УДК 517.954

01.00.00 Физико-математические науки

КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Лайпанова Аида Манафовна
к.ф.-м.н., доцент,
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), Россия, 127994, Москва, Новосущёвская, 22
e-mail: aida7@list.ru

Башиева Анжела Хамидовна
Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, Россия, 369000, КЧР, Черкесск, Ставропольская, 36, e-mail: bash-angel@mail.ru

В работе поставлена и исследована корректная краевая задача для смешанного нагруженного параболо-гиперболического уравнения второго порядка в ограниченной области. Краевые условия носят классический характер. На линии изменения типа, которая также является линией параболического вырождения для гиперболического уравнения, рассматриваемого в нижней полуплоскости, задано непрерывное условие склеивания для самой функции и разрывное условие для следа производной. Основным результатом работы является доказательство ее однозначной разрешимости в требуемом классе функций. В частности, на основе свойств операторов дробного интегро-дифференцирования и с учетом соотношений определяющих решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, вопрос разрешимости исходной задачи был эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости соответствующего интегрального уравнения Вольтерра второго рода. В гиперболической части области, вопрос разрешимости задачи также был редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода. При этом были использованы свойства гипергеометрической функции Гаусса, а также классические методы интегральных уравнений. Таким образом доказаны единственность и существование решения исходной классической задачи

Ключевые слова: НАГРУЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ, ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ТИП, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

UDC 517.954

Physical-Mathematical sciences

A CLASSICAL PROBLEM FOR LOADED HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION OF SECOND ORDER

Laipanova Aida of Manafovna
Cand.Phys.-Math.Sci., associate professor
Moscow State University of Communications, Moscow, Russia, e-mail: aida7@list.ru

Bashiyeva Anzhela Khamidovna
North Caucasian state humanitarian and technological academy, Russia, Cherkessk, e-mail: bash-angel@mail.ru

The investigated and correct boundary value problem for mixed hyperbolic-parabolic equation of second order in a bounded domain is posed and studied in this work. Boundary conditions are of a classical nature. On line of type changes, which is also the line of the parabolic degeneracy for hyperbolic equations considered in the lower half-plane, a continuous bonding condition for the function itself and the breaking condition for the trace of the derivative is given. The main result is the proof of its unique solvability in the required class of functions. In particular, based on the properties of the operators of fractional integro-differentiation and in view of the ratio of the first boundary value problem for the heat equation, the question of the solvability of the original problem was equivalently reduced to the problem of solvability of the corresponding integral equation of the Voltaire second kind. In the hyperbolic part of the region, the question of solvability of the problem has also been reduced to the problem of solvability of the integral equation Voltaire second kind. The properties of the hypergeometric function of Gauss, as well as classical methods of integral equations were used. Thus it is proved the uniqueness and the existence of classical solution to the initial problem

Keywords: LOADED EQUATION, HYPERBOLIC-PARABOLIC TYPE, BOUNDARY VALUE PROBLEM, EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTION, INTEGRATED EQUATIONS

Введение

В современной научной литературе имеется немало работ посвященных краевым задачам для смешанных уравнений (например [1-6]). Вместе с тем, развитие фундаментальных основ данной теории базирующееся на практически важных проблемах физики и механики и в значительной степени усиливает интерес к изучению нагруженных уравнений в классических и нелокальных задачах.

В настоящей работе представлены результаты исследования однозначной разрешимости задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения в односвязной области с классическими краевыми условиями и разрывными условиями сопряжения для следа производной искомой функции на линии изменения типа.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y-\lambda(y)u(x_0,y),\ 0\le x_0<1,\ y>0, \\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}+\alpha(-y)^{m-1}u_y,\ \alpha=const,\ 0<m<2,\ y<0 \end{cases} \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0, x=1, y=h$ и характеристиками

$$AC_m: x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0,\quad BC_m: x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1$$

уравнения (1) при $y<0$; $\lambda(y)$ – заданная непрерывная функция, причем $m-1<\alpha<\frac{m}{2}$ или $\frac{m}{2}<\alpha<1$.

Пусть $\Omega_1=\Omega\cap\{y>0\}, \Omega_2=\Omega\cap\{y<0\}$ - параболическая и гиперболическая части области Ω соответственно.

Исследуем следующую задачу.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$;

2) $u(x,y)$ – регулярное решение уравнения (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$;

3) на линии $y=0$ вырождения типа (1) выполняются условия склеивания

$$u(x,+0)=u(x,-0), \qquad 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0+} u_y = \lim_{y\to 0-}(-y)^{\alpha} u_y = \nu(x), \qquad 0<x<1;$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u_x(0,y)=\varphi_1(y), \qquad u(1,y)=\varphi_2(y), \qquad 0\le y\le h, \tag{3}$$

$$u\big|_{AC}=\psi(x), \quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right], \tag{4}$$

где $\varphi_1(y),\varphi_2(y)$ – заданные непрерывные функции, а $\psi(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая заданная функция.

2. Доказательство однозначной разрешимости задачи 1

Пусть $m-1<\alpha<\dfrac{m}{2}$, $\quad -\dfrac{1}{2}<\beta<0$, где $\beta=\dfrac{2\alpha-m}{2(2-m)}$. Известно [7], что решение уравнения (1) в полуплоскости $y<0$, удовлетворяющее начальным данным:

$$u(x,0)=\tau(x),$$

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x), \tag{5}$$

единственно и имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \lambda_1\int_0^1 \tau(\xi)t^{\beta}(1-t)^{\beta}dt + \frac{2\lambda_1}{(1+2\beta)(2-m)}(-y)^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 \tau'(\xi)t^{\beta}(1-t)^{\beta}(2t-1)dt - \\ &- \left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta-1}\lambda_2(-y)^{1-\alpha}\int_0^1 \nu(\xi)t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\xi = x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(2t-1), \qquad \lambda_1=\frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)},$$

$$\lambda_2 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{1-2\beta}.$$

Используя краевое условие (4), нетрудно получить функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_2 на линию y=0 в виде

$$\tau(x) = \lambda_3 \int_0^x (x-t)^{-2\beta}\nu(t)dt + F(x), \tag{7}$$

где

$$F(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} D_{0x}^{2\beta-1} x^{\beta} D_{0x}^{1-\beta}\psi(x),\ \lambda_3 = 2\lambda_2 \cos\pi\beta .$$

Дифференцируя равенство (7) дважды по x, получим

$$\tau''(x) = \lambda_3 \Gamma(1-2\beta) D_{0x}^{2\beta+1}\nu(x) + F''(x). \tag{8}$$

Переходя теперь к пределу в уравнении (1) при $y \to +0$, получим второе функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из параболической части Ω_1 на линию y=0 в виде:

$$\tau''(x) - \nu(x) - \lambda(0)\tau(x_0) = 0, \tag{9}$$

Исключая из уравнений (8) и (9) функцию $\tau(x)$, получаем относительно $\nu(x)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\nu(x) = \lambda_3 \Gamma(1-2\beta) D_{0x}^{2\beta+1}\nu(x) + F''(x) - \lambda(0)\tau(x_0). \tag{10}$$

С учетом непрерывности функции $\nu(x)$ на $(0,1)$, единственное решение уравнения (10) можно записать в виде

$$\nu(x) = \int_0^x K(t)(x-t)^{\mu-1} E_{1/\mu}\left[\gamma(x-t)^{\mu};\mu\right]dt , \tag{11}$$

где

$$\mu = 1+2\beta;\ \gamma = 1/\lambda_3\Gamma(1-2\beta),\ K(t) = \gamma(F''(t) - \lambda(0)\tau(x_0)), \tag{12}$$

$E_{1/\mu}[\gamma(x-t)^{\mu};\mu]$ – функция типа Миттаг-Леффлера.

Подставляя в (7) значение $\nu(t)$, а затем, применяя формулы перестановки Дирихле-Фубини, получим

$$\tau(x)=\lambda_3\int_0^x (x-t)^{-2\beta}\left\{\int_0^t K(t_1)(t-t_1)^{\mu-1}E_{1/\mu}\left[\gamma(t-t_1)^{\mu};\mu\right]dt_1\right\}dt+$$

$$+F(x)=\lambda_3\int_0^x K(t_1)dt_1\int_{t_1}^x (x-t)^{-2\beta}(t-t_1)^{\mu-1}E_{1/\mu}\left[\gamma(t-t_1)^{\mu};\mu\right]dt+F(x).$$

Принимая во внимание [8]:

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}\equiv E_{1/\rho,\mu}(z)$$

равенство (12) можно записать в виде

$$\tau(x)=\lambda_3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma^k}{\Gamma(2\beta k+2\beta+k+1)}\int_0^x K(t_1)dt_1\int_{t_1}^x (x-t)^{-2\beta}(t-t_1)^{2\beta k+k+2\beta}dt+F(x). \qquad (13)$$

Производя замену $t=t_1+(x-t_1)\xi$ во внутреннем интеграле (13), будем иметь

$$\int_{t_1}^x (x-t)^{-2\beta}(t-t_1)^{2\beta k+k+2\beta}dt=$$

$$=(x-t_1)^{2\beta k+k+1}\int_0^1 \xi^{2\beta+2\beta k+k}(1-\xi)^{-2\beta}d\xi=(x-t_1)^{2\beta k+k+1}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2\beta+2\beta k+k+1)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(2\beta k+k+2)}.$$

Таким образом, правая часть равенства (13) совпадает с выражением

$$\lambda_3\Gamma(1-2\beta)\int_0^x K(t_1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma^k}{\Gamma(2\beta k+k+2)}(x-t_1)^{2\beta k+k+1}dt+F(x),$$

т.е.

$$\tau(x)=\lambda_3\Gamma(1-2\beta)\int_0^x K(t_1)(x-t_1)E_{1/2\beta+1}\left[\gamma(x-t_1)^{2\beta+1};2\right]dt_1+F(x). \qquad (14)$$

Подставляя значение $K(t)$ из (12) в (14), получим:

$$\tau(x)=\int_0^x (x-t_1)F''(t_1)E_{1/2\beta+1}\left[\gamma(x-t_1)^{2\beta+1};2\right]dt_1-\lambda(0)\tau(x_0)\int_0^x (x-t_1)\times$$
$$\times E_{1/2\beta+1}\left[\gamma(x-t_1)^{2\beta+1};2\right]dt_1+F(x). \qquad (15)$$

Полагая $x=1$ в равенстве (15), приходим к соотношению

$$\tau(1)=\varphi_2(0)=\int_0^1(1-t_1)F''(t_1)E_{1/2\beta+1}\left[\gamma(1-t_1)^{2\beta+1};2\right]dt_1-$$
$$-\lambda(0)\tau(x_0)\int_0^1(1-t_1)E_{1/2\beta+1}\left[\gamma(1-t_1)^{2\beta+1};2\right]dt_1+F(1).$$

Из последнего равенства, при выполнении условия

$$\lambda(0)\int_0^1(1-t_1)E_{1/2\beta+1}\left[\gamma(1-t_1)^{2\beta+1};2\right]dt_1\neq 0$$

однозначно находим $\tau(x_0)$:

$$\tau(x_0)=\frac{F(1)+\int_0^1(1-t_1)F''(t_1)E_{1/2\beta+1}\left[\gamma(1-t_1)^{2\beta+1};2\right]dt_1-\varphi_2(0)}{\lambda(0)\int_0^1(1-t_1)E_{1/2\beta+1}\left[\gamma(1-t_1)^{2\beta+1};2\right]dt_1}. \qquad (16)$$

После определения $\tau(x)$ в области Ω_1 приходим к задаче (1), (3) и $u(x,0)=\tau(x)$. Решение этой задачи дается формулой [9]:

$$u(x,y)-\int_0^y\int_0^1\lambda(\eta)G(x,y;\xi,\eta)u(x_0,\eta)d\xi d\eta=u_0(x,y), \qquad (17)$$

где

$$u_0(x,y)=\int_0^y G(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta+\int_0^l G(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi-\int_0^y G_\xi(x,y;l,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta,$$

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-4n)^2}{4(y-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi-4n)^2}{4(y-\eta)}\right]-\right.$$
$$\left.-\exp\left[-\frac{(x-\xi-2-4n)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi-2-4n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}-$$

– функция Грина указанной выше задачи для уравнения теплопроводности [9].

Переходя к пределу при $x\to x_0$ в равенстве (17), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $u(x_0,y)$:

$$u(x_0,y)+\int_0^y\frac{H(y,\eta)}{(y-\eta)^{1/3}}u(x_0,\eta)d\eta=u_0(x_0,y), \qquad (18)$$

где $H(y,\eta)$ представляется через $\lambda(y)$ и функцию $G(x,y;\xi,\eta)$.

Интегральное уравнение (18) однозначно разрешимо в требуемом классе функций.

Следовательно, решение исходной задачи в гиперболической части может быть найдено как решение задачи Дарбу.

Рассмотрим теперь случай, когда $\frac{m}{2} < \alpha < 1$, т.е. при $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

Решение задачи Коши (1), (5) в этом случае имеет вид [7]:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= c_1 \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(2t-1)\right] t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt - \\ &- c_2(-y)^{1-\alpha}\int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(2t-1)\right] t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$c_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} = \frac{1}{B(\beta,\beta)},\ c_2 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Удовлетворяя (19) краевому условию (4), получаем

$$\psi(x) = c_1\int_0^1 \tau(2xt)t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt - c_2\left(x\,\frac{2-m}{2}\right)^{\frac{2-2\alpha}{2-m}}\int_0^1 \nu(2xt)[t(1-t)]^{-\beta}dt,$$

или, заменяя x на $\frac{x}{2}$ и полагая $s = xt$, будем иметь

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) = c_1 x^{1-2\beta}\int_0^x \tau(s)(x-s)^{\beta-1}s^{\beta-1}ds - c_2\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2-2\alpha}{2-m}}\int_0^x \nu(s)s^{-\beta}(x-s)^{-\beta}ds\ . \tag{20}$$

Отсюда, применив известную формулу обращения интегрального уравнения Абеля, приходим к соотношению:

$$\nu(x) = c_4 x^{\beta}k\,\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^{1-2\beta}dt}{(x-t)^{1-\beta}}\int_0^t \tau(\xi)[\xi(t-\xi)]^{\beta-1}d\xi - M(x), \tag{21}$$

где $c_4 = \frac{c_1}{c_3}$, $c_3 = c_2\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2-2\alpha}{2-m}}$, $k = \frac{\sin\pi\beta}{\pi}$, $M(x) = \frac{x^{\beta}k}{c_3}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt}{(x-t)^{1-\beta}}.$

Меняя порядок интегрирования в двойном интеграле в правой части (21), а затем, вводя новую переменную интегрирования $t=\xi+(x-\xi)z$ и, используя формулу интегрального представления гипергеометрической функции, находим

$$I=\int_0^x (x-t)^{\beta-1}t^{1-2\beta}dt\int_0^t \xi^{\beta-1}(t-\xi)^{\beta-1}\tau(\xi)d\xi=\int_0^x \tau(\xi)\xi^{\beta-1}d\xi\times$$

$$\times\int_\xi^x t^{1-2\beta}(t-\xi)^{\beta-1}(x-t)^{\beta-1}dt=\int_0^x \tau(\xi)\xi^{-\beta}(x-\xi)^{2\beta-1}d\xi\int_0^1 z^{\beta-1}\times$$

$$\times(1-z)^{\beta-1}\left(1-\frac{\xi-x}{\xi}z\right)^{1-2\beta}dz=\frac{1}{c_1}\int_0^x \tau(\xi)\xi^{-\beta}(x-\xi)^{2\beta-1}\times$$

$$\times F\left(\beta,2\beta-1,2\beta;\frac{\xi-x}{\xi}\right)d\xi.$$

Далее, применяя последовательно к последнему равенству формулы [8]:

$$F(a,b,c,z)=(1-z)^{-b}F\left(c-a,b,c;\frac{z}{z-1}\right),\quad F(a,b,c;z)=F(b,a,c;z),$$

получим

$$\nu(x)=c_4kx^{\beta}\frac{d}{dx}\int_0^x \xi^{\beta-1}\tau(\xi)\left(\frac{x-\xi}{x}\right)^{2\beta-1}F\left(2\beta-1,\beta,2\beta;\frac{x-\xi}{x}\right)d\xi-M(x). \qquad (22)$$

Принимая во внимание следующие, легко устанавливаемые соотношения:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \xi^{\beta-1}\left(\frac{x-\xi}{x}\right)^{2\beta-1}F\left(2\beta-1,\beta,2\beta;\frac{x-\xi}{x}\right)\tau(\xi)d\xi=x^{-\beta}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}},$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\psi(t/2)dt}{(x-t)^{1-\beta}}=\frac{\psi(0)}{x^{1-\beta}}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\psi'(t/2)dt}{(x-t)^{1-\beta}},$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}}=\frac{\tau(0)}{x^{1-2\beta}}+\int_0^x\frac{\tau'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}},$$

с учетом того, что $\tau(0)=\psi(0)=0$, окончательно получим:

$$\nu(x)=\frac{k}{c_3}\left(c_1\int_0^x\frac{\tau'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}}-\frac{x^{\beta}}{2}\int_0^x\frac{\psi'(t/2)dt}{(x-t)^{1-\beta}}\right). \qquad (23)$$

Таким образом, функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части на линию $y=0$, имеет вид (23).

Исключая из уравнений (10) и (23) функцию $\nu(x)$, получаем двухточечную краевую задачу для обыкновенного нагруженного интегро-дифференциального уравнения

$$\tau''(x)-\frac{k}{c_3}\int_0^x\frac{\tau'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}}-\lambda(0)\tau(x_0)=-\frac{x^{\beta}k}{2}\int_0^x\frac{\psi'(t/2)dt}{(x-t)^{1-\beta}}, \quad (24)$$

$$\tau'(0)=\varphi_1(0),\ \tau(1)=\varphi_2(0). \quad (25)$$

Интегрируя (24) от 0 до x, находим

$$\tau'(x)-\tau'(0)-\frac{k}{c_3}\int_0^x dt\int_0^t\frac{\tau'(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{1-2\beta}}-\lambda(0)\tau(x_0)x=-\frac{k}{2}\int_0^x t^{\beta}dt\int_0^t\frac{\psi'(\xi/2)d\xi}{(t-\xi)^{1-\beta}}.$$

Преобразуем двойные интегралы в последнем равенстве. Будем иметь:

$$I_1=\int_0^x dt\int_0^t\frac{\tau'(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{1-2\beta}}=\frac{1}{2\beta}\int_0^x\tau'(\xi)(x-\xi)^{2\beta}d\xi, \quad (26)$$

$$I_2=\int_0^x t^{\beta}dt\int_0^t\frac{\psi'(\xi/2)d\xi}{(t-\xi)^{1-\beta}}=B(1,\beta)x^{2\beta}\int_0^x\psi'(\xi/2)\left(\frac{x-\xi}{x}\right)^{\beta}F\left(-\beta,1,\beta+1;\frac{x-\xi}{x}\right)d\xi.$$

Отсюда, в результате несложных преобразований получим:

$$\tau'(x)-\frac{k}{2\beta c_3}\int_0^x\tau'(\xi)(x-\xi)^{2\beta}d\xi=-\frac{B(1,\beta)x^{2\beta}k}{2}\times$$
$$\int_0^x\psi'(\xi/2)\left(\frac{x-\xi}{x}\right)^{\beta}F\left(-\beta,1,\beta+1;\frac{x-\xi}{x}\right)d\xi+\tau'(0)+\lambda(0)\tau(x_0)x \quad (27)$$

Считая правую часть равенства (27) известной и равной $\rho(x)$, относительно $\tau'(x)$ получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\tau'(x)=\rho(x)+k_1\int_0^x\tau'(\xi)(x-\xi)^{2\beta}d\xi, \quad (28)$$

где

$$k_1=k/(2\beta C_3).$$

Обращая полученное уравнение (28), будем иметь:

$$\tau'(x) = \rho(x) + k_1 \int_0^x R(x,t)\rho(t)dt\,, \tag{29}$$

где $R(x,t)$ – резольвента ядра $(x-\xi)^{2\beta}$ уравнения (28).

Учитывая в (29) значение $\rho(x)$, можем записать:

$$\tau'(x) = \tilde{f}(x) + \lambda(0)\tau(x_0)\left[x + k_1 \int_0^x R(x,t)tdt\right], \tag{30}$$

где

$$\tilde{f}(x) = f(x) + k_1 \int_0^x R(x,t) f(t)dt\,,$$

$$f(x) = k_2 x^{2\beta} \int_0^x \psi'(\xi/2)\left(\frac{x-\xi}{x}\right)^{\beta} F\left(-\beta, 1, \beta+1; \frac{x-\xi}{x}\right)d\xi + \tau'(0)\,,$$

$$k_2 = -\frac{kB(1,\beta)}{2},\ \rho(x) = f(x) + \lambda(0)\tau(x_0)\,.$$

Интегрируя (30) от 0 до x, будем иметь:

$$\tau(x) = \int_0^x \tilde{f}(t)dt + \lambda(0)\tau(x_0)\frac{x^2}{2} + k_1\lambda(0)\tau(x_0)\int_0^x (x-t)R(x,t)tdt\,. \tag{31}$$

Полагая в (31) $x = x_0$, однозначно определяем $\tau(x_0)$:

$$\tau(x_0) = \frac{\int_0^{x_0} \tilde{f}(t)dt}{1 - \lambda(0)\left[\frac{x_0^2}{2} + k_1 \int_0^{x_0} R(x_0,t)(x_0 - t)tdt\right]}, \tag{32}$$

при условии что выражение, стоящее в знаменателе (32) отлично от нуля.

Затем, подставив это значение в (31), полностью определим $\tau(x)$.

Заключение

Таким образом, в работе для различных случаев параметра определяющего порядок вырождения гиперболического уравнения доказана однозначная разрешимость нагруженного уравнения смешанного типа.

При этом вопрос разрешимости исходной задачи 1 был эквивалентно редуцирован методом интегральных уравнений к вопросу разрешимости задачи с краевыми условиями (3) и $u(x,0)=\tau(x)$ для параболического уравнения в области Ω_1, и вопросу разрешимости первой или второй задач Дарбу в области Ω_2 соответственно.

Список литературы

1. Елеев В. А. О двух краевых задачах для смешанных уравнений с перпендикулярными линиями изменения типа /В.А. Елеев, В.Н. Лесев// Владикавказский мат. журнал, 2001. – Т3. Вып.4. – С. 9-22.
2. Лесев В.Н. Задача со смещением и негладкими условиями сопряжения для смешанного уравнения второго порядка/В.Н. Лесев// Сборник научных трудов SWorld, 2013. – Т. 4. № 4. – С. 66-68.
3. Лесев В.Н. Краевая задача для смешанного уравнения с перпендикулярными линиями изменения типа /В.Н. Лесев// Политематический сетевой электронный научный журнал КубГАУ, 2014. – № 98 (04). – С. 105-125.
4. Лесев В.Н. Неклассическая краевая задача для смешанного уравнения второго порядка с интегральными условиями сопряжения / В.Н. Лесев, А.О. Желдашева// Известия смоленского государственного университета, 2013. №3 (23). – С. 379-386.
5. Лесев В.Н. Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка в характеристической области / В.Н. Лесев, А.О. Желдашева// Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки, 2012. – № 3 (106). – С. 52-56.
6. Лесев В.Н. Об одной краевой задаче для смешанного уравнения с разрывными условиями сопряжения / В.Н. Лесев, А.О. Желдашева// Известия Смоленского государственного университета. 2012. № 3 (19). – С. 392-399.
7. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов // Москва: Высшая школа, 1985. – 304 с.
8. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение / А.М. Нахушев / – Нальчик: изд-во КБНЦ РАН. 2000. – 299 с.
9. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев / Ташкент: Фан, 1979. – 238 с.

References

1. Eleev V. A. O dvuh kraevyh zadachah dlja smeshannyh uravnenij s perpendikuljarnymi linijami izmenenija tipa /V.A. Eleev, V.N. Lesev// Vladikavkazskij mat. zhurnal, 2001. – T3. Vyp.4. – S. 9-22.
2. Lesev V.N. Zadacha so smeshheniem i negladkimi uslovijami soprjazhenija dlja smeshannogo uravnenija vtorogo porjadka/V.N. Lesev// Sbornik nauchnyh trudov SWorld, 2013. – T. 4. № 4. – S. 66-68.
3. Lesev V.N. Kraevaja zadacha dlja smeshannogo uravnenija s perpendikuljarnymi linijami izmenenija tipa /V.N. Lesev// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal KubGAU, 2014. – № 98 (04). – S. 105-125.

4. Lesev V.N. Neklassicheskaja kraevaja zadacha dlja smeshannogo uravnenija vtorogo porjadka s integral'nymi uslovijami soprjazhenija / V.N. Lesev, A.O. Zheldasheva// Izvestija smolenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2013. №3 (23). – S. 379-386.
5. Lesev V.N. Nelokal'naja kraevaja zadacha dlja uravnenija smeshannogo tipa vtorogo porjadka v harakteristicheskoj oblasti / V.N. Lesev, A.O. Zheldasheva// Vestnik Adygejskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija 4: Estestvenno-matematicheskie i tehnicheskie nauki, 2012. – № 3 (106). – S. 52-56.
6. Lesev V.N. Ob odnoj kraevoj zadache dlja smeshannogo uravnenija s razryvnymi uslovijami soprjazhenija / V.N. Lesev, A.O. Zheldasheva// Izvestija Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta. 2012. № 3 (19). – S. 392-399.
7. Smirnov M.M. Uravnenija smeshannogo tipa / M.M. Smirnov // Moskva: Vysshaja shkola, 1985. – 304 s.
8. Nahushev A.M. Jelementy drobnogo ischislenija i ih primenenie / A.M. Nahushev / – Nal'chik: izd-vo KBNC RAN. 2000. – 299 s.
9. Dzhuraev T.D. Kraevye zadachi dlja uravnenij smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov / T.D. Dzhuraev / Tashkent: Fan, 1979. – 238 s.
Eleev V.A. Two boundary value problems for mixed equations with perpendicular lines change the type / V.A. Eleev, V.N. Lesev // Vladikavkaz Mathematical Journal. 2001. T. 3. no. 4. pp. 9–22.