УДК 539.374

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОМ ДВУХСЛОЙНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Курбанов Наби Тапдыг оглы
к.ф.-м.н., доц., зав. кафедрой «Общая математика»

Вусала Назим кызы Юсифли
соискатель
Сумгаитский государственный университет, Азербайджан

В данной работе исследуется распространение нестационарных волн в слоистом вязкоупругом полупространстве для произвольных наследственных функций при малой вязкости при различных граничных условиях с помощью интегрального преобразования Лапласа и экспоненциального преобразования Фурье. Полученное решение анализировано в частном случае, когда свойства среды описываются ядром Ржаницына

Ключевые слова: ВЯЗКОУПРУГОСТЬ, СЛОИСТОСТЬ, РЕОЛОГИЧЕСКИЙ, НЕСТАЦИОНАРНЫЙ, ИЗОБРАЖЕНИЕ, ОРИГИНАЛ, СВЕРТКА, ДИНАМИЧЕСКИЙ, НАСЛЕДСТВЕННОСТЬ, ЯДРО, ПОЛЗУЧЕСТЬ, НЕОДНОРОДНОСТЬ

UDC 539.374

PROPAGATION OF THE UNSTEADY-STATE LONGITUDIONAL WAVES IN VISCOELASTIC TWO-LAYER SEMI-SPACE

Kurbanov Nabi Tapdig oglu
Cand.Phys.-Math.Sci., associate professor, head of the Chair of Common mathematics

Vusala Nazim kizi Yusifli
applicant
Sumgait State University, Azerbaijan

In this work it is investigated the propagation of unsteady-state waves in a vicoelastic semi space for the arbitary heterogeneous functions at the different boarded conditions with the help of Laplas transformation and exponentional Truriers conversion. The received solution has been analyzed in a private case when medium properties are describing by Rzhanitsin’s core

Keywords: VISCOELASTIC, FOLIATION, RHEOLOGICAL, UNSTEADY-STATE, DELINE-ATION, ORIGINAL, CONTRACTION, DYNAMIC, HEREDITY, NUCLEUS, AFTERFLOW, DISCON-TINUITY

Широкий круг задач, связанный как с решением проблем сейсмологии, сейсмостойкого строительства сложных технических систем, так и проблем современного приборостроения, связанных с всевозрастающим применением композиционных материалов, приводит к необходимости исследования, как в прикладном, так и в теоретическом аспектах возможности наиболее эффективного управления волновых процессов на основе направленного выбора геометрической и физической структуры композиционных систем [1, 2, 3, 4, 5].

Одной из важных задач исследований является учет слоистости грунтового основания. В последние десятилетия в исследованиях авторов, посвященных проблемам сейсмостойкости, наблюдается тенденция учета все большего числа слоев при изучении взаимодействия сейсмических волн с конструкциями различного назначения [5–8]. Однако исследование явлений, возникающих при взаимодействии сейсмических волн с достаточно большим числом слоев, приводит к значительным сложностям математического характера.

Для того чтобы получить и разработать какие-либо качественные выводы о закономерностях взаимодействия волновых полей с конструкциями сооружений различного назначения, необходимо на основе моделей слоистых сред методами математического и компьютерного моделирования провести исследование влияния структуры слоистых сред на волновые процессы различной физической природы.

При волновом воздействии на слоистую структуру возникает система отраженных и преломленных волн. Взаимодействуя с падающей волной, они образуют сложную интерференционную картину, в значительной степени, зависящую от геометрической и физической структуры слоистой среды: от физических свойств материалов слоев, геометрических размеров слоев, числа слоев, а также от порядка взаимного расположения слоев с различными физическими свойствами в конструкции [6, 11, 12, 13, 14].

Меняя физическую и геометрическую структуру слоистой среды, можно в значительной степени управлять интерференционной картиной волнового процесса и, в частности, амплитудными и фазовыми характеристиками. На этом основана работа многих устройств в различных областях физики, техники и других сооружений.

Распространение нестационарных волн напряжений в слоистых средах исследованы многими авторами, из которых отметим работы [17, 13, 14] и другие.

Распространение нестационарных волн в упругом полупространстве при некоторых видах неоднородностей также исследовано в работах [18, 19, 20]. В работе [6] исследуется задача о распространении волн в периодически слоистых линейно упругих средах, которые реализуются с помощью теории Флоке.

Распространение нестационарных волн сдвига в слоистом упругом полупространстве исследовано в работах [14, 9] методом малого параметра.

Отметим, что при решении соответствующих вязкоупругих задач свойства материала либо описываются конкретными моделями, например, как модель Максвелла, Фойхта и другие, либо решение находится численными методами.

В статье исследуется аналогичная задача с учетом вязкости материала, и решение находится для произвольных наследственных функций.

Предположим, что к поверхности двухслойного вязкоупругого слоя при $t=0$ приложена нагрузка

$$\sigma_{xx}=\sigma_0 f(t) \tag{1}$$

где $\sigma_0=const$; $f(t)$ – заданная функция.

Задача математически сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(m)}(x,t)}{\partial x}=\rho_m\frac{\partial^2 U_{(m)}(x,t)}{\partial t^2} \qquad (m=1,2) \tag{2}$$

$$U_m(x,t)=\frac{\partial U_m(x,t)}{\partial t}=0,\ t=0 \tag{3}$$

$$U_1(x,t)=U_2(x,t),\ \sigma_{xx}^{(1)}(x,t)=\sigma_{xx}^{(2)}(x,t),\ x=h_1 \tag{4}$$

$$U_2(x,t)=0,\quad x=h_1+h_2. \tag{5}$$

Определяющие соотношения принимаем в следующем виде:

$$\sigma_{xx}^{(m)}(x,t)=\int_0^t\left[R_1^{(m)}(t-\tau)+\frac{2}{3}R^{(m)}(t-\tau)\right]d\left(\frac{\partial U^{(m)}}{\partial x}\right), \tag{6}$$

где σ – напряжение; $\varepsilon=\dfrac{\partial U}{\partial x}$ – деформация;

$R_1^{(m)}(t)$ и $R^{(m)}(t)$ – функции сдвиговой и объемной релаксации.

При $m=1$ все соотношения относятся первому слою, при $m=2$ – ко второму.

С помощью интегрального преобразования Лапласа изображение решения получаем в виде:

$$\overline{U}_m(x,p)=M_m e^{-px\sqrt{\frac{\rho_m}{p\overline{R}_1^{(m)}(p)+\frac{2}{3}p\overline{R}^{(m)}(p)}}}+N_m e^{px\sqrt{\frac{\rho_m}{p\overline{R}_1^{(m)}(p)+\frac{2}{3}p\overline{R}^{(m)}(p)}}} \quad (7)$$

Здесь M_m и N_m $(m=1,2)$ неопределенные коэффициенты;

p – параметр преобразования.

Пусть коэффициент Пуассона ν_m является постоянным, тогда функции $R_1^{(m)}(t)$ и $R^{(m)}(t)$ будут пропорциональными, т.е.

$$R_1^{(m)}(t)=\eta_m R^{(m)}(t),$$

где $\eta_m=\dfrac{1+y_m}{3(1-2y_m)}$.

Рассмотрим следующие преобразования:

$$\sqrt{\frac{\rho_m}{p\overline{R}_1^{(m)}(p)+\frac{2}{3}p\overline{R}^{(m)}(p)}}=\sqrt{\frac{\rho_m}{\eta_m+\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{p\overline{R}^{(m)}(p)}}=\sqrt{\frac{\rho_m}{\frac{1+\nu_m}{3(1-2\nu_m)}+\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{p\overline{R}^{(m)}(p)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\rho_m}{\frac{1+\nu_m}{E_m}\left(\frac{E_m}{3(1-2\nu_m)}+\frac{2}{3}\cdot\frac{E_m}{1+\nu_m}\right)}\cdot\frac{1}{p\overline{R}^{(m)}(p)}}$$

Учитывая

$$K_m=\frac{E_m}{3(1-2\nu_m)};$$

$$G_m=\frac{1}{2(1+\nu_m)},$$

в последнем выражении получаем:

$$\sqrt{\frac{\rho_m}{K_m+\frac{2}{3}\cdot 2G_m}\cdot\frac{2G_m}{p\overline{\mathrm{R}}^{(\mathrm{m})}(p)}}=\frac{1}{G_m}\sqrt{\frac{R_0^{(m)}}{p\overline{R}^{(m)}(p)}},$$

тогда решение (7) приводится к виду:

$$\overline{U}_m(x,p) = M_m e^{-\frac{px}{c_m}\sqrt{\frac{R_0}{p\overline{R}^{(m)}(p)}}} + N_m e^{\frac{px}{c_m}\sqrt{\frac{R_0}{p\overline{R}^{(m)}(p)}}}. \quad (8)$$

Здесь введено обозначение

$$C_m = \sqrt{\frac{R_1^{(m)}(0) + \frac{2}{3}R^{(m)}(0)}{\rho_m}};$$

$$R_1^{(m)}(0) = K^{(m)}; \quad R^{(m)}(0) = 2G_m.$$

Из граничных условий, определяя коэффициенты M_m и N_m подставляя в (8), имеем:

$$\overline{U}_1(p,x) = -\frac{\sigma_0 \bar{f}(p)\sqrt{R^{(1)}(0)}}{c_1\rho_1 p\sqrt{p\overline{R}^{(1)}(p)}} \cdot \frac{e^{-p\frac{xa_1}{c_1}} + B_1 e^{-p\frac{a_1(2h_1-x)}{c_1}}}{1 - B_1 e^{-p\frac{2a_1h_1}{c_1}}},$$

$$\overline{U}_2(p,x) = -\frac{2\overline{U}_1(h_1,p)}{(1+B_2)(1+\alpha)} \cdot \frac{e^{-p\frac{a_2(x-h_1)}{c_2}} + e^{-p\frac{a_2(2h_2-h_1-x)}{c_2}}}{1 - e^{-p\frac{2a_2h_2}{c_2}}} \quad (9)$$

где

$$B_1 = \frac{B_2 - e^{-p\frac{2a_2h_2}{c_2}}}{1 - B_2 e^{-p\frac{2a_2h_2}{c_2}}}; \qquad B_2 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda};$$

$$\lambda_1 = \frac{c_1\sqrt{R^{(2)}(0)}}{c_2\sqrt{R_0^1}}; \qquad \lambda = \lambda_1\sqrt{\frac{P\overline{R}^{(1)}(p)}{P\overline{R}^{(2)}(p)}};$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{R^{(1)}(0)}{p\overline{R}^{(1)}(p)}}; \qquad a_2 = \sqrt{\frac{R^{(2)}(0)}{p\overline{R}^{(2)}(p)}}.$$

Разлагая знаменатели в ряд, имеем:

$$\left(1 - B_1 e^{-p\frac{2a_1h_1}{c_1}}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_1^n e^{-p\frac{2a_1h_1n_1}{c_1}}$$

$$\left(1 - e^{-p\frac{2a_2h_2}{c_2}}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p\frac{2a_2h_2n}{c_2}}. \quad (10)$$

Учитывая это в (9) соответственно, получаем:

$$\overline{U}_1(x,p) = -\frac{\sigma_0 \sqrt{R^{(1)}(0)}\,\bar{f}(p)}{c_1\rho_1 p\sqrt{p\overline{R}^{(1)}(p)}} \left\{ e^{-p\frac{x}{c_1}a_1} + \sum_{n_1=1}^{\infty} B_1^n \left(e^{-p\frac{2n_1h_1+x}{c_1}a_1} + e^{-p\frac{2n_1h_1-x}{c_1}a_1} \right) \right\}$$

$$\overline{U}_2(x,p) = \overline{U}_1(h_1,p)\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{2nh_2-h_1+x}{c_2}a_2} - e^{-p\frac{2(n+1)h_2-h_1-x}{c_2}a_2} \right) \tag{11}$$

или

$$\overline{U}_1(x,p) = -\frac{\sigma_0\,\overline{f}(p)}{c_1\rho_1 p}\sqrt{\frac{R^{(1)}(0)}{p\overline{R}^{(1)}(p)}} \left\{ e^{-p\frac{x}{c_1}\sqrt{\frac{R^{(1)}(0)}{p\overline{R}^{(1)}(p)}}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} B_5 \cdot \left[e^{-p\frac{2n_1h_1+x}{c_1}\sqrt{\frac{R^{(1)}(0)}{p\overline{R}_1^{(1)}(p)}} - p\frac{2h_2n}{c_2}\sqrt{\frac{R^{(2)}(0)}{p\overline{R}^{(2)}(p)}}} + e^{-p\frac{2nh_1-x}{c_1}\sqrt{\frac{R^{(1)}(0)}{p\overline{R}^{(1)}(p)}} - p\frac{2h_2n}{c_2}\sqrt{\frac{R^{(2)}(0)}{p\overline{R}^{(2)}(p)}}} \right] \right\} \tag{12}$$

$$\overline{U}_2(x,p) = \overline{U}_1(h_1,p)\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{-p\frac{2nh_2-h_1+x}{c_2}\sqrt{\frac{R^{(2)}(0)}{P\overline{R}^{(2)}(p)}}} - e^{-p\frac{2(n+1)h_2-h_1-x}{c_2}\sqrt{\frac{R^{(2)}(0)}{P\overline{R}^{(2)}(p)}}} \right],$$

где

$$B_5 = \frac{(-4\lambda_1)^l \left(1-\lambda_1\sqrt{\frac{p\overline{R}^{(1)}(p)}{p\overline{R}^{(2)}(p)}}\right)^{n+n_1-2l}}{\left(1+\lambda_1\sqrt{\frac{p\overline{R}^{(1)}(p)}{p\overline{R}^{(2)}(p)}}\right)^{n+n_1}} \left(\sqrt{\frac{p\overline{R}^{(1)}(p)}{p\overline{R}^{(2)}(p)}}\right)^l$$

Предположим, что $p\overline{R}^{(1)}(p) = k_1 p\overline{R}^{(2)}(p)$, $k_1 = const$, тогда решения (12) принимают вид:

$$\overline{U}_1(x,p) = -\frac{\sigma_0\,\overline{f}(p)}{c_1\rho_1 p}\sqrt{\frac{R^{(1)}(0)}{p\overline{R}_1(p)}} \left\{ e^{-p\frac{x}{c_1}\sqrt{\frac{R^{(1)}(0)}{p\overline{R}^{(1)}(p)}}} + \sum_{n=1}^{\infty} B_5 \cdot \left[e^{-p\frac{r_1}{c_1}\sqrt{\frac{R^{(1)}(0)}{p\overline{R}1(p)}}} + e^{-p\frac{r_2}{c_1}\sqrt{\frac{R^{(1)}(0)}{p\overline{R}^{(1)}(p)}}} \right] \right\} \tag{13}$$

$$\overline{U}_2(x,p) = \overline{U}_1(h_1,p)\sum_{n_2=0}^{\infty}\left(e^{-p\frac{\gamma_1}{c_2}\sqrt{\frac{R^{(2)}(0)}{p\overline{R}^{(1)}(p)}}} - e^{-p\frac{\gamma_2}{c_2}\sqrt{\frac{R^{(2)}(0)}{p\overline{R}^{(2)}(p)}}} \right),$$

где

$$r_1 = (2nh_1 + x) + \frac{2h_2 n_1 c_1}{c_2}\sqrt{\frac{R^{(2)}(0)}{R^{(1)}(0)}}k_1$$

$$r_2 = (2nh_1 - x) + \frac{2h_2 n_1 c_1}{c_2}\sqrt{\frac{R^{(2)}(0)}{R^{(1)}(0)}}k_1$$

$$\gamma_1 = 2nh_2 - h_1 + x$$

$$\gamma_2 = 2(n+1)h_2 - h_1 - x,$$

тогда B_5 принимает вид:

$$B_5 = \frac{(-4\lambda_1)^l (1-\lambda_1 k_1)^{n_1+n-2l} \cdot k_1^{\frac{l}{2}}}{(1+\lambda_1 k_1)^{n_1+n_3}},$$

который не зависит от времени.

Из уравнений (13) видно что, окончательное решение поставленной задачи приводится к вычислению оригиналов следующих выражений

$$\bar{\varphi}_i(r_i, p) = \frac{\bar{f}(p)}{p}\sqrt{\frac{R^{(1)}(0)}{p\bar{R}^{(1)}(p)}}e^{-p\frac{r_i}{c_1}\sqrt{\frac{R^{(1)}(0)}{p\bar{R}^{(1)}(\text{p})}}} \tag{14}$$

$$\bar{\psi}_j(\gamma_j, p) = e^{-p\frac{\gamma_j}{c_2}\sqrt{\frac{R^{(2)}(0)}{p\bar{R}^{(2)}(p)}}} \tag{15}$$

Здесь $i = 0,1,2$, $j = 1,2$ причем $r_0 = x,\ r_1, r_2,\ \ \gamma_1\, u\ \ \gamma_2$ известны.

Представляя экспоненциальную функцию в форме интеграла Фурье с учетом $p\bar{R}(p) = E_0(1-\varepsilon\bar{\Gamma}(\text{p}))$, получаем:

$$\bar{\varphi}_i(r_i, p) = \frac{2\bar{f}(p)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\lambda r_i}{c_1})}{p^2 + \lambda^2 - \varepsilon_1\lambda^2\bar{\Gamma}(p)^{(1)}}d\lambda \tag{16}$$

$$\bar{\psi}_j(\gamma_j, p) = \frac{2(1-\varepsilon\bar{\Gamma}^{(2)}(p))}{\pi p}\int_0^\infty \frac{\lambda\sin(\frac{\lambda\gamma_j}{c_2})}{p^2 + \lambda^2 - \varepsilon_2\lambda^2\bar{\Gamma}^{(2)}(p)}d\lambda, \tag{17}$$

где ε_k – некоторый малый параметр $(k = 1,2)$.

Оригиналы этих функций находятся по методу, изложенному в работах [2, 7, 9, 12], и имеют вид:

$$\varphi_i(r_i,t) = R^{(1)}(0)\,f(t) * \frac{d\Pi^{(1)}(t)}{dt} * \left\{ H\left(t - \frac{r_i}{c_1}\right) + \ldots + \right.$$
$$+ \frac{(-1)}{2^2}\left(t^2 - \frac{r_i^2}{c_1^2}\right) * \delta_2(t) * \varepsilon^2 K_{(2)}^{(1)}(t) + \tag{18}$$
$$\left. + \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!}\left(t^2 - \frac{r_2}{c_1}\right)^n * \delta_{2n}(t) * \varepsilon^n K_{(n)}^{(1)}(t) + \ldots \right\},$$

где

$\delta(t)$ – дельта функция Дирака;

$K_n^{(m)}(t) = \overline{K}_n^{(m)}(p)$ – итерированные ядра

$$K_1^{(i)}(t) = K^{(i)}(t) \; \ldots \; K_n^{(i)}(t) = \int_0^t K_1^{(i)}(t-\tau) K_{n-1}^{(i)}(\tau)\,d\tau, \quad K_n^{(i)^{(m)}}(t) \doteq p^m \overline{K}^{(i)^n} .$$

Вычислим оригинал второй функции $\overline{\psi}_j(\gamma_j, p)$.

$$\overline{\psi}_j(\gamma_j, p) = \frac{2}{\pi}\frac{\left(1 - \varepsilon\overline{\Gamma}_{(p)}^{(2)}\right)}{p}\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{p^2+\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\varepsilon_2\overline{\Gamma}_{(p)}^{(2)}\right)^n + \frac{\left(-p^2\right)}{\left(p^2+\lambda^2\right)^2}\sum_{n=1}^{m} n\left(\varepsilon_2\overline{\Gamma}_{(p)}^{(2)}\right)^n + \right.$$
$$+ \frac{\left(-p^2\right)^2}{\left(p^2+\lambda^2\right)^3}\sum_{n=2}^{m}\frac{n!}{2!(n-2)!}\left(\varepsilon_2\overline{\Gamma}_{(p)}^{(2)}\right)^n + \cdots + \frac{\left(-p^2\right)^k}{\left(p^2+\lambda^2\right)^{k+1}}\sum_{n=k}^{m}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\varepsilon_2\overline{\Gamma}_{(p)}^{(2)}\right)^n + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\left(-p^2\right)^m}{\left(p^2+\lambda^2\right)^{m+1}}\left(\varepsilon_2\overline{\Gamma}_{(p)}^{(2)}\right)^m + \tag{19}$$
$$\left. + \frac{\left(\varepsilon_2 + \lambda^2\overline{\Gamma}_{(p)}^{(2)}\right)^{m+1}}{\left(p^2+\lambda^2\right)^{m+1}} \times \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s^{(2)}\lambda\right)^2 + \lambda^2\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c^{(2)}\right)^2} \right\}\lambda \sin\left(\frac{\lambda\gamma_j}{c_2}\right)d\lambda$$

Отсюда после вычисления интегралов получим:

$$\overline{\psi}_j(\gamma_j, p) = \frac{E_0\left(1-\varepsilon_2\overline{\Gamma}^{(2)}_{(p)}\right)}{pE_0}\left\{\exp\left(-\frac{p\gamma_j}{c_2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\varepsilon_2\overline{\Gamma}^{(2)}_{(p)}\right)^n + \cdots + \right.$$

$$+\frac{\frac{\gamma_j}{c_2}}{2^{2k-1}k!}\frac{1}{p^{2k-1}}\exp\left(-\frac{p\gamma_j}{c_2}\right)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(2k-i-2)!}{i!(k-i-2)!}\times\left(\frac{2p\gamma_j}{c_2}\right)^i\left(-p^2\right)^k\times$$

$$\times\sum_{n=k}^{m}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\varepsilon_2\overline{\Gamma}^{(2)}_{(p)}\right)+\cdots+\frac{\frac{\gamma_j}{c_2}}{2^{2m-1}m!}\exp\left(-\frac{p\gamma_j}{c_2}\right)\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(2m-i-k)!}{i!(m-i-2)!}\left(\frac{2p\gamma_j}{c_2}\right)^i\times \tag{20}$$

$$\left.\times\left(-p^2\right)^m\left(\varepsilon_2\overline{\Gamma}^{(2)}_{(p)}\right)^m+\frac{2}{\pi}\varepsilon^{m+1}\int_0^{\infty}\frac{\left(\lambda^2\overline{\Gamma}^{(2)}_{(p)}\right)^{m+1}}{\left(p^2+\lambda^2\right)^{m+1}}\frac{\lambda\sin\left(\frac{\lambda\gamma_j}{c_2}\right)d\lambda}{\left(p+\frac{1}{2}\varepsilon_2\Gamma_s^{(2)}\lambda\right)^2+\lambda^2\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon_2\Gamma_c^{(2)}\right)^2}\right\}$$

Применяя обратные преобразования Лапласа к этому выражению, находим:

$$\psi_j(\gamma_j,t)=\frac{E(t)}{E_0}*\left\{H\left(t-\frac{\gamma_j}{c_2}\right)+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^n\int_{\frac{\gamma_j}{c_2}}^{t}\Gamma_n^{(2)}(\tau)d\tau+\cdots+\right.$$

$$\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(2k-i-2)!}{i!(k-i-2)!}\left(\frac{2\gamma_j}{c_2}\right)^i\left(t-\frac{\gamma_j}{c_2}\right)^{k-i-1}*\delta_k(t)*\sum_{n=k}^{m}\varepsilon_2^m\Gamma_n^{(2)}(t)+\ldots+ \tag{21}$$

$$+\frac{(-1)^m}{2^{2m}m!}\delta_m(t)*\Gamma_m^{(2)}(t)*\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(2m-i-2)!}{i!\left[(m-i-2)^2\right]!}\left(\frac{2\gamma_j}{c_2}\right)^{i+1}\left(t-\frac{\gamma_j}{c_2}\right)^{m-i-1}+$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\varepsilon^{m+1}\int_0^{\infty}\left[\int_0^t\theta_{m+1}(\tau)d\tau*\exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s^{(2)}\lambda t\right)\sin\lambda\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c^{(2)}t\right)\right]\frac{\lambda\sin\left(\frac{\lambda\gamma_j}{c_2}\right)}{\lambda\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon_2\Gamma_c^{(2)}\right)}d\lambda\right\}$$

Учитывая решение (18) и (21) в (13), получаем оригинал решения поставленной задачи в виде:

$$U_1(x,t)=-\frac{\sigma_0}{c_1\rho_1}\left\{\varphi_1(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}B_5\left[\varphi_2(r_1,t)+\varphi_3(r_2,t)\right]\right\} \tag{22}$$

$$U_2(x,t)=U_1(h_1,t)*\sum_{n=0}^{\infty}\left[\psi_1(\gamma_1,t)-\psi_2(\gamma_2,t)\right]; \tag{23}$$

Пусть вместо условия (5) выполняется условие

$$U_2(x,t)=0,\ \text{ при }\ x\to\infty \tag{24}$$

Тогда решения для каждого слоя в изображениях Лапласа принимают вид:

$$\overline{U}_1(x,p)=\frac{\sigma_0\overline{f}(p)}{c_1\rho_1 p}\sqrt{\frac{R_0^{(1)}}{p\overline{R}^{(1)}(p)}}\left[e^{-\frac{px}{c_1}\sqrt{\frac{R_0^{(1)}}{p\overline{R}^{(1)}(p)}}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\theta^k\left(e^{-p\frac{2kh_1-x}{c_1}\sqrt{\frac{R_0^{(1)}}{p\overline{R}^{(1)}(p)}}}-e^{-p\frac{2kh_1+x}{c_1}\sqrt{\frac{R^{(1)}(0)}{p\overline{R}^{(1)}(p)}}}\right)\right] \tag{25}$$

$$\overline{U}_2(x,p)=-\frac{2\sigma_0\overline{f}(p)}{c_1\rho_1 p(1+\lambda)}\sqrt{\frac{R_0^{(1)}}{p\overline{R}^{(1)}(p)}}\sum_{k=1}^{\infty}\theta^k\cdot e^{-p\left[\frac{(2k+1)h_1\mu_1}{c_1}-\frac{x-h_1}{c_2}\right]\sqrt{\frac{R_0^{(2)}}{p\overline{R}^{(2)}(p)}}}, \tag{26}$$

где

$$\lambda=\frac{\frac{p}{c_2}\sqrt{\frac{R_0^{(2)}}{p\overline{R}^{(2)}(p)}}}{\frac{p}{c_1}\sqrt{\frac{R_0^{(1)}}{p\overline{R}^{(1)}(p)}}}=const;\quad \theta=\frac{1-\lambda}{1+\lambda};$$

$$\mu_1=\frac{\sqrt{R_0^{(1)}p\overline{R}^{(2)}(p)}}{\sqrt{R_0^{(2)}p\overline{R}^{(1)}(p)}}=const$$

Отсюда видно, что решение поставленной задачи сводится к вычислению оригинала функции

$$\varphi_i(z_j,p)=\frac{1}{p}e^{-\frac{z_j}{c_i}p\sqrt{\frac{R_0^{(i)}}{p\overline{R}^{(i)}(p)}}} \tag{27}$$

Если считать, что вязкое сопротивление материала является малым, по сравнению с упругим сопротивлением, тогда оригинал функции $\overline{\varphi}_i(z_j,p)$ совпадает с формулой (18).

В этом случае оригинал решений поставленной задачи получается в виде:

$$\begin{aligned} U_1(x,t) &= \frac{\sigma_0}{c_1\rho_1}\int_0^t f(\tau)d\tau * \left\{\varphi_1(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty}\theta^k\left(\varphi_1\left(\frac{2kh_1 - x}{c_1}, t\right) - \varphi_1\left(\frac{2kh_1 + x}{c_1}, t\right)\right)\right\} \\ U_2(x,t) &= \frac{2\sigma_0}{c_1\rho_1}\int_0^t f(\tau)d\tau * \sum_{k=1}^{\infty}\theta^k\varphi_2\left(\frac{(2k+1)h_1\mu_1}{c_1} - \frac{x - \mathrm{h}_2}{\mathrm{c}_2}, \mathrm{t}\right) \end{aligned} \qquad (28)$$

Теперь исследуем полученное решение, с этой целью предположим, что свойства среды описываются ядром Ржаницына

$$K(t) = At^{\lambda-1}e^{-\beta t}, 0 < \lambda < 1,\ A > 0,\ \beta > 0,$$

тогда с учетом [4, 5, 9, 12]

$$K_n^m = [A\Gamma(\lambda)]^n e^{-\beta t}\sum_{l=0}^{m}\frac{m!}{l!(m-l)!}(-\beta)^{m-j}\frac{t^{n\lambda-l-1}}{\Gamma(n\lambda-l)}$$

из решений (27) при малых значениях $t - \dfrac{z_j}{c_i}$ получаем:

$$g_i(z_j,t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\left\{\left[\frac{2c_i}{A\Gamma(\alpha)(1-\alpha)z_j}\right]^{\frac{1}{2\alpha}}\left(t - \frac{z_j}{c_i}\right)^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} \times \right.$$
$$\left. \times e^{\left\{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{(1-\alpha)A\Gamma(\alpha)z_j}{2c_i}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}} \times \left(t - \frac{z_j}{c_i}\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \beta\left(t - \frac{z_j}{c_i}\right)\right\}.$$

Здесь $z_j > 0$ и все члены с целыми отрицательными значениями $(n\alpha - 1)$ не учитываются. Это формула исследована при следующих значениях параметров

$$A = \frac{0.2}{c_i};\ \alpha = 0.4,\ \beta = \frac{0.003}{c_i},\ c = 3\cdot 10^3\,м/с,\ z_j = 0.5м,\ z_j = 1м,\ z = 1.5м$$

и построены график зависимости $g_i(t)$ от времени t.

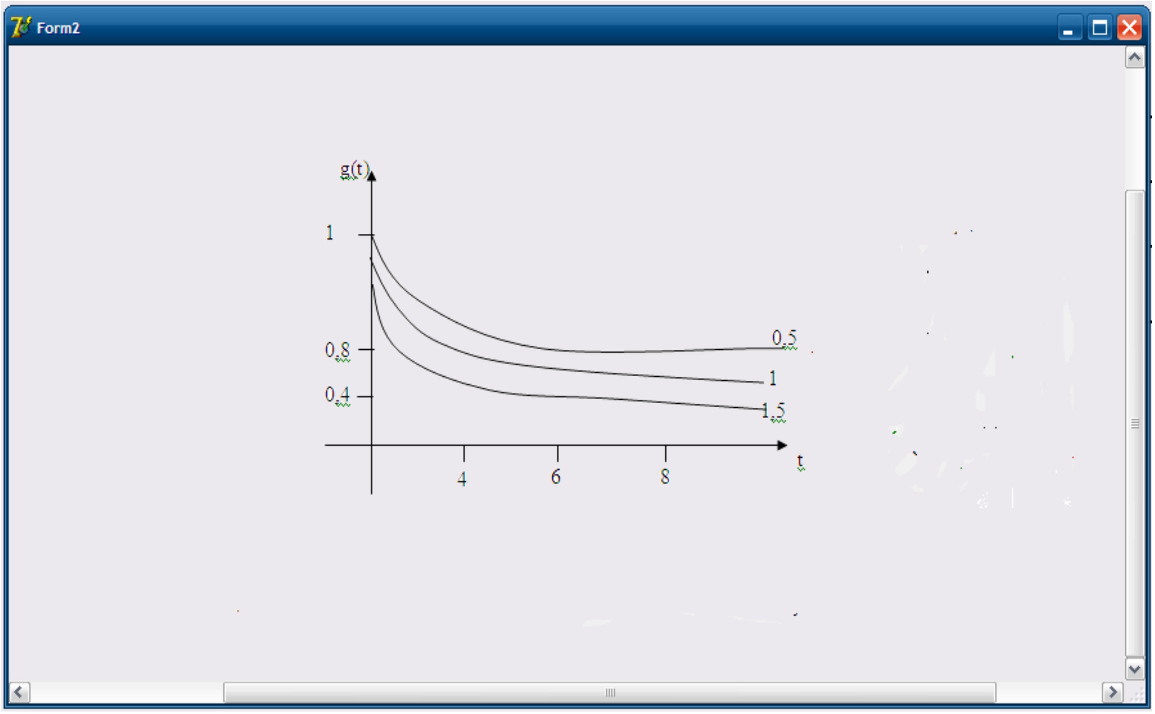

График зависимости $g_i(t)$ от времени t

Отсюда видно, что при фронтовой асимптотике параметры на характер решения влияют незначительно.

Список литературы

1. Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный жур-нал. Санкт–Петербург. 2010. № 6. С. 38–47.

2. Ильясов М.Х., Курбанов Н.Т. О расспространении нестационарных волн в линейных вязкоупругих материалах / ВИНИТИ. М., 1984, № 464-84, 27 с.

3. Аршинов Г.А., Лаптев С.В., Могилевич Л.И. Асимптотический анализ продольных волн в физически и геометрически нелинейных вязкоупругих средах // Наука Кубани. Сер. Проблемы физико-математического моделирования. 1999. С. 51–58.

4. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: «Мир», 1982. 333 с.

5. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд. МГУ, 1984. 364 с.

6. Ляхов Г.М. Ударные волны в многокомпонентных средах // Изв. АН СССР, Механика и машиностроение. 1959. № 1. С. 46–49.

7. Исмаилов Р.Ш., Курбанов Н.Т., Иманов Ф.А. Об одной динамической задаче линейной вязкоупругости // Уч. записи АГНА. Баку.1998 №2. С. 71–79.

8. Ромалис Н.Б., Тамуж В.П. Разрушение структурно-неоднородных тел. Рига.: Зинатне, 1989. 224 с.

9. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: «Высшая школа», 1976. 276 с.

10. Филиппов И.Г., Бахрахмов Б.М. Некоторые двухмерные волны в двух компонентных средах // Изв. АН Уз ССР. 1977. № 2. С. 33–39.

11. Жгутов В.М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та, сер. «Строительство, транспорт». 2007. № 4. С. 20–23.

12. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: «Мир», 1982. 333 с.

13. Кийко И.А. Ильясов М.Х., Распространение гармонических волн в двухкомпонентной двухслойной полосе // Вест. Моск. ун-та, Мат., мех. 1976. № 5. С. 103–106.

14. Косачевский Л.Я. О распространению упругих волн в двухкомпонентных средах // ПММ. 1959. Т. 23. С. 1115–1123.

15. Онисько Н.И., Шемякин Е.И. Движение свободной поверхности однородного грунта при подземном взрыве // ПМТФ. 1961. № 4. С. 82–94.

16. Талбатов Ю.А. Свободные колебания сварной многослойной цилиндрической оболочки. Проблемы машиностроения. Киев, 1982, №17. С. 32–33.

17. Курбанов Н.Т. Исследование одномерных динамических задач линейной вязкоупругости / Астраханский государственный университет // «Прикаспийский журнал». Астрахань. 2008. № 2. С. 53–57.

18. Аленицын А.Г. О задаче Лэмба неоднородного упругого полупространства // «Проблемы матем. физики». Изд.-во Ленингр. ун-та, 1966. вып. 1. С. 5–32.

19. Горбачаев В.И., Победря Б.Е. Об упругом равновесии неод-нородных полос // Изв. АН СССР, МТТ. 1979. № 5. С. 111–118

20. Слепян Л.П. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 343 с.

References

1. Abdikarimov R.A., Zhgutov V.M. Matematicheskie modeli zadach nelinejnoj dinamiki vjazkouprugih ortotropnyh plastin i obolochek peremennoj tolshhiny //Inzhenerno–stroitel'nyj zhur-nal. Sankt-Peterburg, 2010, №6, s. 38-47.

2. Il'jasov M.H., Kurbanov N.T. O rassprostranenii nestacionarnyh voln v linejnyh vjazkouprugih materialah // VINITI, Moskva 1984, № 464-84, 27 s.

3. Arshinov G.A., Laptev S.V., Mogilevich L.I. Asimptoticheskij analiz prodol'nyh voln v fizicheski i geometricheski nelinejnyh vjazkouprugih sredah // Nauka Kubani. Ser. Problemy fiziko-matematicheskogo modeliro-vanija, 1999, s. 51-58.

4. Kristensen R. Vvedenie v mehaniku kompozitov. M.: «Mir», 1982, 333 s.

5. Pobedrja B.E. Mehanika kompozicionnyh materialov. M.: Izd. MGU, 1984, 364 s.

6. Ljahov G.M. Udarnye volny v mnogokomponentnyh sredah // Izv. AN SSSR, Mehanika i mashinostroenie. 1959. №1. s. 46-49.

7. Ismailov R.Sh., Kurbanov N.T., Imanov F.A. Ob odnoj dinami-cheskoj zadache linejnoj vjazkouprugosti. // Uch. zapisi AGNA. №2. Baku-1998 s. 71-79.

8. Romalis N.B., Tamuzh V.P. Razrushenie strukturno-neodnorodnyh tel. Riga. Zinatne.: 1989. 224 s.

9. Koltunov M.A. Polzuchest' i relaksacija. M.: «Vysshaja shkola» 1976, 276 s.

10. Filippov I.G., Bahrahmov B.M. Nekotorye dvuhmernye volny v dvuh komponentnyh sredah // Izv. AN Uz SSR, 1977, №2, s. 33-39.

11. Zhgutov V.M. Matematicheskie modeli i algoritmy issledovanija ustojchivosti pologih rebristyh obolochek pri uchete razlichnyh svojstv materiala // Izv. Orlovskogo gos. tehn. un-ta, ser. «Stroitel'stvo, transport», 2007, №4, s. 20-23.

12. Kristensen R. Vvedenie v mehaniku kompozitov. M.: «Mir», 1982, 333 s.

13. Kijko I.A. Il'jasov M.H., Rasprostranenie garmonicheskih voln v dvuhkomponentnoj dvuhslojnoj polose / Vest. Mosk. un-ta, Mat., meh., №5, 1976, s. 103-106.
14. Kosachevskij L.Ja. O rasprostraneniju uprugih voln v dvuhkom-ponentnyh sredah // PMM, 1959. t. 23. s. 1115-1123.
15. Onis'ko N.I., Shemjakin E.I. Dvizhenie svobodnoj poverhnosti odnorodnogo grunta pri podzemnom vzryve / PMTF, №4, 1961, s. 82-94.
16. Talbatov Ju.A. Svobodnye kolebanija svarnoj mnogoslojnoj cilindricheskoj obolochki. Problemy mashinostroenija // Kiev, 1982, №17, s. 32-33.
17. Kurbanov N.T. Issledovanie odnomernyh dinamicheskih zadach linejnoj vjazkouprugosti // Astrahanskij Gosudarstvennyj Universitet, «Prikaspijs-kij zhurnal», Astrahan', 2008, №2, s. 53-57.
18. Alenicyn A.G. O zadache Ljemba neodnorodnogo uprugogo polupro¬stranstva // V. sb.: «Problemy matem. fiziki», Izd.- vo, Leningr. Un-ta, vyp 1, 1966, s. 5-32.
19. Gorbachaev V.I., Pobedrja B.E. Ob uprugom ravnovesii neod-norodnyh polos // Izv. AN SSSR, MTT, 1979, №5, s.111-118
20. Slepjan L.P. Integral'nye preobrazovanija v nestacionarnyh zadachah mehaniki. L.: Sudostroenie, 1980, 343 s.