УДК 664.727

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА ДАВЛЕНИЯ В ПРОЦЕССАХ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА С ТВЕРДОЙ ФАЗОЙ ПРИ СУШКЕ

Подгорный Сергей Александрович
к.т.н

Косачев Вячеслав Степанович
д.т.н., профессор

Кошевой Евгений Пантелеевич
д.т.н., профессор
Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия

В статье рассмотрены вопросы математического описания эффекта давления в процессах тепломассопереноса с твердой фазой при сушке

Ключевые слова: ПОТЕНЦИАЛЫ ПЕРЕНОСА, МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС

UDC 664.727

STUDYING THE EFFECT OF PRESSURE IN THE PROCESSES OF HEAT MASS TRANSFER AT SOLID PHASE DURING DRYING

Podgornyy Sergey Alexandrovich
Cand.Tech.Sci.

Kosachev Vyacheslav Stepanovich
Dr.Sci.Tech., professor

Koshevoy Evgeniy Panteleevich
Dr.Sci.Tech., professor
Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

The article studies the issues of mathematical description of pressure effect in the processes of heat mass transfer with a solid phase during drying

Keywords: TRANSFER POTENTIALS, FINITE ELEMENTS METHOD, MATHEMATICAL MODELING, HEAT MASS TRANSFER

Теория тепло-массопереноса [1] создана на базе термодинамики необратимых процессов и позволяет изучать переноса энергии (тепла), массы вещества и давления. Интенсивный и быстрый процесс сушки приводит к росту давления в капиллярно-пористых телах, при этом градиент давления в пределах пористой структуры твердого тела становится важным и должен быть включен в формулировку системы уравнений тепло-массопереноса Лыкова [2—5]. В технологии сушки важным является развитие поля давления, что в ряде случаев оказывает определяющее влияние на качество высушиваемого материала. Рассмотрим систему уравнений Лыкова-Михайлова [1] переноса температуры, влаги и давления к капиллярно – пористой среде:

$$\frac{d}{d\tau}t(x,\tau) = a_q\cdot\frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau) + \varepsilon\cdot r\cdot\frac{c_m}{c_q}\cdot\frac{d}{d\tau}\theta(x,\tau)$$

$$\frac{d}{d\tau}\theta(x,\tau) = a_m\cdot\frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau) + a_m\cdot\delta_\theta\cdot\frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau) + a_m\cdot\delta_p\cdot\frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)$$

$$\frac{d}{d\tau}p(x,\tau) = a_p\cdot\frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau) - \varepsilon\cdot\frac{c_m}{c_q}\cdot\frac{d}{d\tau}\theta(x,\tau)$$

Где t, θ, p – соответственно потенциалы переноса тепла, массы и давления; a_p – коэффициент потенциалопроводности фильтрационного движения парогазовой смеси $a_p=k/c_b\gamma$; k- коэффициент воздухопроницаемости; c_b – коэффициент характеризует емкость капиллярно-пористого тела по

тношению к влажному воздуху в процессе молярного движения парогазовой смеси; γ - плотность тела; ε - коэффициент фазового превращения; r – удельная теплота испарения; δ - термоградиентный коэффициент.
Тепловые характеристики a и c отмечены индексом q ($a_q \equiv a$, $c_q \equiv c$).
Влажностные характеристики a и c отмечены индексом m ($a_m \equiv a$, $c_m \equiv c$).
Удачное решение системы уравнений предложено [6] путем переформулировки уравнений Лыкова-Михайлова, с введением дополнительных параметров, регулирующих градиенты давления, влажности и температуры. В данной работе изложена проверка соответствия этих модифицированных уравнений фундаментальным соотношениям Ларса Онзагера [1], основанным на многокомпонентной задаче переноса потенциалов неравновесной термодинамики с одной стороны и определении связи параметров уравнений Лыкова-Михайлова с параметрами, предложенными в статье [6]. Полученная уточненная система уравнений использовалась для сравнительной оценки процесса сушки капиллярно-пористого тела в обычных условиях и в вакууме.
Приведем эту систему уравнений к каноническому виду относительно производных по времени, заменяя их в правой части уравнений.
Сначала заменим производную в первом уравнении. Затем объединим производные температуры по координате в результате первое уравнение системы уравнений Лыкова-Михайлова примет вид:

$$\frac{d}{d\tau}t(x,\tau) = \frac{\left(a_q \cdot c_q + a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_\theta\right)}{c_q} \cdot \frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau) + \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q} \cdot \frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau) + \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q} \cdot \frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)$$

Выразим производную по времени в третьем уравнении системы уравнений Лыкова-Михайлова.
Объединим производные давления по координате в результате третье уравнение системы уравнений Лыкова-Михайлова примет вид:

$$\frac{d}{d\tau}p(x,\tau) = -\frac{a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon \cdot \delta_\theta}{c_q} \cdot \frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau) - \frac{a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon}{c_q} \cdot \frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau) + \frac{\left(a_p \cdot c_q - a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon \cdot \delta_p\right)}{c_q} \cdot \frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)$$

Таким образом, система уравнений Лыкова-Михайлова в матричном виде принимает вид:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{d}{d\tau}t(x,\tau)\\ \frac{d}{d\tau}\theta(x,\tau)\\ \frac{d}{d\tau}p(x,\tau)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\left(a_q\cdot c_q+a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta\right)}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q}\\ a_m\cdot\delta_\theta & a_m & a_m\cdot\delta_p\\ -\frac{a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta}{c_q} & -\frac{a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{\left(a_p\cdot c_q-a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_p\right)}{c_q}\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau)\\ \frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau)\\ \frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)\end{pmatrix}$$

Согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов, послужившему основой феноменологической термодинамики неравновесных процессов Ларса Онзагера, матрица в правой части уравнения должна быть симметричной. Для этого вводим произвольные множители, преобразующие матрицу коэффициентов переноса системы уравнений Лыкова-Михайлова к Онзагеровскому виду, упрощая и приводя подобные:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&C_\theta&0\\0&0&C_p\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{\left(a_q\cdot c_q+a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta\right)}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q}\\ a_m\cdot\delta_\theta & a_m & a_m\cdot\delta_p\\ -\frac{a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta}{c_q} & -\frac{a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{\left(a_p\cdot c_q-a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_p\right)}{c_q}\end{bmatrix}\ \text{simplify}\ \rightarrow\begin{bmatrix}a_q+\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q}\\ a_m\cdot C_\theta\cdot\delta_\theta & a_m\cdot C_\theta & a_m\cdot\delta_p\cdot C_\theta\\ -\frac{C_p\cdot a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta}{c_q} & -\frac{C_p\cdot a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{C_p\cdot\left(a_p\cdot c_q-a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_p\right)}{c_q}\end{bmatrix}$$

Определяем первый множитель (C_θ) из условия симметрии:

$$\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q}=a_m\cdot C_\theta\cdot\delta_\theta\ \text{solve}, C_\theta\ \rightarrow\frac{c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\delta_\theta}$$

Подставляем это множитель в матрицу коэффициентов переноса:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\delta_\theta}&0\\0&0&C_p\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{\left(a_q\cdot c_q+a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta\right)}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q}\\ a_m\cdot\delta_\theta & a_m & a_m\cdot\delta_p\\ -\frac{a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta}{c_q} & -\frac{a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{\left(a_p\cdot c_q-a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_p\right)}{c_q}\end{bmatrix}\ \text{simplify}\ \rightarrow\begin{bmatrix}a_q+\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q}\\ \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\delta_\theta} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q\cdot\delta_\theta}\\ -\frac{C_p\cdot a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta}{c_q} & -\frac{C_p\cdot a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{C_p\cdot\left(a_p\cdot c_q-a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_p\right)}{c_q}\end{bmatrix}$$

Определяем второй множитель (C_p) из условия симметрии:

$$\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q\cdot\delta_\theta}=-\frac{C_p\cdot a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon}{c_q}\ \text{solve}, C_p\ \rightarrow-\frac{r\cdot\delta_p}{\delta_\theta}$$

Подставляем этот множитель в матрицу коэффициентов переноса:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\delta_\theta}&0\\0&0&-\frac{r\cdot\delta_p}{\delta_\theta}\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{\left(a_q\cdot c_q+a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta\right)}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q}\\ a_m\cdot\delta_\theta & a_m & a_m\cdot\delta_p\\ -\frac{a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta}{c_q} & -\frac{a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{\left(a_p\cdot c_q-a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_p\right)}{c_q}\end{bmatrix}\ \text{simplify}\ \rightarrow\begin{bmatrix}a_q+\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q}\\ \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\delta_\theta} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q\cdot\delta_\theta}\\ \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q} & \frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q\cdot\delta_\theta} & -\frac{r\cdot\delta_p\cdot\left(a_p\cdot c_q-a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_p\right)}{c_q\cdot\delta_\theta}\end{bmatrix}$$

Проверяем полученную матрицу на симметричность:

$$\begin{bmatrix} a_q + \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_\theta}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q} \\ \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q \cdot \delta_\theta} \\ \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q \cdot \delta_\theta} & -\frac{r \cdot \delta_p \cdot (a_p \cdot c_q - a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon \cdot \delta_p)}{c_q \cdot \delta_\theta} \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} a_q + \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_\theta}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q} \\ \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q \cdot \delta_\theta} \\ \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q \cdot \delta_\theta} & -\frac{r \cdot \delta_p \cdot (a_p \cdot c_q - a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon \cdot \delta_p)}{c_q \cdot \delta_\theta} \end{bmatrix} \text{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, при умножении левой и правой части системы уравнений Лыкова-Михайлова в матричном виде на Онзагеровские множители:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r \cdot \delta_p}{\delta_\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{d\tau} t(x,\tau) \\ \frac{d}{d\tau} \theta(x,\tau) \\ \frac{d}{d\tau} p(x,\tau) \end{pmatrix} \text{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{d\tau} t(x,\tau) \\ \frac{c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \frac{d}{d\tau} \theta(x,\tau)}{c_q \cdot \delta_\theta} \\ -\frac{r \cdot \delta_p \cdot \frac{d}{d\tau} p(x,\tau)}{\delta_\theta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r \cdot \delta_p}{\delta_\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{(a_q \cdot c_q + a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_\theta)}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q} \\ a_m \cdot \delta_\theta & a_m & a_m \cdot \delta_p \\ -\frac{a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon \cdot \delta_\theta}{c_q} & -\frac{a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon}{c_q} & \frac{(a_p \cdot c_q - a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon \cdot \delta_p)}{c_q} \end{bmatrix} \text{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} a_q + \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_\theta}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q} \\ \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q \cdot \delta_\theta} \\ \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q} & \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q \cdot \delta_\theta} & -\frac{r \cdot \delta_p \cdot (a_p \cdot c_q - a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon \cdot \delta_p)}{c_q \cdot \delta_\theta} \end{bmatrix}$$

Получаем систему уравнений удобную для решения задачи переноса трех компонентов в рамках термодинамики неравновесных процессов

$$\frac{d}{d\tau} t(x,\tau) = \left(a_q + \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_\theta}{c_q} \right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} t(x,\tau) + \left(\frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q} \right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} \theta(x,\tau) + \left(\frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q} \right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} p(x,\tau)$$

$$\left(\frac{c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta} \right) \cdot \frac{d}{d\tau} \theta(x,\tau) = \left(\frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q} \right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} t(x,\tau) + \left(\frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta} \right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} \theta(x,\tau) + \left(\frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q \cdot \delta_\theta} \right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} p(x,\tau)$$

$$\left(-\frac{r \cdot \delta_p}{\delta_\theta} \right) \cdot \frac{d}{d\tau} p(x,\tau) = \left(\frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q} \right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} t(x,\tau) + \left(\frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q \cdot \delta_\theta} \right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} \theta(x,\tau) - \left[\frac{r \cdot \delta_p \cdot (a_p \cdot c_q - a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon \cdot \delta_p)}{c_q \cdot \delta_\theta} \right] \cdot \frac{d^2}{dx^2} p(x,\tau)$$

Аналогичная система уравнений для численного решения этой задачи была представлена в виде:

$$\left(\frac{\rho_o \cdot c_q \cdot \delta}{c_m} \right) \cdot \frac{d}{d\tau} t(x,\tau) = \left[(k_q + \varepsilon \cdot \lambda \cdot k_m) \cdot \frac{\delta}{c_m} \right] \cdot \frac{d^2}{dx^2} t(x,\tau) + \left(\varepsilon \cdot \lambda \cdot k_m \cdot \frac{\delta}{c_m} \right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} \theta(x,\tau) + \left(\varepsilon \cdot \lambda \cdot k_p \cdot \frac{\delta}{c_m} \right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} p(x,\tau)$$

$$(\varepsilon \cdot \lambda \cdot \rho_o \cdot c_m) \cdot \frac{d}{d\tau} \theta(x,\tau) = \left(\varepsilon \cdot \lambda \cdot k_m \cdot \frac{\delta}{c_m} \right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} t(x,\tau) + (\varepsilon \cdot \lambda \cdot k_m) \cdot \frac{d^2}{dx^2} \theta(x,\tau) + (\varepsilon \cdot \lambda \cdot k_p) \cdot \frac{d^2}{dx^2} p(x,\tau)$$

$$\left(-\frac{\lambda \cdot \rho_o \cdot c_p \cdot k_p}{k_m} \right) \cdot \frac{d}{d\tau} p(x,\tau) = \left(\varepsilon \cdot \lambda \cdot k_p \cdot \frac{\delta}{c_m} \right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} t(x,\tau) + (\varepsilon \cdot \lambda \cdot k_p) \cdot \frac{d^2}{dx^2} \theta(x,\tau) - \left[\lambda \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \frac{k_p^2}{k_m} \right] \cdot \frac{d^2}{dx^2} p(x,\tau)$$

Нивелируя эту систему уравнений относительно производной температуры по времени:

$$\frac{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)\cdot\frac{d}{d\tau}t(x,\tau)}{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)}=\frac{\left[\left(k_q+\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_m\right)\cdot\frac{\delta}{c_m}\right]\cdot\frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau)}{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)}+\frac{\left(\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_m\cdot\frac{\delta}{c_m}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau)}{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)}+\frac{\left(\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_p\cdot\frac{\delta}{c_m}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)}{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)}$$

$$\frac{\left(\varepsilon\cdot\lambda\cdot\rho_o\cdot c_m\right)\cdot\frac{d}{d\tau}\theta(x,\tau)}{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)}=\frac{\left(\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_m\cdot\frac{\delta}{c_m}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau)}{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)}+\frac{\left(\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_m\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau)}{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)}+\frac{\left(\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_p\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)}{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)}$$

$$\frac{\left(-\frac{\lambda\cdot\rho_o\cdot c_p\cdot k_p}{k_m}\right)\cdot\frac{d}{d\tau}p(x,\tau)}{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)}=\frac{\left(\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_p\cdot\frac{\delta}{c_m}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau)}{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)}+\frac{\left(\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_p\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau)}{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)}-\frac{\left[\lambda\cdot\left(1-\varepsilon\right)\cdot\frac{k_p^{\,2}}{k_m}\right]\cdot\frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)}{\left(\frac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}\right)}$$

Получаем аналог системы уравнений переноса Лыкова – Михайлова:

$$\frac{d}{d\tau}t(x,\tau)=\left[\frac{\left(k_q+\lambda\cdot k_m\cdot\varepsilon\right)}{c_q\cdot\rho_o}\right]\cdot\frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau)+\left(\frac{\lambda\cdot k_p\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\rho_o}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau)+\left(\frac{\lambda\cdot k_m\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\rho_o}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)$$

$$\left(\frac{\lambda\cdot c_m^{\,2}\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\delta}\right)\cdot\frac{d}{d\tau}\theta(x,\tau)=\left(\frac{\lambda\cdot k_m\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\rho_o}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau)+\left(\frac{\lambda\cdot c_m\cdot k_p\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\delta\cdot\rho_o}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau)+\left(\frac{\lambda\cdot c_m\cdot k_m\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\delta\cdot\rho_o}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)$$

$$\left(-\frac{\lambda\cdot c_m\cdot c_p\cdot k_p}{c_q\cdot k_m\cdot\delta}\right)\cdot\frac{d}{d\tau}p(x,\tau)=\left(\frac{\lambda\cdot k_p\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\rho_o}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau)+\left(\frac{\lambda\cdot c_m\cdot k_p\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\delta\cdot\rho_o}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau)+\left[\frac{\lambda\cdot c_m\cdot k_p^{\,2}\cdot\left(\varepsilon-1\right)}{c_q\cdot k_m\cdot\delta\cdot\rho_o}\right]\cdot\frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)$$

Сравнивая её с полученной нами системой уравнений:

$$\frac{d}{d\tau}t(x,\tau)=\left(a_q+\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_\theta}{c_q}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau)+\left(\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau)+\left(\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)$$

$$\left(\frac{c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\delta_\theta}\right)\cdot\frac{d}{d\tau}\theta(x,\tau)=\left(\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau)+\left(\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\delta_\theta}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau)+\left(\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q\cdot\delta_\theta}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)$$

$$\left(-\frac{r\cdot\delta_p}{\delta_\theta}\right)\cdot\frac{d}{d\tau}p(x,\tau)=\left(\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}t(x,\tau)+\left(\frac{a_m\cdot c_m\cdot r\cdot\varepsilon\cdot\delta_p}{c_q\cdot\delta_\theta}\right)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\theta(x,\tau)-\left[\frac{r\cdot\delta_p\cdot\left(a_p\cdot c_q-a_m\cdot c_m\cdot\varepsilon\cdot\delta_p\right)}{c_q\cdot\delta_\theta}\right]\cdot\frac{d^2}{dx^2}p(x,\tau)$$

Получаем возможность идентификации параметров этих систем относительно друг друга путем приравнивания соответствующих множителей при производных этих систем:

$$\frac{\lambda \cdot c_m{}^2 \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta} = \frac{c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta}$$

$$\frac{\lambda \cdot c_m \cdot c_p \cdot k_p}{c_q \cdot k_m \cdot \delta} = \frac{r \cdot \delta_p}{\delta_\theta}$$

И соответствующих слагаемых правых частей этих систем уравнений с учетом их симметричной структуры относительно главной диагонали (соотношения Онзагера):

$$\frac{\left(k_q + \lambda \cdot k_m \cdot \varepsilon\right)}{c_q \cdot \rho_o} = a_q + \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_\theta}{c_q}$$

$$\frac{\lambda \cdot k_p \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \rho_o} = \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q}$$

$$\frac{\lambda \cdot c_m \cdot k_p \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta \cdot \rho_o} = \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta}$$

$$\frac{\lambda \cdot k_m \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \rho_o} = \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q}$$

$$\frac{\lambda \cdot c_m \cdot k_m \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta \cdot \rho_o} = \left(\frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q \cdot \delta_\theta}\right)$$

$$\frac{\lambda \cdot c_m \cdot k_p{}^2 \cdot (\varepsilon - 1)}{c_q \cdot k_m \cdot \delta \cdot \rho_o} = \frac{r \cdot \delta_p \cdot \left(a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon \cdot \delta_p - a_p \cdot c_q\right)}{c_q \cdot \delta_\theta}$$

Полученная система уравнений может быть использована для определения функциональной зависимости параметров этих систем относительно друг друга. Для этого преобразуем полученную систему уравнений к виду, удобному для численного решения, избавившись от множителей при производных по времени в левой части системы уравнений переноса Лыкова – Михайлова, разделив их на множители при соответствующих производных. После приведения подобных получаем соответствующую матрицу кинетических коэффициентов в правой части

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(k_q + \varepsilon\cdot\lambda\cdot k_m)\cdot\dfrac{\delta}{c_m}}{\dfrac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}} & \dfrac{\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_m\cdot\dfrac{\delta}{c_m}}{\dfrac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}} & \dfrac{\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_p\cdot\dfrac{\delta}{c_m}}{\dfrac{\rho_o\cdot c_q\cdot\delta}{c_m}} \\ \dfrac{\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_m\cdot\dfrac{\delta}{c_m}}{\varepsilon\cdot\lambda\cdot\rho_o\cdot c_m} & \dfrac{\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_m}{\varepsilon\cdot\lambda\cdot\rho_o\cdot c_m} & \dfrac{\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_p}{\varepsilon\cdot\lambda\cdot\rho_o\cdot c_m} \\ \dfrac{\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_p\cdot\dfrac{\delta}{c_m}}{-\dfrac{\lambda\cdot\rho_o\cdot c_p\cdot k_p}{k_m}} & \dfrac{\varepsilon\cdot\lambda\cdot k_p}{-\dfrac{\lambda\cdot\rho_o\cdot c_p\cdot k_p}{k_m}} & \dfrac{-\lambda\cdot(1-\varepsilon)\cdot\dfrac{k_p^{\,2}}{k_m}}{-\dfrac{\lambda\cdot\rho_o\cdot c_p\cdot k_p}{k_m}} \end{bmatrix} \text{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{k_q + \lambda\cdot k_m\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\rho_o} & \dfrac{\lambda\cdot k_m\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\rho_o} & \dfrac{\lambda\cdot k_p\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\rho_o} \\ \dfrac{k_m\cdot\delta}{c_m^{\,2}\cdot\rho_o} & \dfrac{k_m}{c_m\cdot\rho_o} & \dfrac{k_p}{c_m\cdot\rho_o} \\ -\dfrac{k_m\cdot\delta\cdot\varepsilon}{c_m\cdot c_p\cdot\rho_o} & -\dfrac{k_m\cdot\varepsilon}{c_p\cdot\rho_o} & -\dfrac{k_p\cdot(\varepsilon-1)}{c_p\cdot\rho_o} \end{bmatrix}$$

Учитывая положения неравновесной термодинамики, о превалировании кинетических коэффициентов главной диагонали матрицы переноса, получаем возможность уточнить их числовые значения при совместном влиянии переносимых компонентов.

Для этого потребуем, чтобы коэффициенты главной диагонали были равны между собой, вводя целевую функцию:

$$Z(\delta, c_m, \rho_o, k_q, k_m, k_p, \lambda, \varepsilon, c_q, c_p) := \left(\frac{k_q + \lambda\cdot k_m\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\rho_o} - \frac{k_m}{c_m\cdot\rho_o}\right)^2 + \left[\frac{k_m}{c_m\cdot\rho_o} - -\frac{k_p\cdot(\varepsilon-1)}{c_p\cdot\rho_o}\right]^2$$

Остальные коэффициенты должны быть меньше них по абсолютной величине, что соответствует следующей системе неравенств:

$$\rho_o \ge 1000$$

$$\left|-\frac{k_p\cdot(\varepsilon-1)}{c_p\cdot\rho_o}\right| - \left(\left|-\frac{k_m\cdot\varepsilon}{c_p\cdot\rho_o}\right| + \left|-\frac{k_m\cdot\delta\cdot\varepsilon}{c_m\cdot c_p\cdot\rho_o}\right|\right) > 0$$

$$\left|\frac{k_m}{c_m\cdot\rho_o}\right| - \left(\left|\frac{k_m\cdot\delta}{c_m^{\,2}\cdot\rho_o}\right| + \left|\frac{k_p}{c_m\cdot\rho_o}\right|\right) > 0$$

$$\left|\frac{k_q + \lambda\cdot k_m\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\rho_o}\right| - \left(\left|\frac{\lambda\cdot k_m\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\rho_o}\right| - \left|\frac{\lambda\cdot k_p\cdot\varepsilon}{c_q\cdot\rho_o}\right|\right) > 0$$

Используя в качестве начальных приближений наиболее характерные, для зерновых продуктов, значения параметров [3], уточняем их с учетом выполнения данных соотношений и получаем следующий набор данных

$$\begin{pmatrix} \delta \\ c_m \\ \rho_o \\ k_q \\ k_m \\ k_p \\ \lambda \\ \varepsilon \\ c_q \\ c_p \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3.053 \times 10^{-7} \\ 1.161 \times 10^{-5} \\ 1.229 \times 10^{3} \\ 1.375 \times 10^{-3} \\ 2.851 \times 10^{-7} \\ 1.157 \times 10^{-7} \\ 35.313 \\ 2 \times 10^{-3} \\ 0.056 \\ 4.706 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Используя полученные соотношения, определяем значения параметров, входящих в систему уравнений переноса температуры, влаги и давления к капиллярно – пористой среде системы уравнений переноса Лыкова – Михайлова:

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda \cdot c_m{}^2 \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta} = \dfrac{c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta} \\ \dfrac{\lambda \cdot c_m \cdot c_p \cdot k_p}{c_q \cdot k_m \cdot \delta} = \dfrac{r \cdot \delta_p}{\delta_\theta} \\ \dfrac{\left(k_q + \lambda \cdot k_m \cdot \varepsilon\right)}{c_q \cdot \rho_o} = a_q + \dfrac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_\theta}{c_q} \\ \dfrac{\lambda \cdot k_p \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \rho_o} = \dfrac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q} \\ \dfrac{\lambda \cdot c_m \cdot k_p \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta \cdot \rho_o} = \dfrac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta} \\ \dfrac{\lambda \cdot k_m \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \rho_o} = \dfrac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q} \\ \dfrac{\lambda \cdot c_m \cdot k_m \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta \cdot \rho_o} = \left(\dfrac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q \cdot \delta_\theta}\right) \\ \dfrac{\lambda \cdot c_m \cdot k_p{}^2 \cdot (\varepsilon - 1)}{c_q \cdot k_m \cdot \delta \cdot \rho_o} = \dfrac{r \cdot \delta_p \cdot \left(a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon \cdot \delta_p - a_p \cdot c_q\right)}{c_q \cdot \delta_\theta} \end{cases}$$

Таким образом, набору параметров:

$$\begin{pmatrix} \delta \\ c_m \\ \rho_o \\ k_q \\ k_m \\ k_p \\ \lambda \\ \varepsilon \\ c_q \\ c_p \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3.053\times 10^{-7} \\ 1.161\times 10^{-5} \\ 1.229\times 10^{3} \\ 1.375\times 10^{-3} \\ 2.851\times 10^{-7} \\ 1.157\times 10^{-7} \\ 35.313 \\ 2\times 10^{-3} \\ 0.056 \\ 4.706\times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

соответствует набор параметров системы уравнений переноса температуры, влаги и давления к капиллярно – пористой среде системы Лыкова – Михайлова:

$$\begin{pmatrix} a_q \\ a_m \\ a_p \\ \delta_\theta \\ \delta_p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.998\times 10^{-5} \\ 8.109\times 10^{-6} \\ 1.996\times 10^{-5} \\ 0.026 \\ 3.41\times 10^{-5} \\ 35.316 \end{pmatrix}$$

Нулевая невязка множителей при производных этих систем показывает их однотипный характер:

$$\frac{\left(k_q + \lambda \cdot k_m \cdot \varepsilon\right)}{c_q \cdot \rho_o} - \left(a_q + \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_\theta}{c_q}\right) = 0$$

$$\frac{\lambda \cdot c_m^{\ 2} \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta} - \frac{c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta} = 0$$

$$\frac{\lambda \cdot c_m \cdot c_p \cdot k_p}{c_q \cdot k_m \cdot \delta} - \frac{r \cdot \delta_p}{\delta_\theta} = 0$$

$$\frac{\lambda \cdot k_p \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \rho_o} - \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q} = -0$$

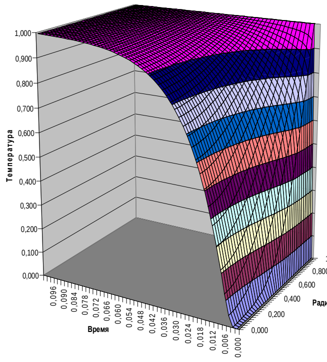
$$\frac{\lambda \cdot c_m \cdot k_p \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta \cdot \rho_o} - \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta_\theta} = -0$$

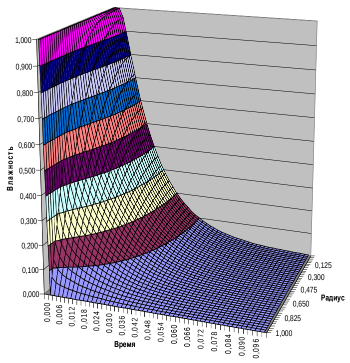
$$\frac{\lambda \cdot c_m \cdot k_p^{\ 2} \cdot (\varepsilon - 1)}{c_q \cdot k_m \cdot \delta \cdot \rho_o} - \frac{r \cdot \delta_p \cdot \left(a_m \cdot c_m \cdot \varepsilon \cdot \delta_p - a_p \cdot c_q\right)}{c_q \cdot \delta_\theta} = 0$$

$$\frac{\lambda \cdot k_m \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \rho_o} - \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q} = 0$$

$$\frac{\lambda \cdot c_m \cdot k_m \cdot \varepsilon}{c_q \cdot \delta \cdot \rho_o} - \frac{a_m \cdot c_m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot \delta_p}{c_q \cdot \delta_\theta} = 0$$

С учетом полученных соотношений было проведено моделирование процессов переноса тепла, влаги и давления из сферического тела для различных начальных и граничных условий методом конечных элементов [7]. В результате были получены типичные диаграммы изменения температуры, влажности и давления по радиусу сферы во времени, когда влажная ($\theta = 1$) и холодная ($t = 0$) сфера в которой внутреннее давление равно давлению окружающей среды ($p = 1$) нагревается этой средой от температуры равной нулю до температуры равной единице (на поверхности сферы) и одновременно сушится за счет удаления влаги с поверхности сферы:





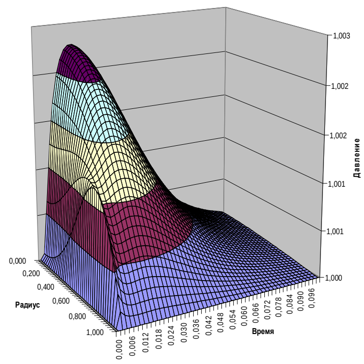


Рисунок 1 - Зависимости изменения температуры, влажности и давления при окружающем давлении.

В дальнейшем было проведено моделирование аналогичного процесса в условиях вакуумного воздействия на сферическую частицу. Типичные диаграммы изменения температуры, влажности и давления по радиусу сферы во времени, когда влажная (θ = 1) холодная (t = 0) сфера в которой внутреннее давление равно атмосферному давлению (p = 1) помещается в вакуум (p = 0) и нагревается от температуры равной нулю до температуры равной единице (на поверхности сферы) и одновременно сушится за счет удаления влаги с поверхности сферы, были также получены методом конечных элементов:

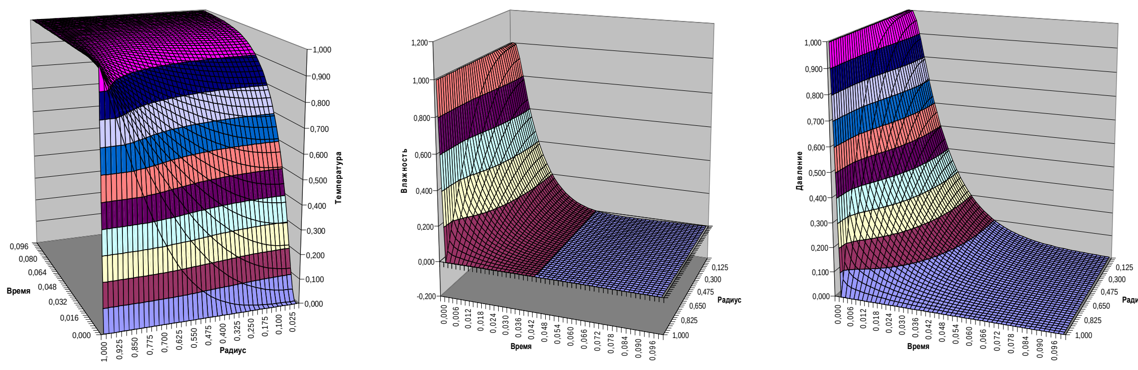


Рисунок 2 - Зависимости изменения температуры, влажности и давления под вакуумом.

Сравнительный анализ полученных диаграмм показал, что вакуумирование позволяет интенсифицировать удаление влаги с одновременным предотвращением роста давления во внутренних областях сферической частицы, что в реальных условиях сушки приводит к нежелательным последствиям (растрескиванию семян).

Вывод

При наличии, сравнимых по интенсивности переноса, градиентов давления, влажности и температуры в обычных условиях сушки наблюдается значительный рост давления внутри капиллярно-пористого тела, приводящий к растрескиванию. В тоже время в условиях вакуума такого явления не наблюдается при прочих равных условиях проведения процесса сушки.

Литература

1.Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. Госэнергоиздат, 1963.

2. Lewis R.W., Ferguson W.J. The effect of temperature and total gas pressure on the moisture content in a capillary porous body, International Journal for Numerical Methods in Engineering 29 (1990) 357—369.
3. Irudayaraj J., Haghighi K., Stroshine R.L. Finite element analysis of drying with application to cereal-grains, Journal of Agricultural Engineering Research 53 (1992) 209-229.
4. Irudayaraj J., Wu Y. Analysis and application of Luikov's heat, mass, and pressure transfer model to a capillary porous media, Drying Technology 14 (1996) 803-824.
5. Datta A.K. Porous media approaches to studying simultaneous heat and mass transfer in food processes. I: problem formulations, Journal of Food Engineering 80 (2007) 80-95.
6. Conceicaoa R.S.G., Macedob E.N., Pereira L.B.D., Quaresma J.N.N. Hybrid integral transform solution for the analysis of drying in spherical capillary-porous solids based on Luikov equations with pressure gradient. International Journal of Thermal Sciences 71 (2013) 216—236
7.Kosachev V.S., Koshevoy E.P., Podgorny S.A. Using rounding function in problems of finite-element analysis. Studies in mathematical science. 2012.-V.4.-№2.-pp.17-24.

References

1.Lykov A.V., Mihajlov Ju.A. Teorija teplo- i massoperenosa. Gosjenergoizdat, 1963.
2. Lewis R.W., Ferguson W.J. The effect of temperature and total gas pressure on the moisture content in a capillary porous body, International Journal for Numerical Methods in Engineering 29 (1990) 357—369.
3. Irudayaraj J., Haghighi K., Stroshine R.L. Finite element analysis of drying with application to cereal-grains, Journal of Agricultural Engineering Research 53 (1992) 209-229.
4. Irudayaraj J., Wu Y. Analysis and application of Luikov's heat, mass, and pressure transfer model to a capillary porous media, Drying Technology 14 (1996) 803-824.
5. Datta A.K. Porous media approaches to studying simultaneous heat and mass transfer in food processes. I: problem formulations, Journal of Food Engineering 80 (2007) 80-95.
6. Conceicaoa R.S.G., Macedob E.N., Pereira L.B.D., Quaresma J.N.N. Hybrid integral transform solution for the analysis of drying in spherical capillary-porous solids based on Luikov equations with pressure gradient. International Journal of Thermal Sciences 71 (2013) 216—236
7.Kosachev V.S., Koshevoy E.P., Podgorny S.A. Using rounding function in problems of finite-element analysis. Studies in mathematical science. 2012.-V.4.-№2.-pp.17-24.