

УДК 514.84

UDC 514.84

**АНОМАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ОРБИТ В
ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ****ORBIT ABNORMAL MOVEMENT IN GENERAL
RELATIVITY**

Трунев Александр Петрович
*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто,
Канада*

Alexander Trunev
*Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto,
Canada*

Дано решение задачи о смещении перигелия Меркурия в теории гравитации Эйнштейна, с учетом механизма образования материи из темной энергии. Показано, что наблюдаемая величина прецессии накладывает ограничение на уравнение состояния темной энергии в случае статических полей

The solution of the problem of the displacement of the perihelion of Mercury in Einstein's theory of gravitation, taking into account the mechanism of formation of matter from dark energy, has been obtained. It is shown that the observed value of the precession imposes a restriction on the equation of state of dark energy in the case of static fields

Ключевые слова: ГРАВИТАЦИЯ, НЕБЕСНАЯ
МЕХАНИКА, ОБЩАЯ ТЕОРИЯ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ

Keywords: BLACK ENERGY, GENERAL
RELATIVITY, GRAVITATION, CELESTIAL
MECHANICS

Введение

Как известно, в общей теории относительности можно определить аномальное движение орбит [1]. Для решения задачи о вековом аномальном смещении перигелия Меркурия Эйнштейн [1] применил метод последовательных приближений. Казалось бы, что с учетом точного решения Шварцшильда [2] для гравитационного поля точечного источника и аналогичного решения [3] для источника в виде дельта-функции, задача о смещении перигелия Меркурия может быть решена точно, например, на основе уравнения Гамильтона-Якоби [4] или динамических уравнений [5-6]. Однако точное решение до сих пор не было получено.

Эйнштейн предполагал, что его решение задачи [1] не является единственным, так как в общей теории относительности гравитационное поле точечной массы нельзя определить единственным образом. Тем не менее, Эйнштейн считал, что решения отличаются друг от друга формально, а не физически. Известно, однако, что в случае сферической симметрии кроме решения Шварцшильда [2] существует, например, решение Катанаева

[3], которое описывает гравитационное поле точечной массы с тензором энергии-импульса в виде дельта-функции. Ниже показано, что в этом случае решение задачи о вековом смещении перигелия Меркурия совпадает с тем, что получено в [1, 4-6].

С одной стороны это означает, что подтверждается гипотеза Эйнштейна о том, что все такие решения отличаются друг от друга формально. Эту гипотезу Эйнштейна можно сформулировать в виде теоремы Биркгоффа [7], что любое центрально-симметрическое поле в пустоте является статическим, а потому путем преобразования координат может быть сведено к метрике Шварцшильда [2]. С другой стороны, было показано [8], что существуют многочисленные отступления от теоремы Биркгофа, поэтому возникает вопрос, а существуют ли в общем случае центральной симметрии такие решения уравнений поля, которые являются нестационарными или неприводимыми к решению Шварцшильда? В наших работах [9-12] и других было показано, что существует целый класс таких решений в пространствах отрицательной кривизны, которые удовлетворяют гиперболическому, эллиптическому или параболическому уравнению.

В настоящей работе исследована задача о движении планеты типа Меркурия в метрике [9-12]. Показано, что в случае статического поля уравнение Гамильтона-Якоби и динамические уравнения движения могут быть проинтегрированы при самых общих предположениях. Полученные решения отличаются, как от общеизвестных решений [1, 4-6], так и от решений типа [13-14], в которых учитывается влияние космологической постоянной и конечного радиуса кривизны пространства-времени.

Центрально-симметрическое поле и движение материи

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна имеют вид [4-8]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

$R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

В общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned} R_{ik} &= R_{ijk}^j, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\ R_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\beta\delta}^\mu \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_{\mu\delta}^\alpha, \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ - тензор Римана, Γ_{kl}^i - символы Кристоффеля второго рода.

Мы будем использовать уравнение Эйнштейна (1) в форме [8-12]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \quad (3)$$

Здесь k - некоторая функция, зависящая от размерности пространства.

В [9-12] представленная модель гравитации в многомерных пространствах размерностью D с центрально-симметрической метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 &= \psi(t, r) dt^2 - p(\psi) dr^2 - d\phi_1^2 - \sin^2 \phi_1 d\phi_2^2 - \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 d\phi_3^2 - \\ &\dots - \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 \dots \sin^2 \phi_{N-1} d\phi_N^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ - углы на единичной сфере, погруженной в $D - 1$ мерное пространство. Метрика (4) описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике. Такой подход позволяет охватить все многообразие материи, которую производит фабрика природы, путем выбора уравнения состояния $p = p(\psi)$.

Рассмотрим движение в пространствах с метрикой (4). Уравнение Эйнштейна в форме (3) является универсальным, поэтому обобщается на пространство любого числа измерений. Движение материи будем описывать

уравнением Гамильтона-Якоби, которое также обобщается на любое число измерений. Вместе эти два уравнения составляют универсальную модель, описывающую движение материи в D -мерном пространстве:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \quad (5)$$

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = 0 \quad (6)$$

Уравнения поля в метрике (4) сводятся к одному уравнению второго порядка [9-12]

$$-p' \psi_{tt} + \psi_{rr} = -K p \psi - \frac{p p' - 2 p'' p \psi + p'^2 \psi}{2 p \psi} \psi_t^2 + \frac{p + p' \psi}{2 p \psi} \psi_r^2 \quad (7)$$

В общем случае параметры модели и скалярная кривизна зависят только от размерности пространства, имеем

$$\begin{aligned} k &= D(D-5)/2 + 3, \\ K &= 2(D-3), \\ R &= -D^2 + 3D \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что уравнение (7) изменяет свой тип в зависимости от знака производной p' :

в области $p' < 0$ уравнение (7) имеет эллиптический тип;

в области $p' > 0$ уравнение (7) имеет гиперболический тип;

в области $p' = 0$ уравнение (7) имеет параболический тип.

Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_1} \right)^2 - \sin^{-2} \phi_1 \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_2} \right)^2 - \\ \sin^{-2} \phi_1 \sin^{-2} \phi_2 \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_3} \right)^2 - \dots - \sin^{-2} \phi_1 \sin^{-2} \phi_2 \dots \sin^{-2} \phi_{N-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_N} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Было показано, что в рамках уравнения (7) можно описать гравитационные волны, обладающие центральной симметрией, а также

квантовые явления, включая спектр атома водорода, излучение фотонов и электронов [9-12].

Метрика Шварцшильда и уравнение состояние материи

Все статические метрики вида (4) описываются уравнением (7), полагая в этом уравнении $\psi_t = \psi_{tt} = 0$, находим

$$\psi_{rr} = -Kp\psi + \frac{p + p'\psi}{2p\psi} \psi_r^2 \quad (10)$$

Интегрируя уравнение (10), получим

$$p\psi(C - 2K\psi) = \psi_r^2 \quad (11)$$

C – произвольная постоянная. Для физических приложений представляют интерес статические решения, которые имеют в качестве асимптотики метрику Шварцшильда, описывающую гравитационное поле точечной массы [2-8]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{R}\right) dt^2 - R^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dR^2}{1 - \frac{2m}{R}} \quad (12)$$

Заметим, что метрика Шварцшильда определена в сферических координатах, тогда как метрика (4) является центрально-симметрической. Для согласования метрик положим $R = 1/r$, тогда метрика Шварцшильда преобразуется к виду

$$\psi = 1 - 2mr \quad (13)$$

Среди статических метрик, имеющих в качестве асимптотики метрику Шварцшильда (13), можно выделить экспоненциальную зависимость

$$\psi = \exp(-2mr) = 1 - 2mr + \dots \quad (14)$$

Подставляя выражение (14) в уравнение (11), находим уравнение состояния, которое согласовано с метрикой Шварцшильда

$$p = \frac{4m^2\psi}{C - 2K\psi} = -\frac{2m^2}{K} \frac{1}{1 \pm \exp(2mr - \mu_0)},$$

$$\frac{dp}{d\psi} = \frac{C}{(C - 2K\psi)^2}, \quad C = \pm 2Ke^{-\mu_0} \quad (15)$$

Заметим, что метрика Шварцшильда (12) зависит от одного параметра m , который соответствует массе или энергии покоя системы. Мы видим, что в отличие от метрики Шварцшильда, метрика (14)-(15) зависит еще от одной константы $C = \pm 2Ke^{-\mu_0}$, которую можно связать с химическим потенциалом системы [9-12]. Возникает вопрос о влиянии этот параметр на величину векового смещения перигелия Меркурия.

Стационарные состояния классических систем

Покажем, что для любой классической системы, обладающей центральной симметрией и заданной энергией, существует такая метрика, что действие системы будет связано с некоторым решением уравнения (7). Для определенности рассмотрим четырехмерное пространство-время, тогда метрика (4) принимает вид

$$ds^2 = \psi(t, r)dt^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1^2 - \sin^2 \phi_1 d\phi_2^2.$$

В случае стационарных состояний и траекторий, лежащих в одной «плоскости», действие системы можно представить в виде $S_{cl} = -Et + S_1(r) + L\phi_2, \phi_1 = const$. Используя уравнения (9) и (11), находим

$$p\psi(C - 4\psi) = \psi_r^2$$

$$\frac{E^2}{\psi} - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 = m_0^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \phi_1} \quad (16)$$

Здесь m_0, L – масса и угловой момент системы. Далее, положим $M^2 = m_0^2 + L^2 / \sin^2 \phi_1$. Выразим $p = p(\psi)$ из первого уравнения и подставим во второе, тогда получим

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 4\psi)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 \quad (17)$$

Решения уравнения (17) при всех вещественных значениях параметров и метрики определены в комплексной плоскости. Действительно, уравнение (17) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 4\psi)} \quad (18)$$

Отсюда следует, что функция действия в общем случае либо является комплексной, либо движение ограничено условием

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 4\psi)} \geq 0 \quad (19)$$

Поскольку же метрика допускает любые движения, то отсюда следует, что функция действия является комплексной. Разрешая уравнение (18), находим в явном виде зависимость действия стационарных систем от метрики окружающего пространства [9-12]

$$\begin{aligned} S_1(\psi) = S_0 \pm \frac{E}{\sqrt{C}} \ln \psi \\ \mp \frac{E}{\sqrt{C}} \ln \left(2CE^2 - 2KE^2\psi - CM^2\psi + 2E\sqrt{C(C - 2K\psi)(E^2 - M^2\psi)} \right) \\ \mp \frac{M}{\sqrt{2K}} \ln \left(-2E^2K - CM^2 + 4KM^2\psi + 2M\sqrt{2K(C - 2K\psi)(E^2 - M^2\psi)} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь логарифмическая функция определена в комплексной плоскости, S_0 – произвольная постоянная, в случае четырехмерного пространства-времени $K = 2$.

В случае $C = 0$ решение уравнения (18) имеет вид

$$S_1 = S_0 \mp \sqrt{\frac{2(M^2\psi - E^2)}{K\psi}} \pm \sqrt{\frac{2}{K}} M \ln \left[M \left(\sqrt{\psi} M + \sqrt{M^2\psi - E^2} \right) \right] \quad (21)$$

Полученные зависимости (20)-(21) решают поставленную задачу. Таким образом, мы доказали, что действие любой классической механической системы, находящейся в стационарном состоянии, зависит от параметров, характеризующих движение и от метрики окружающего пространства. Следовательно, для каждого типа движения существует такое уравнение состояния $p = p(\psi)$, что движение полностью определяется метрикой и параметрами движения – энергией и угловым моментом, что и требовалось доказать.

Зависимость от угла определяется в виде $\phi_2 + \partial S_{cl} / \partial L = const$. Отсюда находим

$$\phi_2 \sin \phi_1 = \frac{L}{2M} \ln \left[4M \sqrt{(C - 4\psi)(E^2 - M^2\psi)} + M^2(8\psi - C) - 4E^2 \right] \quad (22)$$

Замкнутые круговые траектории удовлетворяют уравнению $r = const$. Чтобы траектория была замкнутой, достаточно будет потребовать в уравнении (17) $\partial S_{cl} / \partial r = 0$, отсюда находим

$$E^2 - M^2\psi(r) = 0 \quad (23)$$

Смещение перигелия Меркурия в метрике Шварцшильда

В случае метрики Шварцшильда (12) положим $S_{cl} = -Et + S_1(r) + L\phi$, $\vartheta = \pi / 2$, тогда уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид [4]:

$$\frac{E^2}{1 - 2m/R} - (1 - 2m/R) \left(\frac{\partial S_1}{\partial R} \right)^2 = m_0^2 + \frac{L^2}{R^2} \quad (24)$$

Разрешая уравнение (24), находим

$$S_1(R) = \int \frac{\sqrt{(L^2 + m_0^2 R^2)(2m - R) + E^2 R^3}}{\sqrt{R(2m - R)^2}} dR \quad (25)$$

Дальнейший анализ [4] основан на построении теории возмущений для интеграла (25). Основная идея сводится к тому, что подынтегральное выражение (25) содержит два малых параметра:

$$\varepsilon_1 = 2m / R \ll 1, \varepsilon_2 = \left| E^2 / m_0^2 - 1 \right| \ll 1. \quad (26)$$

Первое из этих неравенств означает, что гравитационный радиус центрального тела значительно меньше, чем радиус орбиты планеты, а второе неравенство характеризует степень малости энергии движения тела по сравнению с энергией покоя. Разложение покоренного выражения под знаком интеграла (25) по двум малым параметрам имеет вид:

$$\frac{\sqrt{(L^2 + m_0^2 R^2)(2m - R) + E^2 R^3}}{\sqrt{R(2m - R)^2}} = \sqrt{2m_0 E_0 + E_0^2 + \frac{1}{R}(2mm_0^2 + 8mm_0 E_0) - \frac{L^2}{R^2} \left(1 - \frac{8m^2 m_0^2}{L^2} + \frac{2m}{R} \right)} + O(\varepsilon_1 \varepsilon_2^2, \varepsilon_1^2 \varepsilon_2, \varepsilon_1^3, \varepsilon_2^3) \quad (27)$$

Здесь $E_0 = E - m_0$. Заметим, что при формальном разложении в ряд желаемый ответ [1] сразу не получается. Поэтому авторы [4] использовали еще замену переменной интегрирования: $R(R - 2m) = R'^2$, $R' \approx R - m$. В этом случае выражение (25) приводится к виду

$$S_1(R') = \int \sqrt{2m_0 E_0 + E_0^2 + \frac{1}{R'}(2mm_0^2 + 8mm_0 E_0) - \frac{L^2}{R'^2} \left(1 - \frac{6m^2 m_0^2}{L^2} \right)} dR' \quad (28)$$

Такой же ответ можно получить, если вместо замены переменной в выражении (27) использовать оптимальную траекторию для оценки слагаемого $2m / R$. Полагая, что для круговой классической траектории выполняется условие равновесия на орбите, находим

$$\frac{m_0 V^2}{R} = \frac{L^2}{m_0 R^3} = \frac{m_0 m}{R^2} \rightarrow \frac{m}{R} = \frac{m_0^2 m^2}{L^2} \quad (29)$$

Подставляя выражение $2m/R$ из (29) в (27), приходим к искомому интегралу (28), в котором следует сделать замену $R' \rightarrow R$. Очевидно, что в этом случае даже если не знать правильного ответа, формальный ряд приводит к правильному выражению (28), но за счет использования гипотезы (29). Запишем действие для невозмущенного движения в виде

$$S_0(R) = \int \sqrt{2m_0 E_0 + E_0^2 + \frac{1}{R}(2mm_0^2 + 8mm_0 E_0) - \frac{L^2}{R^2}} dR \quad (30)$$

Тогда траектория определяется из уравнения $\varphi + \partial S_0 / \partial L = const$, что дает

$$\varphi = -\frac{\partial S_0}{\partial L} = \int \frac{LdR}{R^2 \sqrt{2m_0 E_0 + E_0^2 + \frac{1}{R}(2mm_0^2 + 8mm_0 E_0) - \frac{L^2}{R^2}}} \quad (31)$$

С другой стороны, для возмущенного движения имеем

$$S_1(R) = S_0(R) - \frac{3m_0^2 m^2}{L} \frac{\partial S_0}{\partial L} \quad (32)$$

Сравнивая (31) и (32), находим окончательно, что за один цикл движения угол изменится на величину

$$\Delta\varphi = 2\pi + \frac{6\pi Gm_0^2 m^2}{c^2 L^2} \quad (33)$$

Здесь мы восстановили размерность всех величин. Обычно изменение угла выражают через большую полуось и эксцентриситет орбиты в виде [1]

$$\delta\varphi = \frac{6\pi Gm}{c^2 a(1-e^2)} \quad (34)$$

Экспериментальный результат для Меркурия составляет 43.1 ± 0.5 угловых секунд в столетие, в полном соответствии с выражением (34), которое дает 42.9805 угловых секунд в столетие. Однако решения [1, 4] не являются точными. Отметим, что Фок [5] и Вайнберг [6], используя приближенные решения динамических уравнений, также получили

выражение (34) для смещения перигелия. Покажем, что движение тел в метрике [3] приводит к выражению (34).

Смещение перигелия Меркурия в метрике Катанаева [4]

Рассмотрим движение тел в метрике

$$ds^2 = \frac{(2r-m)^2}{(2r+m)^2} dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 [dr^2 + r^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)] \quad (35)$$

Положим $S_{cl} = -Et + S_1(r) + L\varphi$, $\theta = \pi/2$, тогда уравнение Гамильтона-Якоби можно представить в форме:

$$\frac{(m+2r)^2 E^2}{(m-2r)^2} - \frac{16r^4}{(m+2r)^4} \left(\frac{\partial S_1}{\partial R}\right)^2 = m_0^2 + \frac{16r^4 L^2}{(m+2r)^4} \quad (36)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби (36) можно проинтегрировать и привести к виду

$$S_1(R) = \int \frac{dr}{4r^2} \sqrt{\frac{E^2(m+2r)^6}{(m-2r)^2} - m_0^2(m+2r)^4 - 16L^2 r^2} \quad (37)$$

Разложим покоренное выражение под знаком интеграла (37) по двум малым параметрам (25), в результате получим:

$$S_1(r) = \int \sqrt{2m_0 E_0 + E_0^2 + \frac{1}{r}(2mm_0^2 + 8mm_0 E_0) - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{6m^2 m_0^2}{L^2}\right)} dr + O(\varepsilon_1^2 \varepsilon_2, \dots) \quad (38)$$

И так, мы получили выражение типа (28), из которого автоматически следует формула Эйнштейна (34) без каких-либо дополнительных гипотез. Следовательно, в метрике (35) можно было бы получить формулу Эйнштейна (34), не зная конечного ответа. В этой связи заметим, что Эйнштейн при вычислении смещения перигелия Меркурия в работе [1] знал величину аномального смещения - $45'' \pm 5''$, а также предполагал, что этот эффект нельзя объяснить на основе теории Ньютона.

Однако релятивистская поправка к угловому моменту вращения в уравнении (38) выглядит вполне классической. Кроме того, неизвестно,

является ли приближенное решение задачи, полученное выше, а также авторами [1, 4-6] и другими достаточно точным. Иными словами, не является ли полученный результат (34) просто подгонкой под эксперимент или, как предполагает Вайнберг [6], простым совпадением.

Здесь возникает два вопроса: во-первых, о нахождении точного решения задачи хотя бы в одной метрике и, во-вторых, о неклассических эффектах общей теории относительности, которые можно было бы наблюдать в Солнечной системе [13-14].

Оценка влияния космологической постоянной на смещение перигелия Меркурия сделана в работе [14]. Было установлено, что в пределах экспериментальной ошибки эффект не может быть обнаружен. Покажем, что существует еще один эффект, которого нет ни в приближенных теориях типа [1, 4-6], ни в моделях типа [13], но который вполне может быть сопоставим с величиной аномальной прецессии орбиты Меркурия.

Аномальные радиальные колебания орбит

В общем случае уравнения движения материальной точки в гравитационном поле имеют вид [3,6,11-12]

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (39)$$

Вычисляя коэффициенты аффинной связности в метрике (4) в четырехмерном пространстве-времени находим

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\psi_t}{2\psi}, & \Gamma_{21}^1 &= \frac{\psi_r}{2\psi}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{p'\psi_t}{2\psi}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{\psi_r}{2p}, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{p'\psi_t}{2p}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{p'\psi_r}{2p}, \\ \Gamma_{44}^3 &= -\cos\phi_1 \sin\phi_1, & \Gamma_{43}^4 &= \frac{\cos\phi_1}{\sin\phi_1} \end{aligned} \quad (40)$$

В случае статической метрики типа Шварцшильда, имеем

$$\psi = \exp(-2mr), \quad p = -m^2 / (1 + Ae^{2mr}), \quad A = \pm e^{-\mu_0}$$

$$\Gamma_{21}^1 = -m, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{A + e^{-2mr}}{m}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{mA}{A + e^{-2mr}} \quad (41)$$

Используя (39)-(41), находим уравнения

$$\frac{d^2 t}{ds^2} - 2m \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{A + e^{-2mr}}{m} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{mA}{A + e^{-2mr}} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \phi_1}{ds^2} - \cos \phi_1 \sin \phi_1 \left(\frac{d\phi_2}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \phi_2}{ds^2} + 2 \cot \phi_1 \left(\frac{d\phi_2}{ds} \right) \left(\frac{d\phi_1}{ds} \right) = 0. \quad (42)$$

Динамические уравнения (42) разделятся на движение в плоскости t, r и движение на единичной сфере, которое описывается угловыми переменными $\phi_1(s), \phi_2(s)$. Движение на сфере зависит от трех констант - $\phi_1(0), \phi_1'(0), \phi_2(0)$ которые соответствуют трем компонентам вектора углового момента в задаче Кеплера. При любых начальных данных движение осуществляется по окружности единичного радиуса, – рис. 1. Угол $\phi_1(s)$ изменяется с некоторым периодом, тогда как угол $\phi_2(s)$ растет монотонно с ростом параметра – рис. 1. Параметры движения на единичной сфере не зависят от типа источника гравитации.

Отметим, что можно выписать точные решения динамических уравнений (42), описывающих движение на единичной сфере. Однако эти решения не описывают аномальную прецессию орбит, так как никакого приближения в этой задаче не используется, а точные решения содержат только точные интегралы движения.

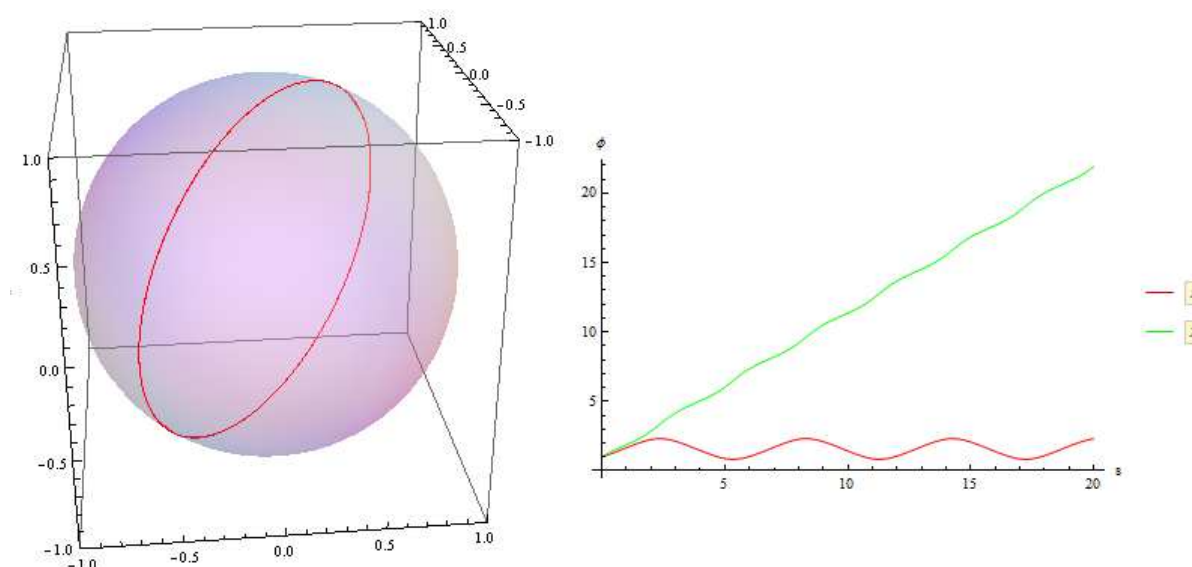


Рис. 1. Движение на единичной сфере.

Первое уравнение (42) можно проинтегрировать один раз, в результате находим

$$\frac{dt}{ds} = t_s(0) \exp[2m(r - r(0))] \quad (43)$$

Уравнение (43) описывает хорошо известный эффект изменения скорости хода часов в гравитационном поле [4]. Используя уравнение (43) можно перейти во втором уравнении (42) к зависимости от времени по формулам

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^2r}{ds^2} = 2m \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \frac{d^2r}{dt^2} \quad (44)$$

Подставляя эти выражение во второе уравнение (42), приходим к модели движения вдоль радиальной координаты

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{A + e^{-2mr}}{m} + \frac{m(A + 2e^{-2mr})}{A + e^{-2mr}} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = 0 \quad (45)$$

Уравнение (45) допускает интеграл движения, аналогичный закону сохранения энергии, имеем

$$m^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = e^{-4mr} (1 + Ae^{2mr})(B - e^{2mr}) \quad (46)$$

Здесь B – константа интегрирования. Определим новую переменную

$$\rho = e^{2mr} > 0 \quad (47)$$

С учетом (47), находим окончательно

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 = 4(1 + A\rho)(B - \rho) \quad (48)$$

Анализ показывает, что при любых знаках параметров A, B в уравнении (48), движение вдоль радиальной координаты является неустойчивым. Действительно, если $A > 0$, то есть только одна точка остановки $\rho = B$. Если $A < 0$, то существует вторая точка остановки $\rho = -1/A > 0$, но при этом квадрат радиальной скорости становится отрицательным на интервале $B > \rho > -1/A$, что исключает движение между точками остановки. И только если мы предположим, что при этом изменяется сигнатура метрики в плоскости t, r , тогда появляется возможность периодического движения между точками остановки на интервале $B > \rho > -1/A$. Сделаем в уравнении (48) замену $t \rightarrow it$. Точное решение задачи имеет в этом случае вид

$$\rho = e^{2mr} = B - (B - 1/|A|) \sin^2 \left(t \sqrt{|A|} \right) \quad (49)$$

Выражение (49) описывает радиальные колебания, которые не существуют в классической теории. Амплитуда и период этого движения зависят от параметра $A < 0$.

Установлено [11-12], что параметры уравнения состояния темной энергии связаны с величиной постоянной Планка

$$\lim_{\psi \rightarrow 1} p'' \psi = \sigma = \frac{1}{2\hbar^2} \quad (50)$$

Было показано [11-12], что квантовая механика Шредингера реализуется в области $p' = 0$, когда уравнение (7) имеет параболический тип. Этот соответствует предельному случаю $A \rightarrow 0$. Но в таком случае период радиальных колебаний (49), становится очень большим. Согласно формуле Эйнштейна, прецессия перигелия Меркурия составляет около 42.9805 угловых секунд в столетие. Следовательно, для полного оборота понадобилось бы 3015320 лет или около $9.52 \cdot 10^{13}$ секунд. Предполагая, что аномальная прецессия Меркурия обусловлена радиальными колебаниями типа (49), находим оценку $A \approx -4.43 \cdot 10^{-27} \text{ s}^{-2}$. Следовательно, химический потенциал системы составляет $\mu_0 \approx 62.1$. Для сравнения укажем, что, например, химический потенциал адронов при фазовом переходе в QGP составляет всего $\mu_A \approx -0.72$ от критической температуры перехода 175 МэВ [15].

С учетом полученных результатов можно утверждать, что аномальное смещение перигелия Меркурия можно объяснить не только традиционным способом на основе приближенных решений [1, 4-6], но и на основе точных решений, приведенных выше.

Литература

1. Albert Einstein. Erklarung der Perihelbeivegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839.
2. K. Schwarzschild. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv:physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.
3. M. O. Katanaev. Point massive particle in General Relativity// Gen. Rel. Grav. 45 (2013) 1861-1875
4. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.2. Теория поля. – 7 изд. – М.: Наука. - 1988. - стр. 329-330; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon, New York, second edition, 1962.

5. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения (2-е изд.). – М.: ГИФМЛ, 1961.
6. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.
7. G. L. Birkhoff. Relativity and Modern Physics. – Cambridge, p. 256, 1929.
8. A.Z. Petrov. New methods in general relativity. – Moscow: Nauka, 1966.
9. Трунев А.П. Гравитационные волны и стационарные состояния квантовых и классических систем// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №03(097). – IDA [article ID]: 0971400090. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf>
10. Трунев А.П. Гравитационные волны и квантовая теория Шредингера// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>
11. Трунев А.П. Гравитационные волны и стационарные состояния квантовых и классических систем// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №03(097). – IDA [article ID]: 0971400090. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf>
12. Трунев А.П. Атом Шредингера и Эйнштейна// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №03(097). – IDA [article ID]: 0971400094. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf>
13. Joseph Sultana, Demosthenes Kazanas, Jackson Levi Said. Conformal Weyl gravity and perihelion precession// PHYSICAL REVIEW D 86, 084008 (2012)
14. Eduard L. Wright. Interplanetary Measures Can Not Bound the Cosmological Constant//arXiv: astro-ph/9805292, 21 May, 1998.
15. Трунев А.П. Спектр масс адронов и термодинамика глюонов// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №07(091). С. 1561 – 1574. – IDA [article ID]: 0911307104. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/07/pdf/104.pdf>

References

1. Albert Einstein. Erklarung der Perihelbeivegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839.
2. K. Schwarzschild. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv:physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.
3. M. O. Katanaev. Point massive particle in General Relativity// Gen. Rel. Grav. 45 (2013) 1861-1875

4. Landau L. D, Lifshic E. M. Teoreticheskaja fizika. T.2. Teorija polja. – 7 izd. – M.: Nauka. - 1988. - str. 329-330; L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon, New York, second edition, 1962.
5. V.A. Fok. Teorija prostranstva, vremeni i tjagotenija (2-e izd.). – M.: GIFML, 1961.
6. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.
7. G. L. Birkhoff. Relativity and Modern Physics. – Cambridge, p. 256, 1929.
8. A.Z. Petrov. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
9. Trunев A.P. Gravitacionnye volny i stacionarnye sostojanija kvantovyh i klassicheskikh sistem// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №03(097). – IDA [article ID]: 0971400090. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf>
10. Trunев A.P. Gravitacionnye volny i kvantovaja teorija Shredingera// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>
11. Trunев A.P. Gravitacionnye volny i stacionarnye sostojanija kvantovyh i klassicheskikh sistem// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №03(097). – IDA [article ID]: 0971400090. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf>
12. Trunев A.P. Atom Shredingera i Jejnshtejna// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №03(097). – IDA [article ID]: 0971400094. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf>
13. Joseph Sultana, Demosthenes Kazanas, Jackson Levi Said. Conformal Weyl gravity and perihelion precession// PHYSICAL REVIEW D 86, 084008 (2012)
14. Eduard L. Wright. Interplanetary Measures Can Not Bound the Cosmological Constant//arXiv: astro-ph/9805292, 21 May, 1998.
15. Trunев A.P. Spekr mass adronov i termodinamika gljuonov// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №07(091). S. 1561 – 1574. – IDA [article ID]: 0911307104. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2013/07/pdf/104.pdf>