УДК 517.954

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Лесев Вадим Николаевич
к.ф.-м.н., доцент
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Россия

В работе исследована нелокальная краевая задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка с негладкими условиями сопряжения. Доказаны единственность и существование решения данной задачи

Ключевые слова: СМЕШАННОЕ УРАВНЕНИЕ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

UDC 517.954

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MIXED EQUATION WITH PERPENDICULAR LINES OF TYPE ALTERATION

Lesev Vadim Nikolaevich
Cand.Phys.-Math.Sci., associate professor
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekova, Nalchik, Russia

The non-local boundary value problem for the second order mixed parabolo-hyperbolic equation with the non-smooth conditions of conjugation has been examined. The uniqueness and the existence of the solution for this problem have been proved

Keywords: MIXED EQUATION, BOUNDARY VALUE PROBLEM, UNIQUENESS AND EXISTENCE OF THE SOLUTION

Введение

Краевые задачи для смешанных уравнений образуют особое направление в теории дифференциальных уравнений. Доказательство существования и единственности решений для таких задач отличается применением специальных методов (например [1-5]), практически не имеющих аналогов для классических уравнений. В настоящей работе представлены результаты исследования однозначной разрешимости задачи для модельного уравнения параболо-гиперболического типа в характеристической области с нелокальными краевыми условиями и разрывными условиями сопряжения на линии изменения типа.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y+c_0u,\ в\ \Omega_0, \\ u_{xx}-u_{yy},\ в\ \Omega_1\cup\Omega_2, \end{cases} \tag{1}$$

где Ω_0 – область ограниченная отрезками AB, BC, CO и OA прямых $x=1$, $y=1$, $x=0$, $y=0$ соответственно; Ω_1 и Ω_2 – характеристические треугольники, причем Ω_1 – ограничен отрезком $OA=\bar{J}_1$ оси абсцисс и двумя характеристиками AE: $x-y=1$, OE: $x+y=0$ уравнения (1), выходящими из точек A, O и пересекающимися в точке E; Ω_2 – ограничен отрезком $OC=\bar{J}_2$ оси ординат и двумя характеристиками CD: $y-x=1$, DO: $x+y=0$ уравнения (1), выходящими из точек C,O и пересекающимися в точке D; $c_0=c_0(x,y)$ – заданная непрерывная функция в $\overline{\Omega}_0$.

Пусть $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup J_1\cup J_2$, $\theta_0(x)=\dfrac{x}{2}-i\,\dfrac{x}{2}$, $\theta_1(x)=\dfrac{x+1}{2}+i\,\dfrac{x-1}{2}$, $\theta_2(y)=-\dfrac{y}{2}+i\,\dfrac{y}{2}$, $\theta_3(y)=\dfrac{y-1}{2}+i\,\dfrac{y+1}{2}$, $\tau_1^{\pm}(x)=\lim\limits_{y\to 0\pm}u(x,y)$, $\nu_1^{\pm}(x)=\lim\limits_{y\to 0\pm}u_y(x,y)$, $\tau_2^{\pm}(y)=\lim\limits_{x\to 0\pm}u(x,y)$, $\nu_2^{\pm}(y)=\lim\limits_{x\to 0\pm}u_x(x,y)$.

Задача 1. Найти регулярное в $\Omega\setminus(J_1\cup J_2)$ решение уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}_i)\cap C^1(\Omega_0\cup J_1\cup J_2)\cap C^1(\Omega_1\cup J_1)\cap C^1(\Omega_2\cup J_2)$ $(i=0,1,2)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$a_1(x)u[\theta_0(x)]+b_1(x)u[\theta_1(x)]=c_1(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$a_2(y)u[\theta_2(y)]+b_2(y)u[\theta_3(y)]=c_2(y),\quad 0\le y\le 1, \tag{3}$$

$$u(1,y)=c_3(y),\quad 0\le y\le 1, \tag{4}$$

условиям сопряжения:

$$\begin{gathered}\tau_1^-(x)=\alpha_1(x)\tau_1^+(x)+\gamma_1(x),\\ \nu_1^-(x)=\beta_1(x)\nu_1^+(x)+\delta_1(x)\tau_1^+(x)+\sigma_1(x),\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\tau_2^-(y)=\alpha_2(y)\tau_2^+(y)+\gamma_2(y),\\ \nu_2^-(y)=\beta_2(y)\nu_2^+(y)+\delta_2(y)\tau_2^+(y)+\sigma_2(y),\end{gathered} \tag{6}$$

и обладающее тем свойством, что $\left[\tau_2^+(y)\right]'$, $\nu_1^{\pm}(x)$, $\nu_2^{\pm}(y)\in L[0,1]$.

Введем обозначение

$$A_i(t)=\frac{a_i(t)}{\alpha_i(t)\beta_i(t)[a_i(t)+b_i(t)]},\quad B_i(t)=\frac{b_i(t)A_i(t)}{a_i(t)},$$

где $t\in\bar{J}_i$, $i=1,2$, (при $i=1$ $t=x$, а при $i=2$ $t=y$).

2. Доказательство единственности решения задачи

Для задачи 1 справедлива следующая

Теорема 1. Если выполнены условия:

$$c_0 \le 0, \quad a_i(t)+b_i(t) \ne 0, \quad a_1(0)a_1(1) \ne 0, \quad b_2(0)b_2(1) \ne 0, \quad \alpha_i(t)\beta_i(t) \ne 0$$

$$A_i(1) \ge 0, \quad B_i(0) \ge 0, \quad A_i'(t) \le 0, \quad B_i'(t) \ge 0\,, \tag{7}$$

$$\beta_i(t)\delta_i(t) \le 0\,, \tag{8}$$

то задача 1 не может иметь более одного решения.

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи 1, тогда функциональные соотношения между $\tau_i^-(t)$ и $\nu_i^-(t)$, имеют вид

$$\tau_i^-(t)\,[a_i(t)+b_i(t)] - a_i(t)\int_0^t \nu_i^-(\xi)\,d\xi - b_i(t)\int_t^1 \nu_i^-(\xi)\,d\xi = f_i(t), \tag{9}$$

где $f_i(t) = 2c_i(t) - \tau_i^-(0)a_i(t) - \tau_i^-(1)b_i(t)$; при $i=1$ $t=x$, а при $i=2$ $t=y$.

Соотношения (9) содержат неизвестные постоянные $\tau_i^-(0), \tau_i^-(1)$, ($i=1,2$), которые легко определить. Действительно, поскольку $\tau_1^+(1)=c_3(0)$, то $\tau_1^-(1)=\alpha_1(1)c_3(0)+\gamma_1(1)$. Следовательно, с учетом (2) и (3), будем иметь:

$$\tau_1^-(0) = \frac{c_1(0)a_1(1) - b_1(0)\{c_1(1) - b_1(1)[\alpha_1(1)c_3(0)+\gamma_1(1)]\}}{a_1(0)a_1(1)},$$

$$\tau_2^-(0) = \frac{\alpha_2(0)\left[\tau_1^-(0)-\gamma_1(0)\right]}{\alpha_1(0)} + \gamma_2(0), \quad \tau_2^-(1) = \frac{b_2(0)c_2(1) - a_2(1)\left[c_2(0)-a_2(0)\tau_2^-(0)\right]}{b_2(0)b_2(1)}.$$

Далее, интегрируя тождество

$$u\left[u_{xx} - u_y + c_0 u\right] = \frac{\partial}{\partial x}(u\,u_x) - u_x^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right) + c_0\,u^2 \equiv 0 \tag{10}$$

по области Ω_0, в случае однородной задачи, будем иметь:

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left[u^2(x,1)-u^2(x,0)\right]dx + \int_0^1 \tau_2^+(y)\nu_2^+(y)\,dy + \int_{\Omega_0}\left[u_x^2 - c_0 u^2\right]dx\,dy = 0\,. \tag{11}$$

Переходя к пределу при $y \to 0$, в области Ω_0, получаем

$$\left[\tau_1^+(x)\right]'' + c_0(x,0)\,\tau_1^+(x) = \nu_1^+(x)\,. \tag{12}$$

С учетом (12), будем иметь

$$I_1 = \int_0^1 \tau_1^+(x)\nu_1^+(x)\,dx = -\int_0^1\left[\tau_1^{+\prime}(x)\right]^2 dx + \int_0^1 c_0(x,0)\left[\tau_1^+(x)\right]^2 dx \le 0\,. \tag{13}$$

Теперь, докажем справедливость неравенств:

$$I_i = \int_0^1 \tau_i^+(t)\nu_i^+(t)\,dt \ge 0, \quad i = 1,2. \tag{14}$$

Действительно, интеграл I_i с учетом (5) и (6), представим в виде

$$I_i = \int_0^1 \left\{ \frac{\tau_i^-(t)\nu_i^-(t)}{\alpha_i(t)\beta_i(t)} - \frac{\delta_i(t)}{\beta_i(t)} \left[\frac{\tau_i^-(t)}{\alpha_i(t)} \right]^2 \right\} dt, \quad i = 1,2. \tag{15}$$

Для определения знака выражения (15) будем рассматривать каждое слагаемое отдельно. Принимая во внимание (9), получим

$$I_i^1 = \int_0^1 \frac{\tau_i^-(t)\nu_i^-(t)}{\alpha_i(t)\beta_i(t)} dt = \int_0^1 \left[A_i(t)\nu_i^-(t)\int_0^t \nu_i^-(\xi)\,d\xi \right] dt + \int_0^1 \left[B_i(t)\nu_i^-(t)\int_t^1 \nu_i^-(\xi)\,d\xi \right] dt. \tag{16}$$

Равенство (16) может быть преобразовано к виду

$$I_i^1 = \frac{1}{2}\int_0^1 A_i(t)\left[\left(\int_0^t \nu_i^-(\xi)\,d\xi\right)^2\right]' dt - \frac{1}{2}\int_0^1 B_i(t)\left[\left(\int_t^1 \nu_i^-(\xi)\,d\xi\right)^2\right]' dt. \tag{17}$$

Применяя к (17) интегрирование по частям, приходим к равенству:

$$I_i^1 = \frac{1}{2} A_i(1)\left(\int_0^1 \nu_i^-(\xi)\,d\xi\right)^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 A_i'(t)\left(\int_0^t \nu_i^-(\xi)\,d\xi\right)^2 dt +$$

$$+ \frac{1}{2} B_i(0)\left(\int_0^1 \nu_i^-(\xi)\,d\xi\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 B_i'(t)\left(\int_t^1 \nu_i^-(\xi)\,d\xi\right)^2 dt.$$

Теперь, очевидно, что при выполнении неравенств (7), будет справедливо неравенство $I_i^1 \ge 0$, а неравенство $I_i^2 \ge 0$ будет справедливо при выполнении условия (8). Таким образом, доказано неравенство $I_i \ge 0$. Отсюда, принимая во внимание (13), получим $\tau_1(x) = const$, но так как $\tau_1^+(0) = \tau_1^+(1) = 0$, то $\tau_1^+(x) = 0$ или $u(x,0) = 0$.

Следовательно, из (11) с учетом (14) получаем, что $u_x(x,y) = 0$ в Ω_0. Значит, $u(x,y) = w(y)$, но так как $u(1,y) = 0$, то $u(x,y) = 0$. Отсюда следует, что в области Ω_0 справедливо тождество $u(x,y) \equiv 0$. В областях Ω_1 и Ω_2 $u(x,y) \equiv 0$ как решение задачи Коши с нулевыми начальными данными. Таким образом, $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$ и решение задачи 1 единственно.

3. Доказательство существования решения задачи

Для доказательства существования решения задачи 1, в отличие от работы [4] применим метод функции Грина.

Решение $u(x, y)$ (если оно существует) должно удовлетворять условию (12), которое можно переписать в виде

$$T_+\tau(x) = \nu(x).$$

Здесь $T_+ = \frac{d^2}{dx^2} + c_0(x,0)$ – дифференциальный оператор, $\tau(x) = \tau_1^+(x)$, $\nu(x) = \nu_1^+(x)$.

Непосредственным вычислением, с учетом (5) и условий теоремы 1, получаем

$$\tau(0) = \tau_0, \quad \tau(1) = \tau_1,$$

где

$$\tau_0 = \frac{c_1(0)a_1(1) - b_1(0)\{c_1(1) - b_1(1)[\alpha_1(1)c_3(0) + \gamma_1(1)]\}}{\alpha_1(0)a_1(0)a_1(1)} - \frac{\gamma_1(0)}{\alpha_1(0)}, \qquad \tau_1 = c_3(0).$$

Введем новые неизвестные функции

$$\Gamma(x) = \tau(x) - (\tau_1 - \tau_0)x - \tau_0, \quad N(x) = \nu(x) - c_0(x,0)[(\tau_1 - \tau_0)x + \tau_0].$$

Легко видеть, что

$$T_+\Gamma(x) = N(x), \quad \Gamma(0) = \Gamma(1) = 0. \tag{18}$$

Пусть $G(x, t)$ – функция Грина оператора T_+ с областью определения $D(T_+) = \{\Gamma(x) \in C(J_1) \cap C^2(J_1)\}$. Тогда, для задачи (18), можем записать

$$\Gamma(x) = \int_0^1 G(x, t)N(t)\,dt. \tag{19}$$

Из (9), принимая во внимание (5), получим второе соотношение между $\tau_1^+(x)$ и $\nu_1^+(x)$:

$$\begin{gathered} Q_1(x)\tau_1^+(x) - a_1(x)\int_0^x \left[\beta_1(t)\nu_1^+(t) + \delta_1(t)\tau_1^+(t)\right]dt - \\ - b_1(x)\int_x^1 \left[\beta_1(t)\nu_1^+(t) + \delta_1(t)\tau_1^+(t)\right]dt = Q_2(x), \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$Q_1(x) = \alpha_1(x)\left[a_1(x) + b_1(x)\right],$$

$$Q_2(x) = f_1(x) + a_1(x)\int_0^x \sigma_1(t)\,dt + b_1(x)\int_x^1 \sigma_1(t)\,dt - \gamma_1(x)\left[a_1(x) + b_1(x)\right].$$

Из (20), с учетом (19), будем иметь

$$\int_0^1 Q_3(x,t)\nu_1^+(t)\,dt - a_1(x)\int_0^x \beta_1(t)\nu_1^+(t)\,dt - b_1(x)\int_x^1 \beta_1(t)\nu_1^+(t)\,dt = Q_4(x), \tag{21}$$

где Q_3 и Q_4 – выражаются через заданные функции по аналогии с Q_1 и Q_2.

Полагая $z(x) = -\beta_1(x)\nu_1^+(x)$ и применяя дифференцирование, перепишем уравнение (21) в виде

$$a_1(x)\,z(x) - b_1(x)\,z(x) + a_1'(x)\int_0^x z(t)\,dt + b_1'(x)\int_x^1 z(t)\,dt = Q_4'(x) + \int_0^1 Q_{3x}(x,t)\frac{z(t)}{\beta_1(t)}\,dt\,. \tag{22}$$

Таким образом, при $a_1(x) \neq b_1(x)$, в силу теоремы 1, $\nu_1^+(x)$ однозначно находим как решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода (22), а $\tau_1^+(x)$ – из соотношения (18). Функции $\tau_1^-(x)$ и $\nu_1^-(x)$ определяем из условий сопряжения (5). Очевидно, что теперь решение задачи 1 в области Ω_1 находим как решение задачи Коши для уравнения (1).

Чтобы определить $\tau_2^\pm(y)$ и $\nu_2^\pm(y)$ воспользуемся решением первой краевой задачи для уравнения (1) в Ω_0, которое, как известно [6], имеет вид:

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_0^1 d\xi \int_0^y c_0(\xi,\eta)G(\xi,\eta;x,y)u(\xi,\eta)\,d\eta\,, \tag{23}$$

где

$$u_0(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^y \tau_2^+(\eta)G_\xi(0,\eta;x,y)\,d\eta - \int_0^y c_3(\eta)G_\xi(1,\eta;x,y)\,d\eta + \int_0^1 \tau_1^+(\xi)G(\xi,0;x,y)\,d\xi\right\},$$

$$G(\xi,\eta;x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}$$

– функция Грина первой краевой задачи уравнения теплопроводности.

Выпишем решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода (23) с помощью резольвенты $R(\xi,\eta;x,y)$ ядра $c_0(\xi,\eta)G(\xi,\eta;x,y)$, получим

$$u(x,y)=\int_0^y \tau_2^+(\eta)G_\xi(0,\eta;x,y)\,d\eta-\int_0^y c_3(\eta)G_\xi(1,\eta;x,y)\,d\eta+$$
$$+\int_0^y \tau_2^+(\eta)F_1(\eta;x,y)\,d\eta+\int_0^y c_3(\eta)F_2(\eta;x,y)\,d\eta+\Psi(x,y)+V(x,y), \tag{24}$$

где

$$F_1(\eta;x,y)=\int_\eta^y\int_0^1 G_\xi(0,\eta;\theta,t)R(\theta,t;x,y)\,d\theta\,dt\,,$$

$$F_2(\eta;x,y)=-\int_\eta^y\int_0^1 G_\xi(1,\eta;\theta,t)R(\theta,t;x,y)\,d\theta\,dt\,,$$

$$\Psi(x,y)=\int_\eta^y\int_0^1 V(\theta,t)R(\theta,t;x,y)\,d\theta\,dt\,,\qquad V(x,y)=\int_0^1 G(\xi,0;x,y)\tau_1^+(\xi)\,d\xi\,.$$

Дифференцируя по x равенство (24), а затем, переходя в полученном равенстве к пределу при $x\to 0+$, будем иметь

$$u_x\big|_{x=0}\equiv \nu_2^+(y)=\int_0^y F_{1x}(\eta;0,y)\tau_2^+(\eta)\,d\eta+\int_0^y F_{2x}(\eta;0,y)c_3(\eta)\,d\eta+$$
$$+\int_0^y\left\{-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}+\frac{2}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(\frac{-n^2}{y-\eta}\right)\right\}\tau_2^{+\prime}(\eta)\,d\eta+$$
$$+\int_0^y\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\exp\left[\frac{-1}{4(y-\eta)}\right]+\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\times\right. \tag{25}$$
$$\left.\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\left[\exp\left\{\frac{(2n-1)^2}{4(\eta-y)}\right\}+\exp\left\{\frac{(1+2n)^2}{4(\eta-y)}\right\}\right]\right\}c_3'(\eta)\,d\eta+F_3(y),$$

где $F_3(y)=\left[\dfrac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial V(x,y)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=0}$, а штрих после знака суммы означает суммирование по всем указанным n кроме $n=0$.

Равенство (25) представляет собой функциональное соотношение между $\tau_2^+(y)$ и $\nu_2^+(y)$, принесенное из области Ω_0 на единичный интервал OC. Перепишем это соотношение в виде

$$\nu_2^+(y)=\int_0^y F_4(y,\eta)\tau_2^{+\prime}(\eta)\,d\eta+\int_0^y F_{1x}(\eta;0,y)\tau_2^+(\eta)\,d\eta+F_5(y), \tag{26}$$

где

$$F_4(y,\eta) = -\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} + \frac{2}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-n^2}{y-\eta}\right),$$

$$F_5(y) = F_3(y) + \int_0^y F_{2x}(\eta;0,y)c_3(\eta)\,d\eta + \int_0^y \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \exp\left[\frac{-1}{4(y-\eta)}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\exp\left\{\frac{(2n-1)^2}{4(\eta-y)}\right\} + \exp\left\{\frac{(1+2n)^2}{4(\eta-y)}\right\}\right]\right\} c_3'(\eta)\,d\eta.$$

Теперь, представим условия сопряжения (6) в виде

$$\tau_2^+(y) = \alpha_2^{-1}(y)\left[\tau_2^-(y) - \gamma_2(y)\right], \tag{27}$$

$$\nu_2^+(y) = \beta_2^{-1}(y)\left\{\nu_2^-(y) - \sigma_2(y) - \alpha_2^{-1}(y)\,\delta_2(y)\left[\tau_2^-(y) - \gamma_2(y)\right]\right\}. \tag{28}$$

Из равенства (27), принимая во внимание соотношение (9), будем иметь

$$\tau_2^+(y) = \frac{1}{\alpha_2(y)\left[a_2(y)+b_2(y)\right]}\left\{f_2(y) + a_2(y)\int_0^y \nu_2^-(t)\,dt + b_2(y)\int_y^1 \nu_2^-(t)\,dt\right\} - \frac{\gamma_2(y)}{\alpha_2(y)}. \tag{29}$$

Продифференцировав равенства (9), (27), получим

$$\tau_2^{+\prime}(y) = \frac{\tau_2^{-\prime}(y)\alpha_2(y) - \tau_2^-(y)\alpha_2'(y)}{\alpha_2^2(y)} - \left[\frac{\gamma_2(y)}{\alpha_2(y)}\right]', \tag{30}$$

$$\begin{gathered}\tau_2^{-\prime}(y) = \left[\frac{f_2(y)}{a_2(y)+b_2(y)}\right]' + \left[\frac{a_2(y)}{a_2(y)+b_2(y)}\right]'\int_0^y \nu_2^-(t)\,dt + \\ + \left[\frac{b_2(y)}{a_2(y)+b_2(y)}\right]'\int_y^1 \nu_2^-(t)\,dt + \nu_2^-(y)\left[\frac{a_2(y)-b_2(y)}{a_2(y)+b_2(y)}\right].\end{gathered} \tag{31}$$

Подставляя соотношения (9), (31) в равенство (30), будем иметь

$$\tau_2^{+\prime}(y) = S_0(y)\int_0^y \nu_2^-(t)\,dt + S_1(y)\int_y^1 \nu_2^-(t)\,dt + S_2(y)\nu_2^-(y) + S_3(y), \tag{32}$$

где $S_0(y), S_1(y), S_2(y), S_3(y)$ – выражаются через заданные функции.

Из (28), с учетом (9), находим

$$\nu_2^+(y) = \frac{\nu_2^-(y)}{\beta_2(y)} + S_4(y)\int_0^y \nu_2^-(t)\,dt + S_5(y)\int_y^1 \nu_2^-(t)\,dt + S_6(y). \tag{33}$$

Здесь $S_4(y), S_5(y), S_6(y)$ – также известны.

Принимая во внимание равенства (29), (32) и (33), из (26), будем иметь

$$\frac{\nu_2^-(y)}{\beta_2(y)}+S_4(y)\int_0^y \nu_2^-(t)\,dt+S_5(y)\int_y^1 \nu_2^-(t)\,dt=S_7(y)+$$
$$+\int_0^y F_4(y,\eta)\left[S_0(y)\int_0^\eta \nu_2^-(t)\,dt+S_1(\eta)\int_\eta^1 \nu_2^-(t)\,dt+S_2(\eta)\nu_2^-(\eta)\right]d\eta+ \tag{34}$$
$$+\int_0^y \frac{F_{1x}(\eta;0,y)}{\alpha_2(\eta)\left[a_2(\eta)+b_2(\eta)\right]}\left[a_2(\eta)\int_0^\eta \nu_2^-(t)\,dt+b_2(\eta)\int_\eta^1 \nu_2^-(t)\,dt\right]d\eta,$$

где

$$S_7(y)=\int_0^y F_{1x}(\eta;0,y)\left\{\frac{f_2(\eta)}{\alpha_2(\eta)\left[a_2(\eta)+b_2(\eta)\right]}-\frac{\gamma_2(\eta)}{\alpha_2(\eta)}\right\}d\eta+$$
$$+\int_0^y F_4(y,\eta)S_3(\eta)\,d\eta+F_5(y)-S_6(y).$$

В результате ряда преобразований, равенство (34), примет вид

$$\nu_2^-(y)+\int_0^y T_0(y,t)\nu_2^-(t)\,dt+T_1(y)\int_y^1 \nu_2^-(t)\,dt=T_2(y), \tag{35}$$

где

$$T_0(y,t)=\beta_2(y)\left[S_8(y,t)-\int_t^y S_9(y,\eta)\,d\eta-\int_0^t S_{10}(y,\eta)\,d\eta\right],$$

$$T_1(y)=\beta_2(y)\left[S_5(y)-\int_0^y S_{10}(y,t)\,dt\right],\quad T_2(y)=\beta_2(y)S_7(y).$$

Принимая обозначение

$$T(y,t)=\begin{cases}T_0(y,t),\ 0\le t\le y,\\ T_1(y),\ y<t\le 1,\end{cases}$$

представим уравнение (35) в виде

$$\nu_2^-(y)+\int_0^1 T(y,t)\nu_2^-(t)\,dt=T_2(y). \tag{36}$$

Заключение

В силу свойств функций $T(y,t)$, $T_2(y)$ и единственности решения задачи 1, интегральное уравнение Фредгольма второго рода (36) однозначно разрешимо. Обращая это уравнение через резольвенту ядра $T(y,t)$, находим

$\nu_2^-(y)$, а $\nu_2^+(y)$ – из равенства (33). После определения функций $\tau_2^-(y)$, $\tau_2^+(y)$ из соотношений (9) и (29) решение задачи 1 в области Ω_0 находим как решение первой краевой задачи для уравнения (1), а в областях Ω_1, Ω_2 как решение соответствующих задач Коши.

Таким образом, доказана однозначная разрешимость исследуемой нелокальной краевой задачи.

Список литературы

1.Елеев В.А., Лайпанова А.М. О существовании и единственности решения задачи Ф.И. Франкля для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа // Известия КБНЦ РАН. 2000. № 2(5). – С. 50-56.

2.Елеев В.А., Лесев В.Н. О двух краевых задачах для смешанных уравнений с перпендикулярными линиями изменения типа // Владикавказский мат. журнал, 2001. – Т3. Вып.4. – С. 9-22.

3.Лесев В.Н., Желдашева А.О. Неклассическая краевая задача для смешанного уравнения второго порядка с интегральными условиями сопряжения // Известия смоленского государственного университета, 2013. №3 (23). – С. 379-386.

4.Лесев В.Н., Желдашева А.О. Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка в характеристической области // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки, 2012. – № 3 (106). – С. 52-56.

5.Лесев В.Н., Желдашева А.О. Об одной краевой задаче для смешанного уравнения с разрывными условиями сопряжения // Известия Смоленского государственного университета. 2012. № 3 (19). – С. 392-399.

6.Елеев В.А. Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференциальные уравнения, 1977. Т.13, №1. – С. 56-63.

References

1. Eleev V.A., Lajpanova A.M. O sushhestvovanii i edinstvennosti reshenija zadachi F.I. Franklja dlja smeshannogo uravnenija giperbolo-parabolicheskogo tipa // Izvestija KBNC RAN. 2000. № 2(5). – S. 50-56.

2. Eleev V.A., Lesev V.N. O dvuh kraevyh zadachah dlja smeshannyh uravnenij s perpendikuljarnymi linijami izmenenija tipa // Vladikavkazskij mat. zhurnal, 2001. – T3. Vyp.4. – S. 9-22.

3. Lesev V.N., Zheldasheva A.O. Neklassicheskaja kraevaja zadacha dlja smeshannogo uravnenija vtorogo porjadka s integral'nymi uslovijami soprjazhenija // Izvestija smolenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2013. №3 (23). – S. 379-386.

4. Lesev V.N., Zheldasheva A.O. Nelokal'naja kraevaja zadacha dlja uravnenija smeshannogo tipa vtorogo porjadka v harakteristicheskoj oblasti // Vestnik Adygejskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija 4: Estestvenno-matematicheskie i tehnicheskie nauki, 2012. – № 3 (106). – S. 52-56.

5. Lesev V.N., Zheldasheva A.O. Ob odnoj kraevoj zadache dlja smeshannogo uravnenija s razryvnymi uslovijami soprjazhenija // Izvestija Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta. 2012. № 3 (19). – S. 392-399.

6. Eleev V.A. Analog zadachi Trikomi dlja smeshannyh parabolo-giperbolicheskih uravnenij s neharakteristicheskoj liniej izmenenija tipa // Differencial'nye uravnenija, 1977. T.13, №1. – S. 56-63.