УДК 514.84+517.9

01.00.00 Физико-математические науки

МЕТРИКА УСКОРЕННЫХ И ВРАЩАЮЩИХСЯ СИСТЕМ ОТСЧЕТА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
Scopus Author ID: 6603801161
SPIN-код автора: 4945-6530
Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

Построена метрика, описывающая ускоренные и вращающиеся системы отсчета в общей теории относительности в случае произвольной зависимости ускорения и угловой скорости системы от времени. Установлено, что тензор кривизны в таких метриках равен нулю, что соответствует движению в плоских пространствах. Показано, что движение пробных тел в метрике ускоренной и вращающейся системы отсчета в общей теории относительности осуществляется подобно классическому движению в неинерциальной системе отсчета. Следовательно, существуют такие метрики в общей теории относительности, в которых выполняется теорема Кориолиса и классическое правило сложения скоростей. Это означает, что классическая механика является точной, а не приближенной моделью в общей теории относительности. Развита теория потенциала в неинерциальных системах отсчета в общей теории относительности. Построены численные модели распространения волн в неинерциальных системах отсчета в случае зависимости потенциала от одного, двух и трех пространственных измерений. В численных экспериментах показано, что ускорение системы отсчета приводит к эффектам запаздывания и опережения волн, а также к нарушению симметрии волнового фронта, что свидетельствует о локальном изменении скорости сигнала

Ключевые слова: ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА, ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА, ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ, ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

UDC 514.84+517.9

Physics and Mathematics

METRIC OF ACCELERATING AND ROTATING REFERENCE SYSTEMS IN GENERAL RELATIVITY

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
Scopus Author ID: 6603801161
Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

Metric describing the accelerated and rotating reference system in general relativity in the case of an arbitrary dependence of acceleration and angular velocity on time has been proposed. It is established that the curvature tensor in such metrics is zero, which corresponds to movement in the flat spaces. It is shown that the motion of test bodies in the metric accelerated and rotating reference system in general relativity is similarly to the classical motion in non-inertial reference frame. Consequently, there exist a metric in general relativity, in which the Coriolis theorem and classic velocity-addition formula are true. This means that classical mechanics is accurate rather than approximate model in general relativity. A theory of potential in non-inertial reference systems in general relativity is considered. The numerical model of wave propagation in non-inertial reference frames in the case when potential depending of one, two and three spatial dimensions has been developed. It is shown in numerical experiment that the acceleration of the reference system leads to retardation effects, as well as to a violation of the symmetry of the wave front, indicating that there is local change of wave speed

Keywords: GENERAL RELATIVITY, NON-INERTIAL REFERENCE FRAME, CORIOLIS THEOREM, VELOCITY-ADDITION THEOREM, POTENTIAL THEORY

Введение

Вопрос об ускоренных или вращающихся системах отсчета в общей теории относительности рассматривался в работах [1-11] и других. В силу произвола в выборе системы координат, диктуемого принципом относительности, не существует каких-либо привилегий у той или иной системы отсчета в сравнении с другими, хотя были попытки оспорить это несомненный факт [3].

Принятая в общей теории относительности классификация полей тяготения по группам движения [5] позволяет выделить те отображения пространства на себя, которые сохраняют метрику. Если в некоторой системе координат можно определить группу Ли непрерывных преобразований, сохраняющих метрику, то это выполняется и в любой другой системе координат. Такие отображения называют автоморфизмом, а преобразования – движениями [5].

Как известно, разделение систем отсчета на инерциальные, ускоренные, вращающиеся и на ускоренные и вращающиеся принято в классической механике, в которой такое разделение позволяет описать сложное движение материальной точки в неинерциальных системах отсчета [12-14]. Ускорение в двух системах отсчета, одна из которых является неподвижной, а другая движется относительно первой с произвольной скоростью, связаны между собой, в силу теоремы Кориолиса, уравнением [12]

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\tau + 2\mathbf{a}_c \qquad (1)$$

Вектор в левой части уравнения (1) называется абсолютным ускорением, первое слагаемое в правой части называется относительным ускорением, второе слагаемое – это переносное ускорение, наконец, третье слагаемое – удвоенное дополнительное (или составное центростремительное) ускорение [12]. Отметим, что иногда вектор $2\mathbf{a}_c$ называют ускорением Кориолиса [13], а произведение массы на ускорение Кориолиса – силой Кориолиса [14].

Поскольку выражение (1) является следствием классического правила сложения векторов скорости [12-14], можно предположить, что в общей теории относительности уравнение (1) не должно выполняться. Однако в настоящей работе показано, что существует такая метрика с сигнатурой $(+,-,-,-)$, в которой выполняется и классическое правило сложения скоростей, и теорема Кориолиса (1). Следовательно, любые действующие силы механической природы могут быть описаны в рамках метрической теории. Сюда, в частности, относятся силы электромагнитного происхождения и само электромагнитное поле в теории Максвелла.

Известно, что в неинерциальных системах отсчета наблюдаются различные электродинамические и оптические эффекты – эффект Саньяка, эффект Стюарта-Толмена и другие. В настоящей работе обсуждаются вопросы моделирования указанных эффектов в общей теории относительности в метрике ускоренных и вращающихся систем координат. Развита теория потенциала в неинерциальных системах отсчета в общей теории относительности. Показано, что ускорение системы приводит к нарушению симметрии волнового фронта, к эффектам опережения и запаздывания волн, что свидетельствует об изменении локальной скорости сигнала.

Отдельного внимания заслуживает вопрос об инерциальных системах отсчета в общей теории относительности [1-10]. Так, например, теорема сложения скоростей, которую доказал Эйнштейн в работе [15], является следствием гипотезы постоянства скорости света в инерциальных системах отсчета. Отсюда можно было бы сделать вывод о существовании привилегированной системы отсчета, в которой скорость света является мировой константой. Однако Эйнштейн отказался от этой идеи, заменив инерциальные системы координат с их жесткими масштабами времени и длины более общими деформируемыми гауссовыми системами отнесения, которые получили наименование «моллюска отсчета» - [1], с. 580.

Построенная в настоящей работе метрика ускоренных и вращающихся систем отсчета при произвольной зависимости ускорения и угловой скорости от времени удовлетворяет уравнениями Эйнштейна в общей теории относительности и описывает плоские пространства, уравнение геодезических в котором совпадает с уравнением движения тел в неинерциальной системе отсчета в классической механике.

Принцип эквивалентности в общей теории относительности

Уравнения Эйнштейна имеют вид [1-9]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu}\Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2}$$

$$R_{ik} = R^j_{ijk}, \quad R = g^{ik} R_{ik},$$

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\mu_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\mu\delta},$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s}\right)$$

$R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно; $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ - тензор Римана, Γ^i_{kl} – символы Кристоффеля второго рода.

Как известно, уравнение Эйнштейна связано с уравнениями Максвелла, Навье-Стокса, Янга-Миллса и Шредингера [16-24]. Указанные связи не являются случайными, так как уравнение Эйнштейна (2) отражает наиболее фундаментальные свойства движения и материи. В частности, принцип эквивалентности, положенный в основу общей теории относительности, гласит, что «инерция и тяжесть тождественны; отсюда и из результатов специальной теории относительности неизбежно следует, что симметричный «фундаментальный тензор» (g_{ik}) определяет метрические свойства пространства, движение тел по инерции в нем, а также и действие гравитации» - [1], с. 613.

Однако принцип эквивалентности, видимо, имеет и более широкое применение, например, в квантовой механике [23-24]. Фактически этот принцип означает, что **любое ускорение, обусловленное внешними силами, эквивалентно некоторому изменению метрики** [10-11].

Отметим, что метрика плоского пространства-времени Минковского играет особую роль в физических приложениях, поскольку уравнения стандартной модели получают особенно простое выражение в этой метрике [2-9, 26-32]. Однако классическая механика [12-14] играет не менее важную роль. Ниже показано, что существует такая метрика, которая описывает плоское пространство-время, в котором движение пробных частиц точно соответствует классическому движению в неинерциальной системе координат. Это означает, что классическая механика является точной, а не приближенной моделью в общей теории относительности.

Уравнения движения материальной точки в гравитационном поле можно представить в форме [1-9]

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \tag{3}$$

Рассмотрим метрику, связанную с движением материальной точки с заданной скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, имеем

$$ds^2 = dt^2 - (dx - u_1 dt)^2 - (dy - u_2 dt)^2 - (dz - u_3 dt)^2 \tag{4}$$

Вычисляя отличные от нуля коэффициенты аффинной связности в метрике (4), получим

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{du_1}{dt}, \quad \Gamma^3_{11} = -\frac{du_2}{dt}, \quad \Gamma^4_{11} = -\frac{du_3}{dt} \tag{5}$$

Уравнения (3) удовлетворяется тождественно, если мы положим

$$ds = dt, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \qquad (6)$$
$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

Метрика (4) описывает классическое движение с ускорением. Уравнение (2) для пустого пространства и при равной нулю космологической константе также удовлетворяется, поскольку $R_{ik} = 0$ в метрике (4). Более того тензор Римана $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0$. Следовательно, движение с ускорением не изменяет кривизну пространства и не требует для своего поддержания материи, если ускорение является только функцией времени.

Однако если мы предположим, что существует поле скорости, зависящее, например, от одной координаты, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, z)$, то придем к очень сложной теории, с отличной от нуля скалярной кривизной [11]

$$R = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)^2 - 4\left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)^2 + u_3\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t \partial z}\right] \qquad (7)$$

Таким образом, в общей теории относительности для поддержания градиента скорости, например, в сплошной среде необходимо определенное распределение материи, что в общем случае не может быть выполнено. Следовательно, движение сплошной среды в общей теории относительности не может быть произвольным, но должно быть совместным с выбором метрики [11].

Ниже показано, что существует метрика, в которой поле скорости зависит от времени и пространственных координат, выполняются уравнения (1) и (2), и при этом тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, что соответствует плоскому пространству.

Ускоренные и вращающиеся системы отсчета

Рассмотрим метрику вида (4), в которой положим

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(t) + [\mathbf{k}(t) \times \mathbf{r}] \tag{8}$$

$$ds^2 = dt^2 - (dx - u_1 dt)^2 - (dy - u_2 dt)^2 - (dz - u_3 dt)^2$$

Здесь $\mathbf{v}(t) = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3), \mathbf{k}(t) = (k_1, k_2, k_3),\ \mathbf{r} = (x, y, z)$ - трехмерные векторы, для которых справедлива операция векторного умножения.

Покажем, что метрика (8) описывает движение в ускоренных и вращающихся системах координат. Действительно, вычисляя отличные от нуля коэффициенты аффинной связности и тензор кривизны в метрике (8), получим

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^2 = -\frac{d\,\mathrm{v}_1}{dt} - x(k_2^2 + k_3^2) + k_1(yk_2 + zk_3) - k_3\,\mathrm{v}_2 + k_2\,\mathrm{v}_3 - z\frac{dk_2}{dt} + y\frac{dk_3}{dt},\\
&\Gamma_{31}^2 = k_3,\ \Gamma_{41}^2 = -k_2,\\
&\Gamma_{11}^3 = -\frac{d\,\mathrm{v}_2}{dt} - y(k_1^2 + k_3^2) + k_2(xk_1 + zk_3) - k_1\,\mathrm{v}_3 + k_3\,\mathrm{v}_1 + z\frac{dk_1}{dt} - x\frac{dk_3}{dt},\\
&\Gamma_{21}^3 = -k_3,\ \Gamma_{41}^3 = k_1,\\
&\Gamma_{11}^4 = -\frac{d\,\mathrm{v}_3}{dt} - z(k_1^2 + k_2^2) + k_3(yk_2 + xk_1) - k_2\,\mathrm{v}_1 + k_1\,\mathrm{v}_2 - y\frac{dk_1}{dt} + x\frac{dk_2}{dt},\\
&\Gamma_{21}^4 = k_2,\ \Gamma_{31}^4 = -k_1.
\end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя выражения (9) в уравнения (3) и производя необходимые преобразования к векторному виду, находим

$$ds = dt,\quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} + [\mathbf{k} \times \mathbf{v}] + [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{k}}] + 2[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{k}] - [\mathbf{k} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{k}]] = 0 \tag{10}$$

Здесь $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt, \dot{\mathbf{k}} = d\mathbf{k}/dt$ - трехмерные векторы, описывающие скорость изменения величин по отношению к подвижным осям выбранной системы координат. Выражение (10) можно сравнить с классической формулой движения материальной частицы в неинерциальной системе отсчета [12-14]. Так, например, в [14] это движение описывается уравнением (39.7), имеем

$$m\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \tilde{\mathbf{r}}} - m\mathbf{W} + m\left[\tilde{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{\Omega}}\right] + 2m\left[\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{\Omega}\right] + m\left[\mathbf{\Omega} \times \left[\tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{\Omega}\right]\right] \qquad (11)$$

Здесь m, U – масса частицы и потенциал внешнего поля соответственно. Выражение (11) получено путем преобразования функции Лагранжа в два этапа, на первом из которых осуществляется переход из инерциальной системы в ускоренную систему, движущуюся со скоростью $\mathbf{V}(t)$ и с ускорением $\mathbf{W}$, а на втором - в систему координат, вращающуюся с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$.

Отметим, что при преобразовании к подвижным осям ускорение также преобразуется [12-13], что не принято во внимание при выводе уравнения (11), поэтому следует положить в правой части (11)

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \left[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}\right]$$

Опуская в уравнении (11) градиент потенциала внешнего поля и полагая $m = 1$, имеем

$$\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} = -\frac{d\mathbf{V}}{dt} - \left[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}\right] + \left[\tilde{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{\Omega}}\right] + 2\left[\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{\Omega}\right] + \left[\mathbf{\Omega} \times \left[\tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{\Omega}\right]\right] \qquad (12)$$

Сравнивая (10) и (12) находим, что для согласования этих уравнений достаточно будет определить систему координат так, чтобы выполнялись уравнения

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{r}} = -\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}} = -\dot{\mathbf{r}}, \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} = -\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}; \\ &\mathbf{\Omega} = -\mathbf{k}, \dot{\mathbf{\Omega}} = -\dot{\mathbf{k}} \end{aligned} \qquad (13)$$

Отображение (13), очевидно, описывает преобразование системы координат, связанное с выбором ориентации осей. Таким образом, мы доказали, что классическое движение в неинерциальной системе координат описывается в общей теории относительности в метрике (8).

Полученный выше результат об эквивалентности описания движения в неинерциальных системах отсчета в классической механике и в общей теории относительности позволяет моделировать любые силы механической природы, включая силы электродинамического происхождения и само электромагнитное поле как механическую систему [25]. Это также означает, что классическая механика является точной, а не приближенной моделью в общей теории относительности.

Наконец, заметим, что уравнение (2) для пустого пространства и при равной нулю космологической константе удовлетворяется автоматически, поскольку $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}=0$ в метрике (8).

Теория потенциала в неинерциальных системах отсчета

Максвелл [25] рассмотрел вопрос об изменении электродвижущей интенсивности в случае неинерциальной системы координат, скорость которой изменяется по закону (8). Максвелл пришел к выводу, что в случае замкнутых токов переход в неинерциальную систему координат не должен сказываться на электродинамических явлениях. С другой стороны, известно, например, что в неинерциальной системе координат наблюдается эффект возбуждения тока ускорением [33]

Среди оптических явлений в неинерциальных системах координат отметим опыт Саньяка [34], в котором наблюдается сдвиг полос в интерферометре, обусловленный вращением системы отсчета, и аналогичный ему эффект изменения пятна дифракции Френеля при периодическом изменении ускорения в системе маятника [35].

Для моделирования перечисленных явлений рассмотрим теорию потенциала в метрике (8). Волновое уравнение, описывающее скалярный потенциал в произвольной метрике имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Psi\right)=0 \qquad (14)$$

Вычисляя определитель метрического тензора метрики (8), находим $g=-1$. Метрический тензор и обратный ему тензор представим в виде

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1-u^2 & u_1 & u_2 & u_3\\ u_1 & -1 & 0 & 0\\ u_2 & 0 & -1 & 0\\ u_3 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\ g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & u_1 & u_2 & u_3\\ u_1 & u_1^{\ 2}-1 & u_1u_2 & u_1u_3\\ u_2 & u_1u_2 & u_2^{\ 2}-1 & u_2u_3\\ u_3 & u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^{\ 2}-1\end{pmatrix} \qquad (15)$$

Используя выражения (15), находим уравнение потенциала в неинерциальной системе координат в метрике (8)

$$\begin{gathered}\Psi_{tt}-(1-u_1^2)\Psi_{xx}-(1-u_2^2)\Psi_{yy}-(1-u_3^2)\Psi_{zz}+2u_1\Psi_{tx}+2u_2\Psi_{ty}+2u_3\Psi_{tz}+\\ +2u_1u_2\Psi_{xy}+2u_1u_3\Psi_{xz}+2u_2u_3\Psi_{yz}+(\partial_t u_1+u_2\partial_y u_1+u_3\partial_z u_1)\Psi_x+\\ (\partial_t u_2+u_1\partial_x u_2+u_3\partial_z u_2)\Psi_y+(\partial_t u_3+u_1\partial_x u_3+u_2\partial_y u_3)\Psi_z=0\end{gathered} \qquad (16)$$

Здесь компоненты скорости и ускорения вычисляются согласно первому уравнению (8) в виде

$$\begin{aligned}&u_1=\mathrm{v}_1(\mathrm{t})-k_3(t)y+k_2(t)z,\quad \partial_t u_1=\dot{\mathrm{v}}_1-\dot{k}_3y+\dot{k}_2z,\quad \partial_y u_1=-k_3,\quad \partial_z u_1=k_2,\\ &u_2=\mathrm{v}_2(\mathrm{t})+k_3(t)x-k_1(t)z,\quad \partial_t u_2=\dot{\mathrm{v}}_2+\dot{k}_3x-\dot{k}_1z,\quad \partial_x u_2=k_3,\quad \partial_z u_2=-k_1,\\ &u_3=\mathrm{v}_3(\mathrm{t})-k_2(t)x+k_1(t)y,\quad \partial_t u_3=\dot{\mathrm{v}}_3-\dot{k}_2x+\dot{k}_1y,\quad \partial_x u_3=-k_2,\quad \partial_y u_3=k_1\ .\end{aligned}$$

Уравнение (16) описывает многочисленные электродинамические и оптические эффекты, которые, можно наблюдать в неинерциальных системах отсчета. Часть этих эффектов зависит линейно от скорости и ускорения, чем объясняется, например, эффект Стюарта-Толмена [33], эффект Саньяка [34-35] и аберрация света звезд [36]. Другие эффекты зависят от квадрата скорости, но попытки зарегистрировать эти эффекты в известном эксперименте Майкельсона-Морли [37] не увенчались успехом. Это отчасти объясняется отсутствием на тот момент теории электродинамических и оптических явлений в неинерциальных системах отсчета. Рассмотрим вопросы моделирования указанных эффектов на основе уравнения (16).

Моделирование распространения волн в ускоренных и вращающихся системах отсчета

С целью исследования влияния ускорения на распространения волн были построены численные модели, описывающие процессы в длинных проводниках и в плоских системах. Запишем уравнение (16) в случае зависимости потенциала от одной пространственной переменной, имеем

$$\Psi_{tt} - (1 - u_1^2)\Psi_{xx} + 2u_1\Psi_{tx} + (\partial_t u_1)\Psi_x = 0 \tag{17}$$

Для уравнения (17) поставим следующую задачу:

$$\begin{gathered} \Psi(t,0) = 0, \quad \Psi(t,L) = -\Psi_0 \cos(\pi t), \quad \Psi(0,x) = -x\Psi_0 / L, \quad \Psi_t(0,x) = 0 \\ u_1(t) = g_1 t \end{gathered} \tag{18}$$

Задача (17)-(18) описывает возбуждение волн в одномерной системе длины L, к которой приложена разность потенциалов и переменное напряжение. Система движется с ускорением. На рис. 1 показано изменение потенциала в том случае, когда система покоится – верхний левый рисунок и когда движется с ускорением.

В неподвижной системе отсчета гребни волн в плоскости (t,x) представляют собой прямые линии, наклон которых характеризует скорость волн равную единице в выбранной системе единиц измерения. При движении с ускорением гребни волн деформируются, что указывает на увеличение или уменьшение скорости распространения волн в зависимости от знака ускорения. При значительном ускорении наблюдается полная остановка и поворот фронта волны, что свидетельствует о движении в обратную сторону – нижний правый рис. 1.

Такое поведение фронта волны объясняется тем, что в модели (17)-(18) возможным является переход через точку $u_1 = 1$, которая является особой в случае преобразований Лоренца, но не является особой в метрике (8) и в уравнении (17). Действительно, свойство гиперболичности уравнения (17) сохраняется даже при условии, что $u_1 > 1$ за счет наличия слагаемого со смешанной производной Ψ_{xt}. Можно обратить внимание, что фронт волны в равноускоренной системе отсчета движется по параболической траектории подобно тому, как движется массивная частица в однородном поле тяжести.

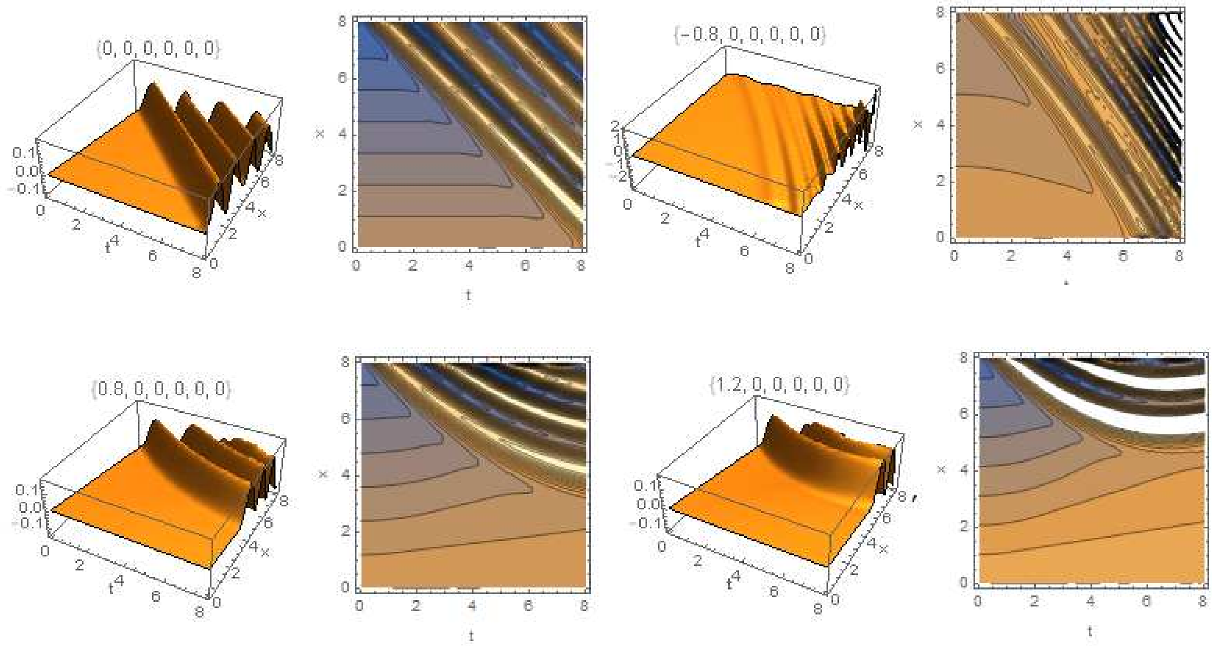

Рис. 1. Возбуждение волн в одномерной системе при движении с ускорением: величина параметра ускорения g_1 показана над трехмерным изображением волн в фигурных скобках в первой позиции.

В случае зависимости потенциала от двух пространственных переменных уравнение (16) приводится к виду

$$\begin{aligned}&\Psi_{tt} - (1-u_1^2)\Psi_{xx} - (1-u_2^2)\Psi_{yy} + 2u_1\Psi_{tx} + 2u_2\Psi_{ty} + 2u_1u_2\Psi_{xy} + \\ &+ (\partial_t u_1 + u_2\partial_y u_1)\Psi_x + (\partial_t u_2 + u_1\partial_x u_2)\Psi_y = 0\end{aligned} \quad (19)$$

Для уравнения (17) поставим следующую задачу:

$$
\begin{aligned}
&\Psi(0,x,y)=\exp(-x^2-y^2), \quad \Psi_t(0,x,y)=0,\\
&\Psi(t,-L,y)=\Psi(t,L,y), \quad \Psi(t,x,-L)=\Psi(t,x,L),\\
&u_1(t,y)=g_1t-yg_6t, \quad u_2(t,x)=g_2+xg_6t
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Модель (19)-(20) описывает возбуждение волн при распаде начального состояния в двумерной системе. В покоящейся системе в этом случае возникает цилиндрическая волна, фронт которой движется со скоростью равной единице в выбранной системе единиц измерения времени и длины – верхний рис. 2. В системе с ускорением фронт волны движется с разной скоростью в различных направлениях – нижний рис. 2. В этом случае также возможна полная остановка и разворот фронта волны – рис. 3.

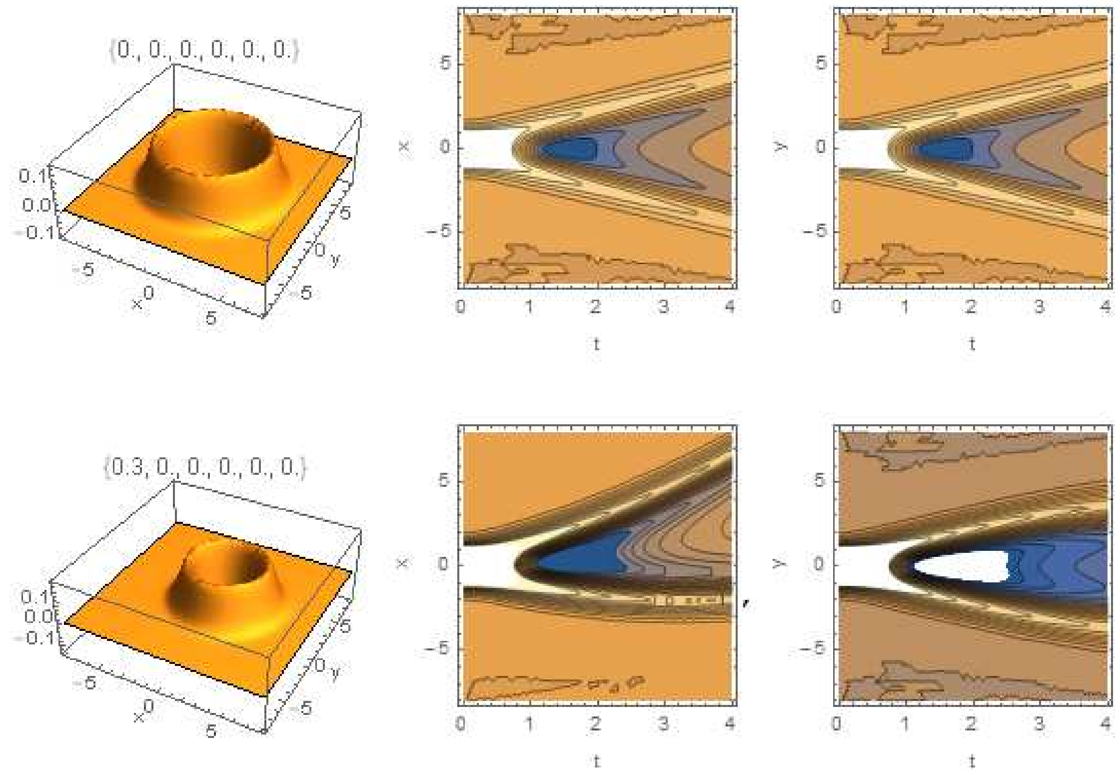

Рис. 2. Распад начального состояния в покоящейся двумерной системе (верхний ряд рисунков) и в системе, движущейся с ускорением (нижний ряд рисунков).

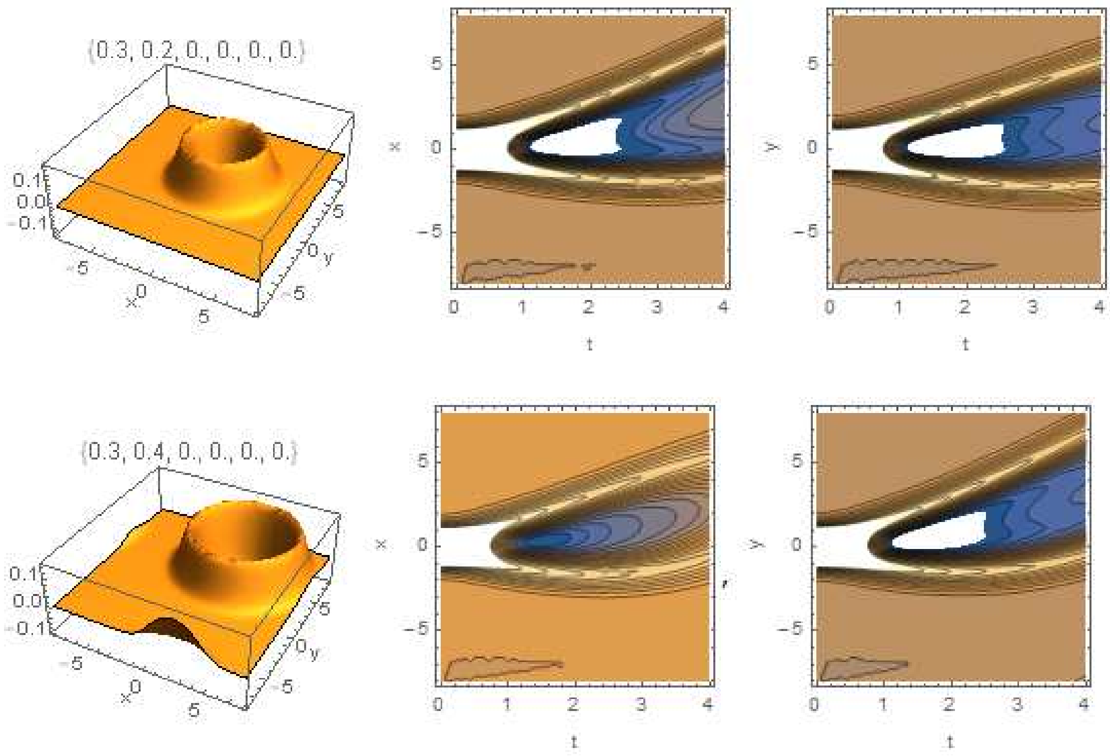

Рис. 3. Остановка и разворот фронта волны, возникающей при распаде начального состояния в двумерной системе: величины параметров ускорения g_1, g_2 показаны над трехмерным изображением волн в фигурных скобках в первой и во второй позиции.

В случае зависимости потенциала от трех пространственных переменных задача для уравнения (16) формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\Psi(0,x,y,z)=\exp(-x^2-y^2), \quad \Psi_t(0,x,y,z)=0,\\
&\Psi(t,-L,y,z)=\Psi(t,L,y,z), \quad \Psi(t,x,-L,z)=\Psi(t,x,L,z),\\
&\Psi(t,x,y,-L)=\Psi(t,x,y,L),\\
&u_1(t,y,z)=g_1t-yg_6t+zg_5t, \quad u_2(t,x,z)=g_2+xg_6t-zg_4t,\\
&u_3(t,x,y)=g_3-xg_5t+yg_4t,
\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, ускорение системы описывается в общем случае шестимерным вектором параметров $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$, величина которого нанесена на рис. 1-4.

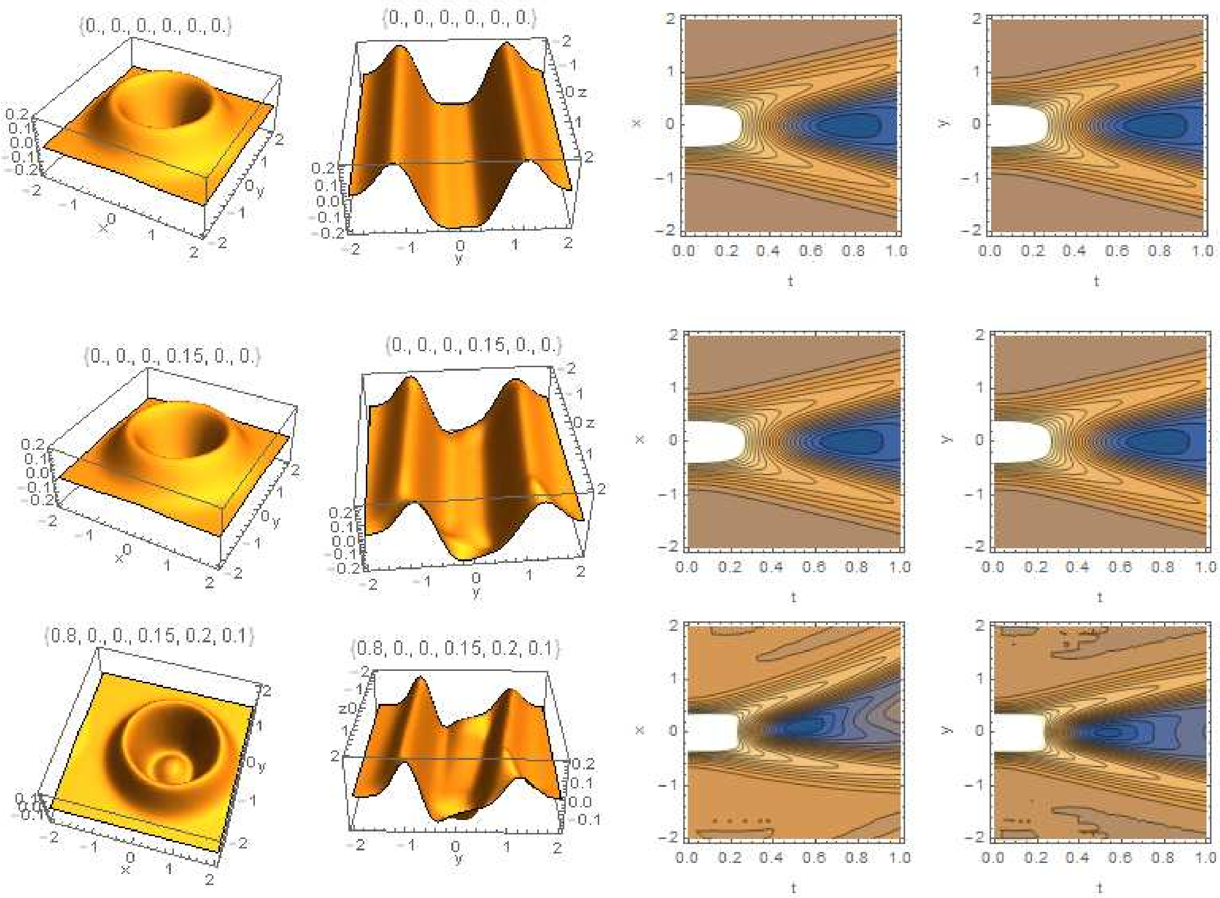

Рис. 4. Распад начального состояния в трехмерной системе, которая покоится (верхний ряд рисунков) и в системе с ускорением (второй и третий ряды рисунков): величины параметров ускорения $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$ показаны над трехмерным изображением волн в фигурных скобках

Трехмерная численная модель, построенная на основе уравнения (16) с граничными и начальными условиями (21) позволяет определить влияние вращения на волновые процессы при распаде начального состояния – рис. 4.

Вращение системы приводит к нарушению симметрии волнового фронта – верхние графики на рис. 4, а вращение в совокупности с продольным ускорением ведет и к нарушению симметрии, и к изменению локальной скорости волн – нижние графики на рис. 4.

Отметим, что в системах с ускорением наблюдается снос всей совокупности волн, возникающих при распаде начального состояния, так, как если бы совокупность волн являлась материальной частицей – рис. 3-4. Это означает, что при движении в неинерциальной системе координат волны и частицы увлекаются сходным образом.

Теорема сложения скоростей

Полученные результаты показывают, что скорость фронта волны в неинерциальной системе отсчета может изменяться, как во времени, так и в пространстве в зависимости от ускорения системы. Такое поведение скорости волн не находится в противоречии со специальной теорией относительности, в которой предполагается постоянство скорости света в инерциальных системах отсчета [15].

Отсюда можно было бы сделать вывод о существовании привилегированной системы отсчета, в которой скорость света является мировой константой. Известно, что Эйнштейн отказался от этой идеи, заменив инерциальные системы координат с их жесткими масштабами времени и длины более общими деформируемыми системами координат - [1], с. 580.

Далее заметим, что метрика (8) построена в соответствии с правилом сложения скоростей в классической механике [12-14], что противоречит теореме сложения скоростей в релятивистской механике, которую доказал

Эйнштейн [15], используя гипотезу постоянства скорости света в инерциальных системах отсчета.

Возникает вопрос о справедливости теоремы сложения скоростей и гипотезы о постоянстве скорости света в общем случае. Ответ на этот вопрос зависит от физики явления. Если свет это волновое явление и к нему применимо описание в рамках волновой теории, то из вида волнового уравнения (16), записанного в неинерциальной системе координат, следует, что скорость распространения фронта волны зависит от ускорения системы отсчета – рис. 1-4. В таком случае можно утверждать, что в неинерциальных системах отсчета скорость света не может быть постоянной [5].

Заметим, что известное на сегодняшний день значение скорости света является единицей измерения в системе СИ. Полагая, что $c=1$, приходим к такой форме физических уравнений, в которой уже не содержится скорость света. Существует особый случай плоской геометрии пространства-времени, автоморфизмы которой составляют группу Лоренца [5]. Это означает, что существует такая метрика, в которой интервал принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (22)$$

Отметим, что при формулировке специальной теории относительности Эйнштейн [15] опиралась не на эксперимент Майкельсона-Морли [37] и не на гипотезу Фитцджеральда и Лоренца о сокращении продольных размеров [38-39], а на принцип относительности и гипотезу о постоянстве скорости света в инерциальных системах отсчета. Как известно, эти два принципа широко используются в современной квантовой теории и в физике элементарных частиц [26-32].

С точки зрения общей теории относительности метрика (22) описывает пустое пространство, не содержащее никаких гравитационных полей. Известно, что в метрике (22) теория Максвелла и уравнения стандартной модели получают особенно простое выражение [2-9, 26-32]. Отметим также, что вопрос о происхождении квантовой механики и электродинамики в общей теории относительности не может быть решен в метрике (22). Соответствующие метрики, полученные при решении уравнений Эйнштейна и Янга-Миллса, указаны, например, в работах [16-18, 24].

С другой стороны, предположим, что справедлив классический закон сложения скоростей

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(t) + [\mathbf{k}(t) \times \mathbf{r}] \tag{23}$$

С точки зрения общей теории относительности закон (23) означает, что существует метрика вида (8), в которой выполняется теорема Кориолиса (1). В справедливости теоремы (1) вряд ли можно усомниться, поскольку она имеет самое широкое прикладное значение в механике. Полученный выше результат об эквивалентности описания движения в неинерциальных системах отсчета в классической механике и в общей теории относительности позволяет моделировать любые силы механической природы, включая силы электродинамического происхождения.

Отметим, что выражение интервала (8) является более общим, чем выражение (22), поскольку содержит (22) как частный случай, реализующийся при условии, что скорость движения системы отсчета является постоянной. В этом случае геометрия плоского пространства, наделенного метрикой (22) становится геометрией автоморфизмов группы Лоренца [5].

И так, мы показали, что теоремы сложения скоростей в классической и релятивистской механике выражают частные случаи описания движения в специальных системах координат. Следовательно, метрики (8) и (22) представляют частные случаи общего закона, который гласит, что тензор g_{ik}

«определяет метрические свойства пространства, движение тел по инерции в нем, а также и действие гравитации» - [1] , с. 613.

Поскольку метрика (8) ускоренной и вращающейся системы отсчета в общей теории относительности описывает плоские пространства, полученные результаты означают, что для осуществления сверхбыстрого движения в общей теории относительности не требуется создавать искривление пространства-времени, как это предполагалось в работе [40] и других. Такое движение могло бы осуществляться и в плоской метрике при наличии постоянного ускорения. Полученное нами в работах [24, 41] ограничение на скорость движения массивных тел, обусловлено неустойчивостью метрики расширяющейся Вселенной, что ведет к развитию геометрической турбулентности [24, 41-42].

Наконец, заметим, что вопрос о метрике ускоренной и вращающейся системы отсчета является предметом многочисленных исследований, которые нашли свое отражение в работах [1-11] и других. В настоящей работе установлено, что уравнение (10), описывающее движения пробных частиц в ускоренных и вращающихся системах отсчета в общей теории относительности, равносильно уравнению (12), описывающему движение частиц в неинерциальных системах координат в классической механике. Это означает, что классическая механика является точной, а не приближенной моделью в общей теории относительности, поскольку метрика (8) является точным решением уравнений Эйнштейна при любой величине скорости неинерциальной системы координат.

В этой связи мы рассмотрели теорию потенциала в неинерциальных системах отсчета. Выведено волновое уравнение (16), описывающее распространение волн в ускоренных и вращающихся системах координат в общей теории относительности. Путем численных экспериментов установлено, что скорость распространения волнового фронта в неинерциальных системах отсчета может изменяться в широких пределах в зависимости от ускорения системы.

Библиографический список

1. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 1. - Москва, «Наука», с. 613, 1965.
2. Мак-Витти Г.К. Общая теория относительности и космология. – М., ИЛ, 1961.
3. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения (2-е изд.). – М.: ГИФМЛ, 1961.
4. Синг Дж. Л. Общая теория относительности. – М., ИЛ, 1963.
5. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. – М., Наука, 1966.
6. Weinberg Steven. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.
7. Меллер К. Теория относительности. – М., Атомиздат, 1975, 400 с.
8. Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация. Том 1. – М., «Мир», 1977.
9. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.2. Теория поля. – 7 изд. – М.: Наука. - 1988; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon, New York, second edition, 1962.
10. Подосенов С. А.. Пространство, время и классические поля связанных структур. М.: Компания Спутник +, 2000, 445 с.
11. Трунев А.П. О представлении решений уравнений Навье-Стокса в общей теории относительности // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №04(098). С. 1566 – 1587.
12. Леви-Чевита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т. 1. Ч. 1. – Москва-Ленинград, ОНТИ, 1935.
13. Айзерман М.А. Классическая механика. – М., Наука, 1980.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.1 Механика. -4 изд. – М., Наука, 1988.
15. Einstein A. Zur Elektrodynamik der bewegter Korper// Ann. Phys., 1905, 17, 891—921.
16. Shifflett J. A. A modification of Einstein-Schrodinger theory that contains Einstein-Maxwell-Yang-Mills theory// Gen.Rel.Grav.41:1865-1886, 2009.
17. Fabio Grangeiro Rodrigues, Roldao da Rocha, Waldyr A. Rodrigues Jr. The Maxwell and Navier-Stokes that Follow from Einstein Equation in a Spacetime Containing a Killing Vector Field// AIP Conference Proceedings, v. 1483, 277-295, 2012.
18. Krivonosov L.N., Luk’aynov V.A. The relationship between the Yang-Mills and Einstein and Maxwell Equations// J. SibFU, Math. and Phys, 2(2009), no. 4, 432–448 (in Russian).
19. Sayantani Bhattacharyya et all. Conformal Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity in Arbitrary Dimensions// arXiv: 0809.4272v2, 3 Dec, 2008.
20. Sayantani Bhattacharyya et all. The Incompressible Non-Relativistic Navier-Stokes Equation from Gravity // arXiv: 0810.1545v3, 20 Jul, 2009.

21. Hubeny V.E. The Fluid/Gravity Correspondence: a new perspective on the Membrane Paradigm// arXiv:1011.4948v2, February 22, 2011.

22. Allan Adams, Paul M. Chesler, and Hong Liu. Holographic turbulence//arXiv:1307.7267v1 [hep-th] 27 Jul 2013.

23. Ricardo Gallego Torrome´. On the emergence of quantum mechanics, diffeomorphism invariance and the weak equivalence principle from deterministic Cartan-Randers systems// arXiv:1402.5070v1 [math-ph] 20 Feb 2014.

24. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность и квантовая теория. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 с.

25. Maxwell J. C. Treatise on Electricity and magnetism, (600, 601), 1873.

26. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. IV/В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Квантовая электродинамика. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, Гл. Ред. Физ.-мат. Лит., 1989, - 728 с.

27. Salam A., Ward J.C. // Nuovo Cimento, XI, 568, 1959; Nuovo Cimento, XIX, 165, 1961.

28. Weinberg S. // Phys. Rev. Lett. 19, 1264, 1967; Phys. Rev. Lett. 28, 1968, 1972; Phys. Rev. D7, 2887, 1973; Nucl. Phys. B363, 3, 1991.

29. Квантовая теория калибровочных полей/ под ред. Н.П. Коноплевой – М., Мир, 1977.

30. Славнов А.А., Фадеев Л.Д.. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. – М.: Наука, 1978.

31. Langacker P. Structure of the Standard Model// arxiv: hep-ph/0304186v 1, 2003.

32. Teubner T. The Standard Model. – Oxford, 2009.

33. Tolman R.C., Stewart T.D. The electromotive force produced by the acceleration of metals// Physical Review 8 (2): 97–116, 1916.

34. Sagnac Georges. L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme//Comptes Rendus 157: 708–710, 1913; Sur la preuve de la réalité de l'éther lumineux par l'expérience de l'interférographe tournant// Comptes Rendus 157: 1410–1413,1913.

35. Трунев А.П. О взаимодействии света и частиц с гравитационными волнами // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №04(098). С. 1511 – 1547.

36. Bradley James. New Discovered Motion of the Fix'd Stars// Philosophical Transactions, 1727-1728, 35.

37. Michelson A. A., Morley E. W. On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether // Amer. J. Sci., 1887 (3), 34, 333.

38. FitzGerald G.F. The Ether and the Earth's atmosphere// Science 13 (328), 1889.

39. Lorentz H.A. De relatieve beweging van de aarde en den aether (The Relative Motion of the Earth and the Aether)// Amsterdam, Zittingsverlag Akad., v. Wet., 1, p.74.

40. Alcubierre M. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity//Class.Quant.Grav. 11, L73 (1994), gr-qc/0009013.

41. Трунев А.П. Скорость гравитации и сверхбыстрое движение в общей теории относительности// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №06(100).

42. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №05(099). С. 1566 – 1587. – IDA [article ID]: 0981404111. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/111.pdf

References

1. Jejnshtejn A. Sobranie nauchnyh trudov. T. 1. - Moskva, «Nauka», s. 613, 1965.
2. Mak-Vitti G.K. Obshhaja teorija otnositel'nosti i kosmologija. – M., IL, 1961.
3. Fok V.A. Teorija prostranstva, vremeni i tjagotenija (2-e izd.). – M.: GIFML, 1961.
4. Sing Dzh. L. Obshhaja teorija otnositel'nosti. – M., IL, 1963.
5. Petrov A.Z. Novye metody v obshhej teorii otnositel'nosti. – M., Nauka, 1966.
6. Weinberg Steven. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.
7. Meller K. Teorija otnositel'nosti. – M., Atomizdat, 1975, 400 s.
8. Mizner Ch., Torn K., Uiller Dzh. Gravitacija. Tom 1. – M., «Mir», 1977.
9. Landau L. D, Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika. T.2. Teorija polja. – 7 izd. – M.: Nauka. - 1988; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon, New York, second edition, 1962.
10. Podosenov S. A.. Prostranstvo, vremja i klassicheskie polja svjazannyh struktur. M.: Kompanija Sputnik +, 2000, 445 s.
11. Trunev A.P. O predstavlenii reshenij uravnenij Nav'e-Stoksa v obshhej teorii otnositel'nosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №04(098). S. 1566 – 1587.
12. Levi-Chevita T., Amal'di U. Kurs teoreticheskoj mehaniki. T. 1. Ch. 1. – Moskva-Leningrad, ONTI, 1935.
13. Ajzerman M.A. Klassicheskaja mehanika. – M., Nauka, 1980.
14. Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaja fizika. T.1 Mehanika. -4 izd. – M., Nauka, 1988.
15. Einstein A. Zur Elektrodynamik der bewegter Korper// Ann. Phys., 1905, 17, 891—921.
16. Shifflett J. A. A modification of Einstein-Schrodinger theory that contains Einstein-Maxwell-Yang-Mills theory// Gen.Rel.Grav.41:1865-1886, 2009.
17. Fabio Grangeiro Rodrigues, Roldao da Rocha, Waldyr A. Rodrigues Jr. The Maxwell and Navier-Stokes that Follow from Einstein Equation in a Spacetime Containing a Killing Vector Field// AIP Conference Proceedings, v. 1483, 277-295, 2012.
18. Krivonosov L.N., Luk’aynov V.A. The relationship between the Yang-Mills and Einstein and Maxwell Equations// J. SibFU, Math. and Phys, 2(2009), no. 4, 432–448 (in Russian).
19. Sayantani Bhattacharyya et all. Conformal Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity in Arbitrary Dimensions// arXiv: 0809.4272v2, 3 Dec, 2008.
20. Sayantani Bhattacharyya et all. The Incompressible Non-Relativistic Navier-Stokes Equation from Gravity // arXiv: 0810.1545v3, 20 Jul, 2009.
21. Hubeny V.E. The Fluid/Gravity Correspondence: a new perspective on the Membrane Paradigm// arXiv:1011.4948v2, February 22, 2011.

22. Allan Adams, Paul M. Chesler, and Hong Liu. Holographic turbulence//arXiv:1307.7267v1 [hep-th] 27 Jul 2013.

23. Ricardo Gallego Torrome´. On the emergence of quantum mechanics, diffeomorphism invariance and the weak equivalence principle from deterministic Cartan-Randers systems// arXiv:1402.5070v1 [math-ph] 20 Feb 2014.

24. Trunev A.P. Geometricheskaja turbulentnost' i kvantovaja teorija. – Palmarium Academic Publishing, ISBN 978-3-639-72485-1, 2015, 232 s.

25. Maxwell J. C. Treatise on Electricity and magnetism, (600, 601), 1873.

26. Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaja fizika: Uchebnoe posobie. V 10 t. T. IV/V.B. Beresteckij, E.M. Lifshic, L.P. Pitaevskij. Kvantovaja jelektrodinamika. – 3-e izd., ispr. – M.: Nauka, Gl. Red. Fiz.-mat. Lit., 1989, - 728 s.

27. Salam A., Ward J.C. // Nuovo Cimento, XI, 568, 1959; Nuovo Cimento, XIX, 165, 1961.

28. Weinberg S. // Phys. Rev. Lett. 19, 1264, 1967; Phys. Rev. Lett. 28, 1968, 1972; Phys. Rev. D7, 2887, 1973; Nucl. Phys. B363, 3, 1991.

29. Kvantovaja teorija kalibrovochnyh polej/ pod red. N.P. Konoplevoj – M., Mir, 1977.

30. Slavnov A.A., Fadeev L.D.. Vvedenie v kvantovuju teoriju kalibrovochnyh polej. – M.: Nauka, 1978.

31. Langacker P. Structure of the Standard Model// arxiv: hep-ph/0304186v 1, 2003.

32. Teubner T. The Standard Model. – Oxford, 2009.

33. Tolman R.C., Stewart T.D. The electromotive force produced by the acceleration of metals// Physical Review 8 (2): 97–116, 1916.

34. Sagnac Georges. L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme//Comptes Rendus 157: 708–710, 1913; Sur la preuve de la réalité de l'éther lumineux par l'expérience de l'interférographe tournant// Comptes Rendus 157: 1410–1413,1913.

35. Trunev A.P. O vzaimodejstvii sveta i chastic s gravitacionnymi volnami // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №04(098). S. 1511 – 1547.

36. Bradley James. New Discovered Motion of the Fix'd Stars// Philosophical Transactions, 1727-1728, 35.

37. Michelson A. A., Mogley E. W. On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether // Amer. J. Sci., 1887 (3), 34, 333.

38. FitzGerald G.F. The Ether and the Earth's atmosphere// Science 13 (328), 1889.

39. Lorentz H.A. De relatieve beweging van de aarde en den aether (The Relative Motion of the Earth and the Aether)// Amsterdam, Zittingsverlag Akad., v. Wet., 1, p.74.

40. Alcubierre M. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity//Class.Quant.Grav. 11, L73 (1994), gr-qc/0009013.

41. Trunev A.P. Skorost' gravitacii i sverhbystroe dvizhenie v obshhej teorii otnositel'nosti// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №06(100).

42. Trunev A.P. Geometricheskaja turbulentnost'// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №05(099). S. 1566 – 1587. – IDA [article ID]: 0981404111. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/111.pdf