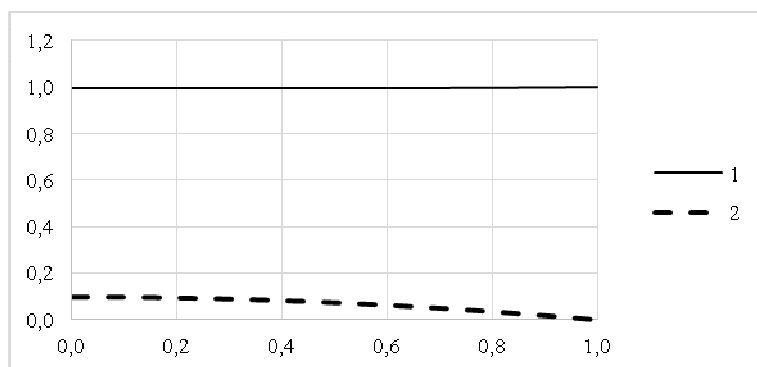


Рис. 1. Графики зависимостей: 1 –  $f(h, z = 0,1)$ ; 2 –  $\varphi(h, z = 0,1)$ ; ( $0 \leq h \leq 1$ )

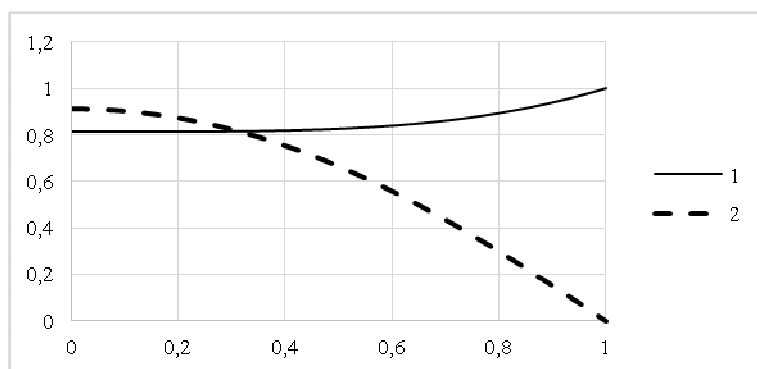


Рис. 2. Графики зависимостей: 1 –  $f(h, z = 1)$ ; 2 –  $\varphi(h, z = 1)$ ; ( $0 \leq h \leq 1$ )

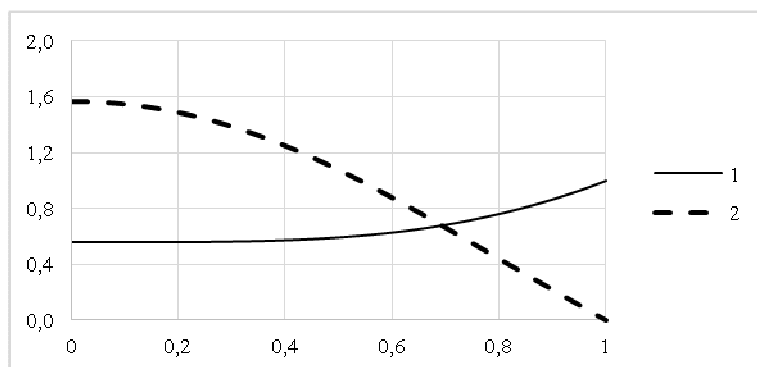


Рис. 3. Графики зависимостей: 1 –  $f(h, z = 2,02)$ ; 2 –  $\varphi(h, z = 2,02)$ ; ( $0 \leq h \leq 1$ )

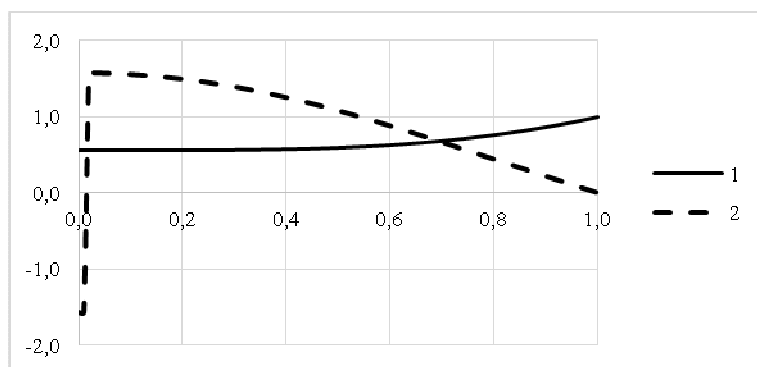


Рис. 4. Графики зависимостей: 1 –  $f(h, z = 2,03)$ ; 2 –  $\varphi(h, z = 2,03)$ ; ( $0 \leq h \leq 1$ )

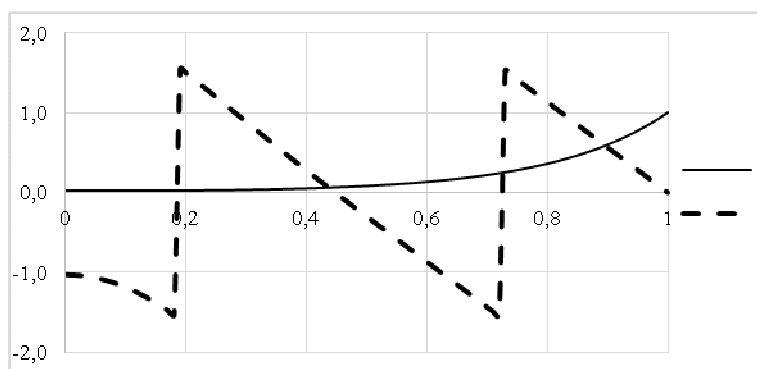


Рис. 5. Графики зависимостей: 1 –  $f(h, z = 16)$ ; 2 –  $\varphi(h, z = 16)$ ; ( $0 \leq h \leq 1$ )

## 5. Обсуждение и выводы

Предложен оригинальный алгоритм построения программы численного изучения радиальной зависимости амплитуды и фазового сдвига магнитного поля в цилиндрическом проводнике, помещенном во внешнее квазистационарное магнитное поле. Программа позволяет «посмотреть», что происходит с полем внутри проводника с изменением управляющих параметров  $z$  и  $h$ . Из построенных графиков следует, что с ростом  $z$  и  $h$  поле внутри проводника структурируется. Амплитуда локализуется в поверхностном слое цилиндра. Фазовый сдвиг поля с ростом  $z$  разбивается на ячейки, внутри которых фазовый сдвиг меняется от  $\pi/2$  до  $-\pi/2$ . Это означает, что обратные связи, обусловленные явлением электромагнитной ин-

дукции, качественно меняют радиальное распределение поля. Скачки фазы приводят к тому, что поле в координате скачка меняет направление на противоположное. Проверка полученного результата предполагает измерение ЭДС, наведенной в индукционном датчике исследованным полем  $H(r, t)$ .

Использование данного метода анализа физической задачи рекомендуется студентам педагогических (физика), естественнонаучных и технических специальностей. Изучая квазистационарные магнитные поля в проводниках, и применяя современные информационные технологии, студент имеет возможность качественно поднять свой уровень по физике.

### Список литературы

1. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике: учеб. пособие / под ред. М.М. Бредова. – М.: Наука, 1970. – 502 с.
2. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики – М.: Наука, 1972. – 592 с.
3. Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем. – М.: Янус-К, 2002. – 284 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред / под ред. Л.П. Питаевского. – М.: Физматлит, 2003. – 649 с.
5. Черных А.Г. Бесконтактное измерение электросопротивления проводников в переменном магнитном поле. Часть 2 // Физическое образование в вузах. – 2013. – Т. 19. – № 3. – С. 138-150.
6. Черных А.Г. Информационный аспект учебно-исследовательской экспериментальной задачи по электродинамике // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. Краснодар: КубГАУ, 2014. N 06(100). С. 1734-1751. – IDA [article ID]: 1001406035. – URL: <http://ej.kubagro.ru/2014/06/pdf/35.pdf> (12.01.2015).

### References

1. Batygin V.V., Topotygin I.N. Sbornik zadach po jelektrodinamike: ucheb. posobie / pod red. M.M. Bredova. – M.: Nauka, 1970. – 502 s.
2. Zel'dovich Ja.B., Myshkis A.D. Jelementy prikladnoj matematiki – M.: Nauka, 1972. – 592 s.
3. Klimontovich Ju.L. Vvedenie v fiziku otkrytyh sistem. – M.: Janus-K, 2002. – 284 s.
4. Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaja fizika. V 10 t. T. 8. Jelektrodinamika sploshnyh sred / pod red. L.P. Pitaevskogo. – M.: Fizmatlit, 2003. – 649 s.
5. Chernyh A.G. Beskontaktnoe izmerenie jelektrosoprotivlenija provodnikov v peryennom magnitnom pole. Chast' 2 // Fizicheskoe obrazovanie v vuzah. – 2013. – T. 19. –

№ 3. – S. 138-150.

6. Chernyh A.G. Informacionnyj aspekt uchebno-issledovatel'skoj jeksperimental'noj zadachi po jelektrodinamike // Politematicheskij setевой jelektronnyj nauch-nyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. Krasnodar: KubGAU, 2014. N 06(100). S. 1734-1751. – IDA [article ID]: 1001406035. – URL: <http://ej.kubagro.ru/2014/06/pdf/35.pdf> (12.01.2015).