

УДК 514.84+517.9

UDC 514.84+517.9

**ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ В ОКРЕСТНОСТИ
ЗВЕЗДЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ
ТУРБУЛЕНТНОСТЬ**

**GRAVITY FIELD IN THE VICINITY OF
STARS AND GEOMETRIC TURBULENCE**

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
*Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto,
Canada*

В работе исследованы решения уравнений Эйнштейна для пустого пространства, описывающие гравитационное поле вблизи звезды типа Солнца. Учитывается собственное поле звезды, движение звезды вокруг центра галактики, движение галактики относительно центра местного суперкластера и расширение Вселенной. Результирующее гравитационное поле вблизи звезды имеет сложную структуру, что приводит к крупномасштабной геометрической турбулентности, связывающей большие и малые масштабы в этой задаче

In this article, the solutions of Einstein's equations for empty space, describing the gravitational field near the Sun-like star have been investigated. We have accounted the own field of the star, the motion of the star around the galactic center, the motion of the galaxy relative to the center of the local supercluster and the expansion of the Universe. The resulting gravitational field near the star has a complex structure, which leads to large-scale geometric turbulence linking large and small scales in this problem

Ключевые слова: ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ
ТУРБУЛЕНТНОСТЬ, ОБЩАЯ ТЕОРИЯ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Keywords: GENERAL RELATIVITY,
GEOMETRIC TURBULENCE.

Введение

Влияние расширения Вселенной на гравитационное поле вблизи звезды рассматривалось в работах [1-4] и других. Общий вывод, который следует из указанных работ, сводится к утверждению, что окружение звезды практически не влияет на гравитационное поле в ее окрестности. Однако этот вывод явно противоречит наличию движения звезд типа Солнца вокруг центра Галактики, относительно центра местного скопления галактик и т.д. Существующая в природе иерархия движений свидетельствует о наличии сложной структуры гравитационного поля в окрестности звезды, что никак не учитывается в решениях, приведенных в работах [1-4].

В работах [5-8] исследованы метрики галактик, кластеров галактик, и метрики неоднородной вращающейся Вселенной. В работе [9] указаны метрики, описывающие геометрическую турбулентность – сложное явление,

закрывающееся в перемешивании движений разного масштаба. В настоящей работе метрики [5-9] использованы для моделирования движения звезды и гравитационного поля в ее окрестности.

Принцип эквивалентности и уравнения движения звезды

Уравнения Эйнштейна имеют вид [10-13]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

$$R_{ik} = R_{jik}, \quad R = g^{ik} R_{ik},$$

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma_{\beta\delta}^{\mu} \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha}, \quad (2)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right)$$

$R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно; $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ - тензор Римана, Γ_{kl}^i - символы Кристоффеля второго рода.

В общем случае уравнения движения материальной точки в гравитационном поле можно представить в форме [10-13]

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{ds} \frac{dx^{\lambda}}{ds} = 0 \quad (3)$$

Поставим задачу о моделировании гравитационного поля вблизи звезды, движущейся в трех ортогональных направлениях под влиянием двух крупномасштабных центров притяжения – центра галактики и центра местного скопления галактик, а также гравитационного поля, обусловленного процессом расширения Вселенной. Из общих соображений ясно, что гравитационные поля Вселенной и Суперкластера связаны между собой [6-8], тогда как поле галактики существует в зависимости от местных условий [5]. Рассмотрим метрику вида [9]

$$ds^2 = \exp[h(t, z)]dt^2 - \exp[f(x, y)]dx^2 - \exp[g(f)]dy^2 - \exp[p(h)]dz^2 \quad (4)$$

Уравнения поля для пустого пространства в метрике (4) сводятся к двум уравнениям второго порядка

$$\begin{aligned} e^h [2h_{zz} - (p'-1)h_z^2] - e^p [2p'h_{tt} + (2p''+p'^2-p')h_t^2] &= 0 \\ e^f [2f_{yy} - (g'-1)f_y^2] + e^g [2g'f_{xx} + (2g''+g'^2-g')f_x^2] &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что уравнения (5) могут быть решены независимо. Каждое из них изменяет свой тип при изменении знаков производных p', g' соответственно.

Так, например, первое уравнение (5) изменяет свой тип в зависимости от знака производной p' :

в области $p' < 0$ первое уравнение (5) имеет эллиптический тип;

в области $p' > 0$ первое уравнение (5) имеет гиперболический тип;

в области $p' = 0$ первое уравнение (5) имеет параболический тип.

Полагая в уравнениях (5), что $p' = 0, g' = 0$, находим

$$\begin{aligned} e^h (2h_{zz} + h_z^2) - e^p 2p''h_t^2 &= 0 \\ e^f (2f_{yy} + f_y^2) + e^g 2g''f_x^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Полученные уравнения (5)-(6) решают поставленную задачу о нахождении метрик, которые описывают гравитационное поле вблизи звезды с учетом трех типов движений. Здесь первое уравнение (5) описывает нестационарное гравитационное поле, обусловленное расширением Вселенной и поле Суперкластера, а второе уравнение (5) описывает статическое поле в окрестности центра Галактики. Система уравнений параболического типа (6) описывает геометрическую турбулентность [9].

Вычисляя коэффициенты аффинной связности в метрике (4) находим

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}h_t, & \Gamma_{41}^1 &= \frac{1}{2}h_z, & \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2}e^{p-h}p'h_t \\
 \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}f_x, & \Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{2}f_y, & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2}e^{g-f}g'f_x, \\
 \Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2}e^{f-g}f_y, & \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2}g'f_x, & \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2}g'f_y, \\
 \Gamma_{11}^4 &= \frac{1}{2}e^{h-p}h_z, & \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2}p'h_t, & \Gamma_{44}^4 &= \frac{1}{2}p'h_z
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Траектории частиц в метрике (4) описываются системой уравнений

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{h_t}{2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{p'h_t}{2}e^{p-h}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + h_z\frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds} &= 0 \\
 \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{h_z}{2}e^{h-p}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{p'h_z}{2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + p'h_t\frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds} &= 0 \\
 \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{f_x}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{g'f_x}{2}e^{g-f}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + f_y\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds} &= 0 \\
 \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{f_y}{2}e^{f-g}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{g'f_y}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + g'f_x\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Здесь первые два уравнение описывают движение в плоскости переменных (t, z) , а два другие – в плоскости (x, y) . Такое разделение движения является весьма существенным упрощением задачи, связанной с исследованием движения звезд.

Возникновение геометрической турбулентности

Покажем, что в метрике (4) могут возникать нелинейные волны, имеющие хаотическое поведение [9]. Рассмотрим случай, когда первое уравнение (5) имеет параболический тип (6):

$$e^h(2h_{zz} + h_z^2) - e^p 2\sigma h_t^2 = 0
 \tag{9}$$

Здесь $\sigma = p''$. Уравнение (9) можно привести к квазилинейному виду, полагая $u = h_t$ и выполняя однократное дифференцирование по времени, в результате находим

$$e^{h-p}(u_{zz} + u_z h_z) + \sigma u^3 = 2\sigma u u_t, \quad h_t = u \quad (10)$$

Уравнение (10) относится к типу уравнений с переменной вязкостью [14-15]. Уравнения такого типа были предложены Н.Н. Яненко для моделирования устойчивости вязких течений [14]. В математической литературе уравнение типа (10) иногда называют параболическим уравнением с переменным направлением времени. В общей теории относительности такая терминология не только неприемлема, но и противоречит физическому смыслу уравнения (10), которое меняет тип при изменении знака функции $u = h_t$ или параметра $\sigma = p''$, тогда как знак времени остается постоянным.

Для уравнения (10) можно сформулировать задачу в ограниченной области с начальными данными и периодическими граничными условиями:

$$u(0, z) = u_0(z), \quad -L \leq z \leq L, \quad u(t, -L) = u(t, L) \quad (11)$$

При задании начальных данных отрицательных во всей области в случае $\sigma = p'' > 0$ развивается неустойчивость – рис. 1. В данной задаче потеря устойчивости приводит к развитию геометрической турбулентности, поскольку соответствующая модель описывает изменение метрики пространства-времени.

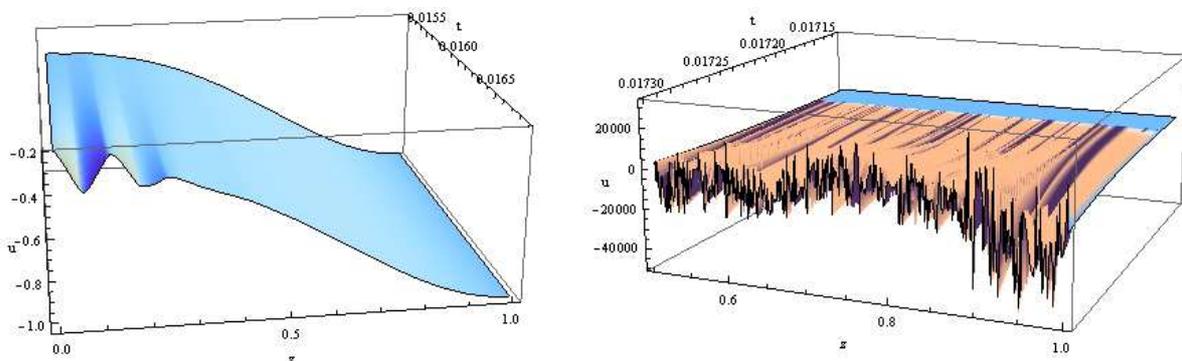


Рис. 1. Переход к геометрической турбулентности в модели (10).

Следовательно, для существования решений задач для уравнений типа (10) необходимы специальные ограничения, связанные с метрикой пространства-времени. Например, можно потребовать, чтобы во всей области движения выполнялось условие

$$h_t = u > 0 \quad (12)$$

В природе наблюдается процесс расширения Вселенной, который называется инфляцией [10-11, 13, 16]. В этом процессе метрика изменяется по экспоненте, что соответствует условию (12). Однако локально условие (12), видимо, может нарушаться повсеместно, что в силу уравнения (9) приводит к взрывной неустойчивости – рис.1.

Среди физических процессов, заканчивающихся взрывной неустойчивостью, можно отметить распады элементарных частиц, атомных ядер, гидродинамическую турбулентность, галактические струи, взрывы сверхновых и Большой взрыв, с которого началась история Вселенной.

Если турбулентность возникла вдоль оси вращения звезд в галактике, то ее влияние на траектории в плоскости вращения осуществляется через параметр времени $t = t(s)$. Если бы во Вселенной не существовало единого для всех процессов времени, то влияние геометрической турбулентности сказывалось бы только на движении вдоль оси системы. Однако наличие времени, как четвертой координаты, приводит к тому, что турбулентное движение передается через изменение времени вплоть до самых малых масштабов, включая атомный и субатомный масштабы.

Статическая метрика группы суперкластеров

В настоящее время метрику в масштабе гигапарсек моделируют, главным образом, на основе Λ CDM модели Вселенной [17-18] и неоднородной модели [19]. Основанием для использования неоднородных

метрик является тот факт, что на всех доступных для прямого наблюдения масштабах Вселенная представляется как неоднородное пространство, содержащее кластеры галактик сколь угодно большого размера. В качестве примера можно привести открытую недавно структуру размером не менее двух-трех гигапарсек [20].

Мы предполагаем, что существует класс метрик, охватывающий, с одной стороны, аксиально-симметрические поля типа [5-6], а, с другой стороны, метрики типа [19]. Искомый метрический тензор имеет вид

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = -e^{v-\mu}, \\ g_{13} &= g_{23} = g_{34} = g_{14} = g_{24} = 0, \\ g_{33} &= -f, g_{44} = e^\mu \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\mu = \mu(\rho, z)$, $v = v(\rho, z)$, $f(\rho, z)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна. В частном случае, который рассматривается ниже, положим $f(\rho, z) = \rho^2$. В результате находим следующий вид тензора Эйнштейна

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{2\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \right), \\ G_{12} &= G_{21} = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) - \frac{3}{4} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho \partial z}, \\ G_{22} &= -\frac{1}{2\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \left(-\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right), \\ G_{33} &= \frac{\rho^2 e^{\mu-v}}{4} \left(2 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right), \\ G_{44} &= \frac{e^{2\mu-v}}{2} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Используя выражения (14) можно представить уравнения модели в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} &= 2\lambda_4 e^{\nu-\mu}, \\ \frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] &= 2\lambda_3 e^{\nu-\mu}, \\ \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \right] &= 2(\lambda_1 + \lambda_2) e^{\nu-\mu}. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь левая часть третьего уравнения (15) равно сумме $G_{11} + G_{22}$.

Заметим, что первое уравнение (15) зависит только от разности $\mu - \nu$, поэтому его можно проинтегрировать в общем виде и установить тем самым вид плотности $e^{\nu-\mu}$. Если скопление галактик обладает центральной симметрией, то, полагая $\mu - \nu = w(\zeta)$, $\zeta = \sqrt{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}$, находим из первого уравнения (15)

$$w'' + w'/\zeta = 2\lambda_4 e^{-w} \tag{16}$$

Рассмотрим случай $\lambda_4 > 0$. Интегрируя уравнение (16), находим

$$w(\zeta) = \ln \left(\frac{\gamma(\kappa\zeta)^{2-\alpha}}{\alpha^4} \left(\frac{(\kappa\zeta)^\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha^2}{2} \right)^2 \right) \tag{17}$$

Где $\kappa = \sqrt{2\lambda_4}$, α, β - постоянные интегрирования.

Для нахождения гравитационных потенциалов в первом приближении положим $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Вычитая из третьего уравнения (15) первое и второе уравнения, находим

$$\frac{2}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} = -2\lambda_4 e^{-w(\zeta)} \tag{18}$$

Предполагая, что центр симметрии скопления лежит на оси симметрии, находим из уравнения (18) гравитационный потенциал в форме

$$\mu = 2\varphi/c^2 = \frac{\alpha^3 \gamma}{\alpha^2 \gamma + 2(2\lambda_4)^{\alpha/2} (\rho^2 + (z - z_0)^2)^{\alpha/2}} + \mu_0 \tag{19}$$

Потенциал (19) зависит от 5 констант, которые можно определить из согласования выражения (19) с течением Хаббла в нерелятивистском случае. Положим $z_0 = 0$, разложим правую часть (19) по степеням расстояния до центра скопления, имеем

$$\mu = 2\varphi/c^2 = \mu_0 + \frac{\alpha^3 \gamma}{\alpha^2 \gamma + 2(2\lambda_4)^{\alpha/2} R^\alpha} = \mu_0 + \alpha - \frac{2(2\lambda_4)^{\alpha/2} R^\alpha}{\alpha \gamma} + \dots \quad (20)$$

Отсюда находим неизвестные параметры

$$\alpha = 2, \mu_0 = -2, b = -\frac{\lambda_4}{\gamma} c^2, \gamma = 4, \lambda_4 = \frac{2H^2}{c^2}. \quad (21)$$

Здесь H - постоянная Хаббла. Интегрируя уравнение (18) при заданных параметрах (21), находим

$$\mu = \mu_0 + \frac{4}{2 + k^2 \zeta^2} + \frac{4k^2 \rho_0 (\rho_0 - \rho)}{(2 + k^2 (z - z_0)^2)(2 + k^2 \zeta^2)} - \frac{4k\rho_0 \arctan\left(\frac{k(\rho - \rho_0)}{\sqrt{2 + k^2 (z - z_0)^2}}\right)}{(2 + k^2 (z - z_0)^2)^{3/2}} \quad (23)$$

Здесь обозначено $k = H/c$; ρ_0, z_0 - координаты центра кластера. Полученное выражение (23) описывает гравитационное поле, связывающее области пространства-времени вплоть до гигапарсек. Потенциал (23) зависит от константы $k = H/c$, которая характеризует расширение Вселенной. Потенциал (23), впервые полученный в нашей работе [8], описывает течение Хаббла в релятивистском случае, когда скорость течения приближается к скорости света.

Из выражения (23) следует, что гравитационное поле в группе суперкластеров целиком обусловлено расширением Вселенной. Очевидно, что гравитационное поле нашей Галактики, принадлежащей местному суперкластеру, связано, в том числе, с положением в суперкластере. Из-за движения Солнца гравитационные поля могут изменяться во времени, даже в

случае статической метрики. Это изменение можно учесть в явном виде, используя метрику (4) и уравнения (5).

Нестационарное гравитационное поле

Используем потенциал (23), как начальные данные для первого уравнения (5), в котором положим $p(h) = h$, в результате получим волновое уравнение

$$h_{zz} - h_{tt} = 0 \tag{24}$$

Общее решение уравнения (24) имеет вид $h = h(z \pm t)$. Предполагая, что в начальный момент времени $h(0, z) = \mu(z)$, находим потенциал, описывающий нестационарное гравитационное поле

$$h(t, z) = \mu_0 + \frac{4}{2 + k^2 \zeta^2(t)} + \frac{4k^2 \rho_0 (\rho_0 - \rho)}{(2 + k^2 (z \pm t - z_0)^2)(2 + k^2 \zeta^2(t))} - \frac{4k\rho_0 \arctan\left(\frac{k(\rho - \rho_0)}{\sqrt{2 + k^2 (z \pm t - z_0)^2}}\right)}{(2 + k^2 (z \pm t - z_0)^2)^{3/2}} \tag{25}$$

Здесь $\zeta(t) = \sqrt{(\rho - \rho_0)^2 + (z \pm t - z_0)^2}$. Следовательно, нестационарное поле в общем случае зависит от четырех констант, две из которых характеризуют положение центра кластера, константа $k = H/c$ характеризует влияние расширения Вселенной на гравитационное поле в окрестности звезды, положение которой относительно оси симметрии кластера задается координатами ρ, z .

На рис. 2 представлены поверхности равного уровня гравитационного потенциала (25) в зависимости от координат и времени для $k = 1, \rho_0 = 0.5, z_0 = 1, z = 0$ и функция $u = h_t$ в зависимости от времени и координаты звезды при $k = 1, \rho_0 = 0.5, z_0 = 1, y = z = 0$.

Из представленных на рис. 2 данных следует, что функция $u = h_t$ может изменять знак в зависимости от времени, поэтому потенциал типа (25) может быть источником геометрической турбулентности, возникающей по механизму, описанному выше. Приведенный пример показывает, что гравитационное поле вблизи звезды не только зависит от параметров расширения Вселенной, но, возможно, что этими параметрами определяется эволюция самой звезды.

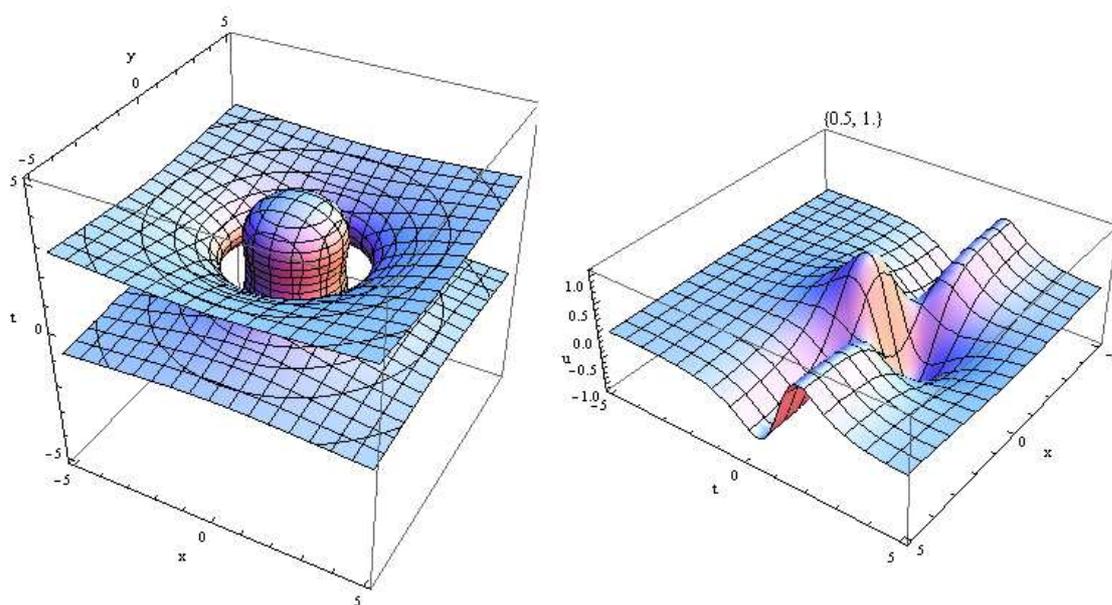


Рис. 2. Поверхности равного уровня гравитационного потенциала (25) в зависимости от координат звезды и времени для $k = 1, \rho_0 = 0.5, z_0 = 1, z = 0$ и функция $u = h_t$ в зависимости от времени и координаты звезды при $k = 1, \rho_0 = 0.5, z_0 = 1, y = z = 0$.

Действительно, хорошо известно, что в турбулентных потоках энергия передается от больших масштабов к малым. Геометрическая турбулентность также характеризуется наличием потока энергии от больших масштабов к малым – рис. 1. Для возникновения геометрической турбулентности

требуются специальные условия, главным из которых в случае метрики (4) является условие $p' = 0$. Это условие не может быть выполнено для линейного уравнения состояния $p(h) = h$, использованного при выводе уравнения (24).

Можно, однако, подобрать уравнение состояния, обладающее требуемыми свойствами. Например, для уравнения состояния $p(h) = h \ln h$ находим

$$p' = \ln h + 1, \quad p'' = 1/h \quad (26)$$

Поэтому в окрестности точки $h = e^{-1}$ имеем

$$p' = 0, \quad p'' = e$$

Следует ожидать, что в случае уравнения состояния (26) при приближении к точке $h = e^{-1}$ первое уравнение (5) будет вырождаться в уравнение (9). При задании начальных данных в виде потенциала (23) на части решений будет наблюдаться неустойчивость, ведущая к геометрической турбулентности.

На рис. 3 представлены данные моделирования развития геометрической неустойчивости на основе первого уравнения (5) с уравнением состояния в форме (26) и с начальными данными в виде потенциала (23). Уравнения модели имеют вид:

$$e^h [2h_{zz} - (p' - 1)h_z^2] - e^p [2p'h_{tt} + (2p'' + p'^2 - p')h_t^2] = 0$$

$$p(h) = h \ln h, \quad h(0, z) = \mu(z), \quad h_t(0, z) = 0, \quad h(-L) = h(L) \quad (27)$$

В этом случае наблюдается взрывная неустойчивость, в результате которой метрика изменяется практически скачком. Решение задачи (27) можно сделать регулярным на достаточно большом промежутке времени, если положить $p(h) = h \ln(h^2 + 1)$, в результате модель (27) принимает вид

$$e^h[2h_{zz} - (p'-1)h_z^2] - e^p[2p'h_{tt} + (2p''+p'^2-p')h_t^2] = 0$$

$$p(h) = h \ln(h^2 + 1), \quad h(0, z) = \mu(z), \quad h_t(0, z) = 0, \quad h(-L) = h(L) \quad (28)$$

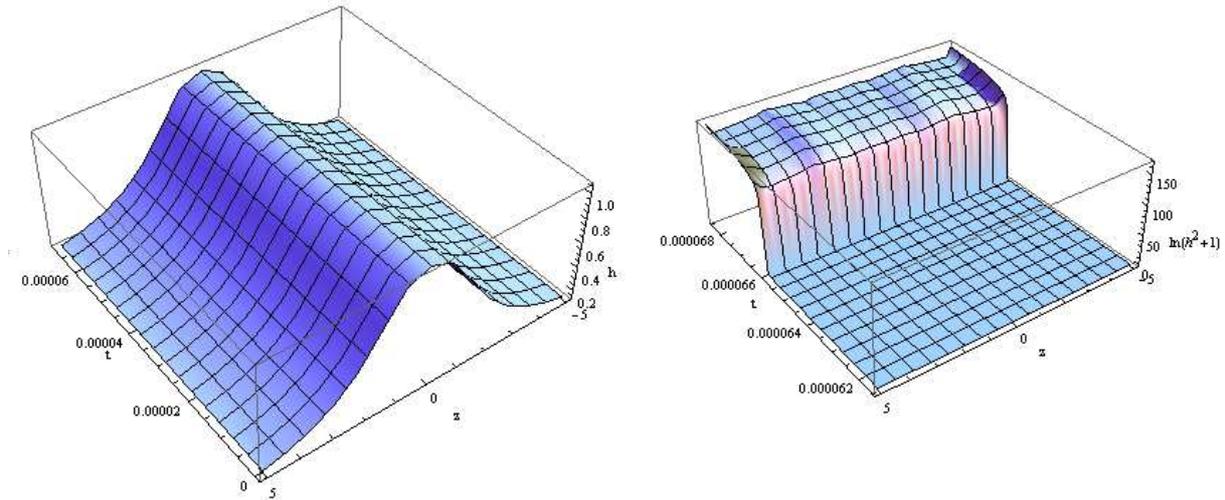


Рис. 3. Взрывная неустойчивость в модели (27)

На рис.4 показан переход к геометрической турбулентности в модели (28). Таким образом, мы показали, что переход к геометрической турбулентности наблюдается не только в параболической модели (9), но и в исходной модели (5) с уравнением состояния, удовлетворяющим условию $p' = 0$ - рис. 3-4.

Отметим, что в модели (28) условие $p' = 0$ достигается только при $h = 0$. Но в этом случае находим, что $p = 0$, поэтому метрика (4) в плоскости (t, z) принимает вид метрики Минковского

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 \quad (29)$$

Мы видим, что плоская метрика Минковского (29) является неустойчивой. Этот факт, на наш взгляд, является основной причиной, по

которой электрический заряд излучает электромагнитные волны при движении с ускорением.

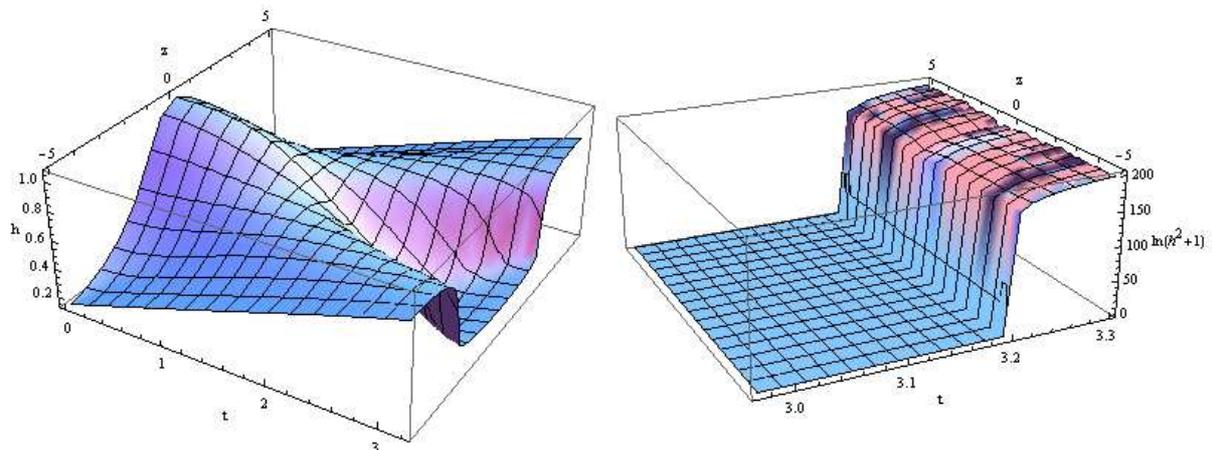


Рис. 4. Переход к геометрической турбулентности в модели (28).

Наконец, заметим, что уравнения моделей (27)-(28) симметричны относительно замены $t \rightarrow -t$. Следовательно, полученные данные моделирования, представленные на рис. 3-4, можно рассматривать и в обратную сторону, как переход от геометрической турбулентности к гладкому решению, что соответствует процессу перехода к инфляции после Большого взрыва.

Гравитационное поле галактики

Положим во втором уравнении (5) $g(f) = f$, тогда получим

$$f_{yy} + f_{xx} = 0 \quad (30)$$

Уравнение типа (30) было использовано в работе [5] для моделирования кривых вращения газа в галактиках в случае круговых траекторий. В этом случае общее решение уравнения (30) имеет вид

$$f(\rho) = a \ln \rho + f_0 \quad (31)$$

Здесь a, f_0 - некоторые константы, характеризующие распределение гравитационного потенциала во внутренней области галактики. Однако поле галактики зависит также и от ее окружения. В работе [5] для нахождения гравитационного поля галактики была использована метрика Вейля [12, 20]. В результате было получено следующее выражение потенциала галактики

$$\varphi(\rho, 0) = -\frac{m}{\rho} + a \ln \rho + b\rho^2 + k\rho + \varphi_0 \quad (32)$$

Отметим, что линейный и квадратичный потенциалы (32) описывают вклад гравитационного поля Суперкластера галактик [6-8], т.е. вклад расширения Вселенной. На рис. 5 представлен потенциал нашей Галактики, вычисленный по уравнению (32) для двух вариантов: без центрального источника, $m = 0$, и с центральным источником.

Используя величину расстояния от Солнца до центра Галактики – 8.5 килопарсек, и величину эксцентриситета эллипса траектории Солнца вокруг центра Галактики – 0.052, можно оценить изменение гравитационного потенциала, обусловленное расширением Вселенной, по уравнению (32), имеем

$$\delta\varphi = (2b\rho + k)\delta\rho = \begin{cases} 158.4 \text{ km}^2 / \text{s}^2, & m = 0 \\ -50.7 \text{ km}^2 / \text{s}^2, & m \neq 0 \end{cases} \quad (33)$$

Изменение гравитационного потенциала (34) происходит за четверть периода, что для Солнечной системы составляет около 50 миллионов лет или $1.58 \cdot 10^{15}$ сек. По порядку величины это соответствует ускорению 10^{-11} m/s^2 , что на 9 порядков меньше, чем ускорение Земли на орбите Солнца - $6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$, и на 36 порядков больше, чем оценка, полученная в работе [4] - $-3.17 \cdot 10^{-47} \text{ m/s}^2$.

Столь большое различие объясняется тем, что авторы [4] исключили из рассмотрения все промежуточные масштабы движения, рассматривая

расширение Вселенной как однородный процесс, затрагивающий Солнце. Но реально расширение Вселенной, прежде всего, сказывается на метрике Суперкластера (23), в которой осуществляется движение нашей Галактики. Метрика Галактики зависит от метрики Суперкластера, а движение Солнца осуществляется в метрике Галактики, а не в метрике FRW, как предполагали авторы [4]. В этой связи заметим, что оценки влияния расширения Вселенной на гравитационное поле в окрестности звезды, сделанные в работах [1-3], также не соответствуют действительности.

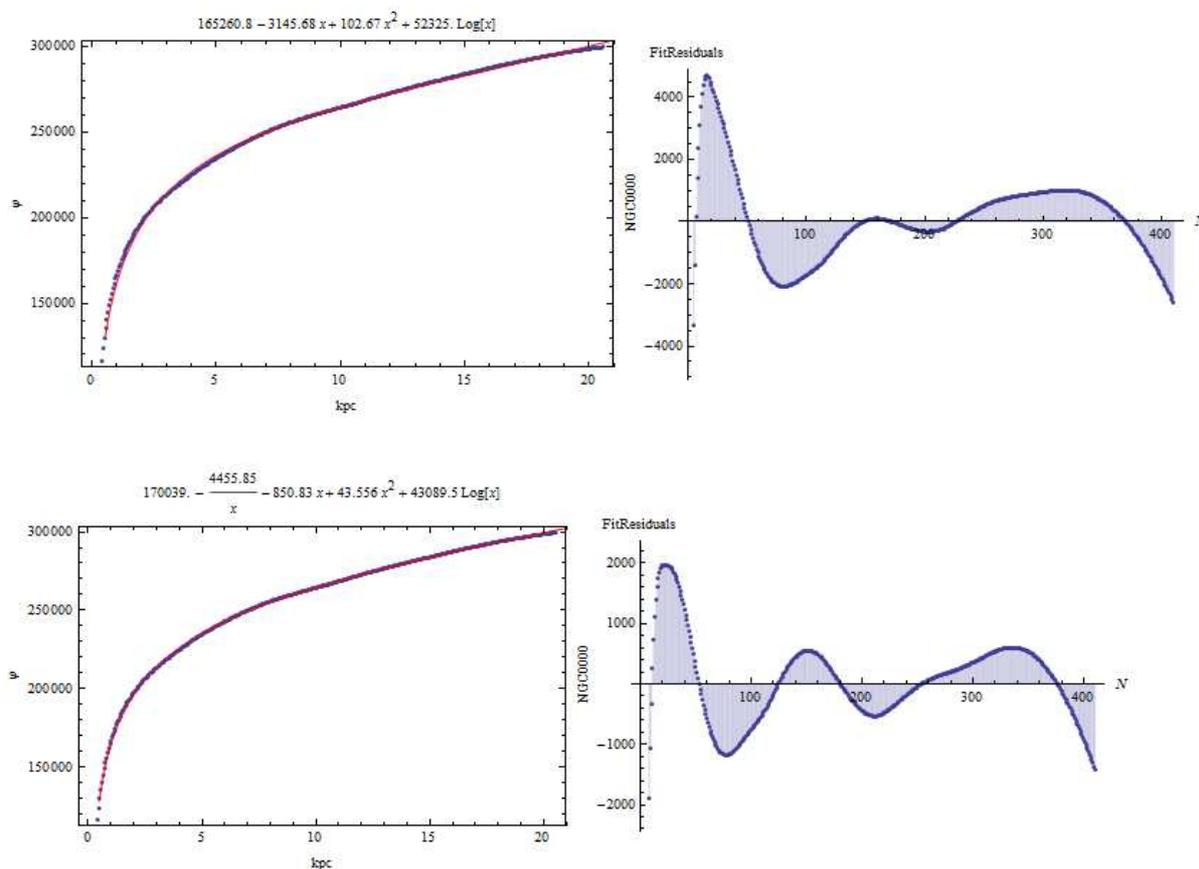


Рис. 5. Зависимости гравитационного потенциала (в $\text{км}^2/\text{с}^2$) от радиальной координаты в нашей Галактике, рассчитанные по уравнению (32). Точками нанесены данные [21-22].

Другую оценку влияния расширения Вселенной на гравитационное поле в окрестности звезды можно получить на основе выражения (25) описывающего крупномасштабную волну, распространяющуюся в пределах Суперкластера - рис. 2. Система уравнений, описывающих динамику звезды, имеет в этом случае вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{h_t}{2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{h_z}{2} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + h_z \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{h_z}{2} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + \frac{h_t}{2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + h_t \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Положим $h = h(\zeta)$, $\zeta = t + z$, тогда система уравнений (34) сводится к одному уравнению

$$\frac{d^2 \zeta}{ds^2} + h_\zeta \left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^2 = 0 \quad (35)$$

С другой стороны, полагая в (34), что $h = h(\xi)$, $\xi = z - t$, находим

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} + h_\xi \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2 = 0 \quad (36)$$

Уравнения (35) и (36) можно проинтегрировать, в результате находим

$$\int e^{-h(\zeta)} d\zeta = \zeta_s(0) e^{-h(0)} (s - s_0), \quad \int e^{-h(\xi)} d\xi = \xi_s(0) e^{-h(0)} (s - s_0) \quad (37)$$

Если метрика является статической типа (23), то полагая в первом приближении $t = s$, находим из второго уравнения выражение ускорения

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{kc^2}{2} u = -\frac{Hc}{2} u \quad (38)$$

Безразмерная функция u представлена на рис. 2. Как видно из данных, приведенных на рис. 2, функция u изменяется в ограниченных пределах порядка единицы. Поэтому порядок величины ускорения полностью определяется сомножителем $kc^2 / 2 = Hc / 2 \approx 3.3 \cdot 10^{-10} m / s^2$. Следовательно, ускорение, обусловленное движением Солнца в

Суперкластере ортогонально к плоскости Галактики, на 37 порядков больше, чем ускорение, вычисленное в работе [4].

Указанную неоднородность пространства можно легко измерить в эксперименте с интерферометром Майкельсона [23]. Действительно, согласно полученным выше результатам, ускорения в плоскости Галактики и ортогонально к ней различаются на порядок. Поэтому при вращении интерферометра следует ожидать сдвиг полос, обусловленный релаксацией атомов к новому положению равновесия в различных плечах интерферометра.

По порядку величины обсуждаемый эффект можно сравнить с тем, который ожидался в известном эксперименте [23]. Заметим, что кластер Девы, в направлении которого движется наша Галактика, расположен вблизи северного полюса галактической системы координат. Следовательно, можно использовать метрику (4) для описания движение Солнца в галактической плоскости и вдоль ортогональной координаты. В случае линейного уравнения состояния приведем метрику (4) к виду

$$ds^2 = \exp[h(t, z)](dt^2 - dz^2) - \exp(f)(dx^2 + dy^2) \quad (39)$$

Из полученного выражения следует, что отношение длин плеч интерферометра в плоскости Галактики и ортогонально к ней составляет $\exp[(h - f)/2]$.

Как известно, скорость движения Галактики относительно фонового космического микроволнового излучения составляет около 552 км/с, а скорость в Суперкластере, как часть течения Хаббла, около 967 км/с [24]. Наблюдения лучше всего вести при восходящем знаке Девы, что в опытах [23] соответствует наблюдению в полдень. Однако эти наблюдения должны проводиться на протяжении года, тогда будет зарегистрирован очевидный эффект, связанный с неоднородностью метрики в окрестности Солнца.

Наконец, заметим, что наличие иерархии масштабов в задаче о влиянии расширения Вселенной на гравитационное поле в окрестности звезды является существенным фактором, влияющим на эволюцию Солнечной системы. Приведенные выше модели демонстрируют новое явление – геометрическую турбулентность [9], которая может лимитировать время существования звезды.

Библиографический список

1. A. Einstein, E. Straus. Influence of the Expansion of Space on the Gravitation Fields, Surrounding the Individual Stars// Rev. Modern Phys., 17, 1945, 120—124.
2. Mc Vittie// M. N. R. A. S., 92, 499—518, 1932; 93, 325—339, 1933.
3. G. Jarnefe. Ann. Acad. Sci., Fenn., Al, 12, 3—38, 1942; Ann. Acad. Sci. Fenn., A40, 3, 1940; Ark. mat. astron. phys., 27A, 1940, 15.
4. F. I. Cooperstock, V. Faraoni and D. N. Vollick. The influence of the cosmological expansion on local systems//arXiv:astro-ph/9803097v1
5. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрика галактик // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>
6. Трунев А.П. Метрика местного суперкластера галактик и общая теория относительности // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 893 – 916. – IDA [article ID]: 0941310061. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/61.pdf>
7. Трунев А.П. Cosmology of inhomogeneous rotating universe and reality show// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №01(095). С. 511 – 540. – IDA [article ID]: 0951401028. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/28.pdf>
8. Трунев А.П. Общая теория относительности и метрики неоднородной вращающейся вселенной // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №01(095). С. 486 – 510. – IDA [article ID]: 0951401026. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/26.pdf>
9. Трунев А.П. Геометрическая турбулентность // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №05(099). – IDA [article ID]: 0991405069. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/69.pdf>

10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.2. Теория поля. – 7 изд. – М.: Наука. - 1988. - стр. 329-330; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon, New York, second edition, 1962.
11. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения (2-е изд.). – М.: ГИФМЛ, 1961.
12. A.Z. Petrov. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
13. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.
14. Яненко Н. Н., Новиков В. А. Об одной модели жидкости со знако-переменным коэффициентом вязкости // Численные методы механики сплошной среды, № 2, 1973.
15. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа. М., 1983.
16. Planck Collaboration: Cosmological parameters. – Planck 2013 results, Astronomy & Astrophysics manuscript, March 21, 2013; Planck 2013 results. XXVI. Background geometry and topology of the Universe. Submitted to A&A (2013).
17. Gabriella De Lucia, Simone Weinmann, Bianca M. Poggianti, Alfonso Aragon-Salamanca, Dennis Zaritsky. The environmental history of group and cluster galaxies in a Λ CDM Universe//arXiv:1111.6590v2 [astro-ph.CO] 23 Mar 2012M.
18. A. Troxel, Austin Peel, Mustapha Ishak. Effects of anisotropy on gravitational infall in galaxy clusters using an exact general relativistic model//arXiv:1311.5651 [astro-ph.CO]
19. P. Szekeres. A class of inhomogeneous cosmological models//Comm. Math. Phys. Volume 41, Number 1 (1975), 55-64.
20. Weyl H., Zur Gravitationstheorie, Ann. Phys. 54, 1917; Weyl H., Bemerkung uber die axialsymmetrischen Losungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Ann. Phys. 59, 1919.
21. Yoshiaki Sofue and Vera Rubin. Rotation Curves of Spiral Galaxies// Ann. Rev. Astron. Astrophys. 39 (2001) 137-174.
22. Sofue Y. 1999. Publ. Astron. Soc. Japan. 51:445// <http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/h-rot.htm>
23. A. A. Michelson, E. W. Morley. On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether // Amer. J. Sci., 1887 (3), 34, 333.
24. Sébastien Peirani, José Antonio De Freitas Pacheco. Mass Determination of Groups of Galaxies: Effects of the Cosmological Constant// arXiv:astro-ph/0508614v3

References

1. A. Einstein, E. Straus. Influence of the Expansion of Space on the Gravitation Fields, Surrounding the Individual Stars// Rev. Modern Phys., 17, 1945, 120—124.
2. Ms Vittie// M. N. R. A. S., 92, 499—518, 1932; 93, 325—339, 1933.
3. G. Jarnefe. Ann. Acad. Sci., Fenn., AI, 12, 3—38, 1942; Ann. Acad. Sci. Fenn., A40, 3, 1940; Ark. mat. astron. phys., 27A, 1940, 15.
4. F. I. Cooperstock, V. Faraoni and D. N. Vollick. The influence of the cosmological expansion on local systems//arXiv:astro-ph/9803097v1
5. Trunev A.P. Obshhaja teorija odnositel'nosti i metrika galaktik // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 360 – 384. – IDA [article ID]: 0941310027. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/27.pdf>

6. Trunев A.P. Metrika mestnogo superklastera galaktik i obshhaja teorija odnositel'nosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №10(094). S. 893 – 916. – IDA [article ID]: 0941310061. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/61.pdf>

7. Trunев A.P. Cosmology of inhomogeneous rotating universe and reality show// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №01(095). S. 511 – 540. – IDA [article ID]: 0951401028. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/28.pdf>

8. Trunев A.P. Obshhaja teorija odnositel'nosti i metriki neodnorodnoj vrashhajushhejsja vselennoj // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №01(095). S. 486 – 510. – IDA [article ID]: 0951401026. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/26.pdf>

9. Trunев A.P. Geometricheskaja turbulentnost' // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №05(099). – IDA [article ID]: 0991405069. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/69.pdf>

10. Landau L. D, Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika. T.2. Teorija polja. – 7 izd. – M.: Nauka. - 1988. - str. 329-330; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon, New York, second edition, 1962.

11. V.A. Fok. Teorija prostranstva, vremeni i tjagotenija (2-e izd.). – M.: GIFML, 1961.

12. A.Z. Petrov. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.

13. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.

14. Janenko N. N., Novikov V. A. Ob odnoj modeli zhidkosti so znako-peremennym koeficientom vjazkosti // Chislennye metody mehaniki sploshnoj sredy, № 2, 1973.

15. Lar'kin N. A., Novikov V. A., Janenko N. N. Nelinejnye uravnenija peremennogo tipa. M., 1983.

16. Planck Collaboration: Cosmological parameters. – Plank 2013 results, Astronomy & Astrophysics manuscript, March 21, 2013; Planck 2013 results. XXVI. Background geometry and topology of the Universe. Submitted to A&A (2013).

17. Gabriella De Lucia, Simone Weinmann, Bianca M. Poggianti, Alfonso Aragon-Salamanca, Dennis Zaritsky. The environmental history of group and cluster galaxies in a CDM Universe//arXiv:1111.6590v2 [astro-ph.CO] 23 Mar 2012M.

18. A. Troxel, Austin Peel, Mustapha Ishak. Effects of anisotropy on gravitational infall in galaxy clusters using an exact general relativistic model//arXiv:1311.5651 [astro-ph.CO]

19. P. Szekeres. A class of inhomogeneous cosmological models//Comm. Math. Phys. Volume 41, Number 1 (1975), 55-64.

20. Weyl H., Zur Gravitationstheorie, Ann. Phys. 54, 1917; Weyl H., Bemerkung uber die axialsymmetrischen Losungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Ann. Phys. 59, 1919.

21. Yoshiaki Sofue and Vera Rubin. Rotation Curves of Spiral Galaxies// Ann. Rev. Astron. Astrophys. 39 (2001) 137-174.

22. Sofue Y. 1999. Publ. Astron. Soc. Japan. 51:445// <http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/h-rot.htm>

23. A. A. Michelson, E. W. Mogley. On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether // Amer. J. Sci., 1887 (3), 34, 333.

<http://ej.kubagro.ru/2014/05/pdf/106.pdf>

24. Sébastien Peirani, José Antonio De Freitas Pacheco. Mass Determination of Groups of Galaxies: Effects of the Cosmological Constant// arXiv:astro-ph/0508614v3