

УДК 514.84

UDC 514.84

АТОМ ШРЕДИНГЕРА И ЭЙНШТЕЙНА

EINSTEIN, SCHROEDINGER, AND ATOM

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.,
Scopus Author ID: 6603801161
Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
Scopus Author ID: 6603801161
Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

В работе сформулирована модель метрики, удовлетворяющая основным требованиям квантовой теории. Показано, что в такой метрике гравитационные волны описываются уравнением Лиувилля и уравнением Шредингера. Получены решения уравнений Эйнштейна, описывающие стационарные состояния произвольных квантовых и классических систем, обладающих центральной симметрией. Развита модель атома Эйнштейна, в которой атомы и атомные ядра могут быть представлены как стоячие гравитационные волны.

In this paper, we consider gravitation theory in multidimensional space. The model of the metric satisfying the basic requirements of quantum theory is proposed. It is shown that gravitational waves are described by the Liouville equation and the Schrodinger equation as well. The solutions of the Einstein equations describing the stationary states of arbitrary quantum and classical systems with central symmetry have been obtained. Einstein's atom model has been developed, and proved that atoms and atomic nuclei can be represented as standing gravitational waves.

Ключевые слова: АТОМ, ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ, ТЕОРИЯ СТРУН, ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА, ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ, ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ, ЯДРО.

Keywords: ATOM, GENERAL RELATIVITY, GRAVITATIONAL WAVES, BLACK ENERGY, BLACK MATTER, QUANTUM THEORY, STRING-THEORY.

Введение

Основы современной атомной теории были заложены в трудах Резерфорда, Бора, Зоммерфельда, Шредингера [1-4] и других. Резерфорд предположил, на основе опытов по рассеянию альфа и бета частиц на атомах, что атом состоит из положительного заряда, сосредоточенного в малой области, которую он назвал ядром и отрицательного заряда, который находится на периферии системы [1]. В 1913 году возникла планетарная модель атома Бора-Резерфорда [2], на основе которой, в 1919 г, Зоммерфельд построил теорию атома с эллиптическими орбитами электронов [3].

Модель Бора-Зоммерфельда позволяла полностью описать спектры, а также объяснить все основные эксперименты в области атомной физики на

основе классических представлений о движении электронов вокруг ядра с дополнительным условием квантования орбит. Но уже в 1926 году Эрвин Шредингер предложил новую теорию строения атомов, в которой электрон был представлен волновой функцией [4]. Таким образом, в новой квантовой теории электрон лишился орбиты, а правило квантования стало неотъемлемой частью модели атома Шредингера.

Однако интерпретация квантовой механики вызывала много вопросов, в частности, о физическом смысле волновой функции. В этой связи приведем фрагмент из письма Шредингера к Эйнштейну: «...я уже давно думаю, что следует отождествлять Ψ -волны с волнами нарушения гравитационного потенциала - конечно, не с теми, которые ты исследовал впервые, но с теми, которые обладают действительной массой, т.е. не исчезающим T_{ik} . Это значит, я думаю, что нужно в абстрактной общей теории относительности, содержащей T_{ik} еще как «*asylum ignorantial*» (по твоему собственному выражению), ввести материю не в качестве массивных точек или чего-нибудь подобного, а как квантованные гравитационные волны» [4].

Эйнштейн, создавая общую теорию относительности [5], предполагал, что должен существовать такой вариант теории поля, который описывает материю и гравитацию как единое целое. Для описания материи в рамках общей теории относительности Эйнштейн и Инфельд сформулировали программу [6]: «Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля».

В работе [7] была рассмотрена гипотеза о связи гравитационных волн с волнами де Бройля. Было показано, что каждой функции действия механической системы можно сопоставить сумму гравитационных волн. В работе [8] получены решения уравнений Эйнштейна, описывающие стационарные состояния произвольных механических систем, обладающих центральной симметрией. Таким образом, доказано, что атомы и атомные ядра могут быть представлены как стоячие гравитационные волны. В настоящей работе рассмотрена модель атома Эйнштейна.

Центрально-симметрическое поле и движение материи

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна имеют вид [5]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

$R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

В общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned} R_{ik} &= R_{ijk}^j, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\ R_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\beta\delta}^\mu \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_{\mu\delta}^\alpha, \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ - тензор Римана, Γ_{kl}^i - символы Кристоффеля второго рода.

Чтобы сохранить основную идею определения метрики в теории гравитации Эйнштейна, мы предположим, что уравнение Эйнштейна (1) распадается на два независимых уравнения [7-8]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \quad (3)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} (k - \Lambda)$$

Здесь k – некоторая функция, зависящая от размерности пространства. Отметим, что первым уравнением определяется метрика пространства-времени, а вторым уравнением задается распределение материи, которое соответствует этой метрике. Эта гипотеза соответствует идее о происхождении материи из гравитационного поля [6], но без специального предположения о наличии сингулярности метрики.

В [7-8] представлена модель квантовой гравитации в многомерных пространствах размерностью D с метрикой

$$ds^2 = \psi(t, r) dt^2 - p(\psi) dr^2 - d\phi_1^2 - \sin^2 \phi_1 d\phi_2^2 - \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 d\phi_3^2 - \dots - \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 \dots \sin^2 \phi_{N-1} d\phi_N^2 \quad (4)$$

Здесь $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ - углы на единичной сфере, погруженной в $D - 1$ мерное пространство. Метрика (4) описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике элементарных частиц и в теории супергравитации. Такой подход позволяет охватить все многообразие материи, которую производит фабрика природы, путем выбора уравнения состояния $p = p(\psi)$.

Рассмотрим гравитацию в пространствах с метрикой (4). Уравнение Эйнштейна в форме (3) является универсальным, поэтому обобщается на пространство любого числа измерений. Движение материи будем описывать уравнением Гамильтона-Якоби, которое также обобщается на любое число измерений. Вместе эти два уравнения составляют универсальную модель, описывающую движение материи в D -мерном пространстве:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \quad (5)$$

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = 0 \quad (6)$$

Уравнения поля в метрике (4) сводятся к одному уравнению второго порядка [7-8]

$$-p' \psi_{tt} + \psi_{rr} = -Kp\psi - \frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi} \psi_t^2 + \frac{p + p'\psi}{2p\psi} \psi_r^2 \quad (7)$$

В общем случае параметры модели и скалярная кривизна зависят только от размерности пространства, имеем

$$\begin{aligned} k &= D(D-5)/2 + 3, \\ K &= 2(D-3), \\ R &= -D^2 + 3D \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что уравнение (7) изменяет свой тип в зависимости от знака производной p' :

в области $p' < 0$ уравнение (7) имеет эллиптический тип;

в области $p' > 0$ уравнение (7) имеет гиперболический тип;

в области $p' = 0$ уравнение (7) имеет параболический тип.

Сигнатура метрики (4) не меняется, если потребовать дополнительно $p(\psi) > 0, \psi > 0$.

Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (4) имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\psi} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_1} \right)^2 - \sin^{-2} \phi_1 \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_2} \right)^2 - \\ &\sin^{-2} \phi_1 \sin^{-2} \phi_2 \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_3} \right)^2 - \dots - \sin^{-2} \phi_1 \sin^{-2} \phi_2 \dots \sin^{-2} \phi_{N-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_N} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (9) можно проинтегрировать при некоторых предположениях, используя метод, который предложил Шредингер [4]. Суть метода состоит в том, чтобы представить решение уравнения (11) в виде

$$S = S_{cl} + \hbar \ln \Psi_S \quad (10)$$

Здесь в теорию в явном виде вводится классическое действие - S_{cl} , постоянная Планка и волновая функция Ψ_s . Используя классическое действие, мы определяем те параметры задачи, которые могут считаться внешними для квантовой системы. В случае метрики (4) удобно будет выбрать в качестве переменных квантовой механики углы на единичной сфере, а в качестве координат классического действия – время и радиальную координату. Тогда уравнение (9) разделяется на два уравнения

$$\frac{1}{\psi} \left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r} \right)^2 = M^2$$

$$\left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi_1} \right)^2 + \sin^{-2} \phi_1 \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi_2} \right)^2 + \dots + \sin^{-2} \phi_1 \sin^{-2} \phi_2 \dots \sin^{-2} \phi_{N-1} \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi_N} \right)^2 = \frac{M^2}{\hbar^2} \Psi_s^2 \quad (11)$$

Здесь M – произвольная постоянная.

Гравитационные волны

Рассмотрим гравитационные волны, которые возникают в метрике (4) в случае линейного уравнения состояния. Положим в уравнении (7)

$$p = \psi / c^2, \psi = e^w.$$

Тогда уравнение (7) приводится к виду уравнения Лиувилля:

$$w_{tt} = c^2 w_{rr} + K e^w \quad (12)$$

Для уравнения (12) можно указать алгоритм построения общего решения и различных частных решений типа уединенных волн [9-15]. Общее решение дается формулой Лиувилля [10-11]:

$$w(r, t) = \ln \left[\frac{8c^2 f'(\eta) g'(\zeta)}{K (f(\eta) + g(\zeta))^2} \right], \quad \eta = ct - r, \zeta = r + ct \quad (13)$$

Здесь $f(\eta)$, $g(\zeta)$ – произвольные функции. Отметим, что уравнение (12) широко используется в теории струн и квантовой гравитации [12-15], поскольку соответствующая модель является полностью интегрируемой.

Обычно это уравнение выводится из принципа стационарности действия, однако использованный нами метод имеет то преимущество, что можно определить метрику, соответствующую гравитационным волнам и движение пробных частиц в этой метрике.

Действительно используя формулу Лиувилля (13), можно указать общее решение уравнений Эйнштейна в форме (3), описывающее гравитационные волны в метрике (4):

$$\psi(r, t) = \frac{8c^2 f_\eta(\eta) g_\zeta(\zeta)}{K(f(\eta) + g(\zeta))^2}, \quad p(\psi) = \psi / c^2, \quad (14)$$

$$K = 2(D - 3), \quad \eta = ct - r, \quad \zeta = r + ct$$

Гравитационные волны типа (14) распространяются в комбинации, включающей опережающие и запаздывающие волны. Следовательно, скалярные гравитационные волны могут служить источником квантового движения частиц, например, в форме волн де Бройля [16].

Действительно, запишем первое уравнение (11) в метрике (14), имеем

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r} \right)^2 = \frac{8M^2}{K} \frac{f_\eta(\eta) g_\zeta(\zeta)}{(f(\eta) + g(\zeta))^2} \quad (15)$$

Предполагая, что действие зависит от координат η, ζ , преобразуем обе части уравнения (15) к эквивалентному виду

$$4 \left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial \zeta} \right) = \frac{8M^2}{K} \frac{\partial \ln(f(\eta) + g(\zeta))}{\partial \eta} \frac{\partial \ln(f(\eta) + g(\zeta))}{\partial \zeta} \quad (16)$$

Отсюда следует, что действие можно выразить через произвольные функции $f(\eta), g(\zeta)$ в виде

$$S_{cl} = M \sqrt{\frac{2}{K}} \ln[f(\eta) + g(\zeta)] \quad (17)$$

Уравнение (17) можно рассматривать и в обратную сторону, предполагая, что неизвестные функции $f(\eta)$, $g(\zeta)$ связаны с действием пробных частиц

$$f(\eta) + g(\zeta) = \exp(S_{cl} / h), \quad h = M \sqrt{\frac{2}{K}} \quad (18)$$

Все функции, входящие в уравнение (18) являются вещественными.

Если предположить, что

$$p = -\psi / c^2, \quad \psi = e^w \quad (19)$$

Тогда, подставляя в уравнение (7) выражения (20), приходим к уравнению Лиувилля эллиптического типа

$$w_{tt} + c^2 w_{rr} = K e^w \quad (20)$$

В этом случае также можно получить решения уравнения (20) общего вида, которые выражаются через аналитические функции [10]. Применение эллиптической модели (20) в квантовой теории гравитации можно найти в работе [13].

Метрика Шварцшильда и уравнение состояние материи

Все статические метрики вида (4) описываются уравнением (7), полагая в этом уравнении $\psi_t = \psi_{tt} = 0$, находим

$$\psi_{rr} = -Kp\psi + \frac{p + p'\psi}{2p\psi} \psi_r^2 \quad (21)$$

Интегрируя уравнение (21), получим

$$p\psi(C - 2K\psi) = \psi_r^2 \quad (22)$$

C – произвольная постоянная. Для физических приложений представляют интерес статические решения, которые имеют в качестве асимптотики метрику Шварцшильда, описывающую гравитационное поле точечной массы

$$\psi = 1 - \frac{2m}{R} \quad (23)$$

Метрика (23) широко используется в теории в связи с явлением коллапса, ведущим к образованию черных дыр. Заметим, что метрика Шварцшильда определена в сферических координатах, тогда как метрика (4) является центрально-симметрической. Для согласования метрик положим $R = 1/r$, тогда метрика Шварцшильда преобразуется к виду

$$\psi = 1 - 2mr \quad (24)$$

Среди статических метрик, имеющих в качестве асимптотики метрику Шварцшильда (23), можно выделить экспоненциальную зависимость

$$\psi = \exp(-2mr) = 1 - 2mr + \dots \quad (25)$$

Подставляя выражение (25) в уравнение (22), находим уравнение состояния, которое согласовано с метрикой Шварцшильда

$$p = \frac{4m^2\psi}{C - 2K\psi} = \frac{2m^2}{K} \frac{-1}{1 \pm \exp(2mr - \mu)}, \quad (26)$$

$$\frac{dp}{d\psi} = \frac{C}{(C - 2K\psi)^2}, \quad C = \pm 2Ke^{-\mu}$$

Заметим, что в метрике Шварцшильда (23) параметр m соответствует массе или энергии покоя системы. Мы предполагаем, что источник гравитации типа точечной массы обусловлен в метрике (4) наличием двух типов уравнения состояния, соответствующих бозонам и фермионам.

Сопоставим первое уравнение (26) с квантовыми статистиками:

- в случае бозонов $p = \frac{2m^2}{K} \frac{1}{\exp(2mr - \mu) - 1}, \quad C > 0, p(\psi) > 0, p'(\psi) > 0;$

- в случае фермионов $p = -\frac{2m^2}{K} \frac{1}{\exp(2mr - \mu) + 1}, \quad C < 0, p(\psi) < 0, p'(\psi) < 0.$

Указанное деление материи на бозоны и фермионы по виду уравнения состояния (26) является условным. Как известно, деление частиц на

фермионы и бозоны первоначально возникло в статистической физике, и лишь благодаря теореме Паули была установлена связь спина со статистикой.

Стационарные состояния квантовых и классических систем

Покажем, что для любой квантовой или классической системы, обладающей центральной симметрией и заданной энергией, существует такая метрика, что действие системы будет связано с некоторым решением уравнения (7). В случае линейного уравнения состояния доказательство было получено в явном виде – уравнение (17). В случае стационарных состояний действие системы можно представить в виде $S_{cl} = -Et + S_1(r)$. Используя первое уравнение (11) и уравнение (22), находим

$$\begin{aligned} p\psi(C - 2K\psi) &= \psi_r^2 \\ \frac{E^2}{\psi} - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 &= M^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Выразим $p = p(\psi)$ из первого уравнения и подставим во второе, тогда получим

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 2K\psi)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 \quad (28)$$

Очевидно, что решения уравнения (28) при всех вещественных значениях параметров и метрики определены в комплексной плоскости. Действительно, уравнение (28) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \psi} \right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 2K\psi)} \quad (29)$$

Отсюда следует, что функция действия в общем случае либо является комплексной, либо движение ограничено условием

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \psi} \right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C - 2K\psi)} \geq 0 \quad (30)$$

Поскольку же метрика допускает любые движения, то отсюда следует, что функция действия является комплексной. Разрешая уравнение (29), находим в явном виде зависимость действия стационарных систем от метрики окружающего пространства

$$S_1(\psi) = S_0 \pm \frac{E}{\sqrt{C}} \ln \psi \mp \frac{E}{\sqrt{C}} \ln \left(2CE^2 - 2KE^2\psi - CM^2\psi + 2E\sqrt{C(C-2K\psi)(E^2 - M^2\psi)} \right) \mp \frac{M}{\sqrt{2K}} \ln \left(-2E^2K - CM^2 + 4KM^2\psi + 2M\sqrt{2K(C-2K\psi)(E^2 - M^2\psi)} \right) \quad (31)$$

Здесь логарифмическая функция определена в комплексной плоскости, S_0 – произвольная постоянная.

В случае $C = 0$ решение уравнения (29) имеет вид

$$S_1 = S_0 \mp \sqrt{\frac{2(M^2\psi - E^2)}{K\psi}} \pm \sqrt{\frac{2}{K}} M \ln \left[M \left(\sqrt{\psi} M + \sqrt{M^2\psi - E^2} \right) \right] \quad (32)$$

Полученные зависимости (31)-(32) решают поставленную задачу. Таким образом, мы доказали, что действие любой механической системы – классической или квантовой, находящейся в стационарном состоянии, зависит от параметров, характеризующих движение и от метрики окружающего пространства. Следовательно, для каждого типа движения существует такое уравнение состояния $p = p(\psi)$, что движение полностью определяется метрикой и параметрами движения – энергией и угловым моментом, что и требовалось доказать.

На рис. 1 представлена зависимость $\text{Re } S, \text{Im } S, |S|, \text{Arg}(S)$ от параметров C, E при заданных значениях $E = \pm 1; M = 1, K = 2$. Основной вывод, который следует из анализа выражения (31) и данных на рис. 1, это разделение действия бозонов и фермионов «стеной», имеющей особенность $S \sim 1/\sqrt{C}$.

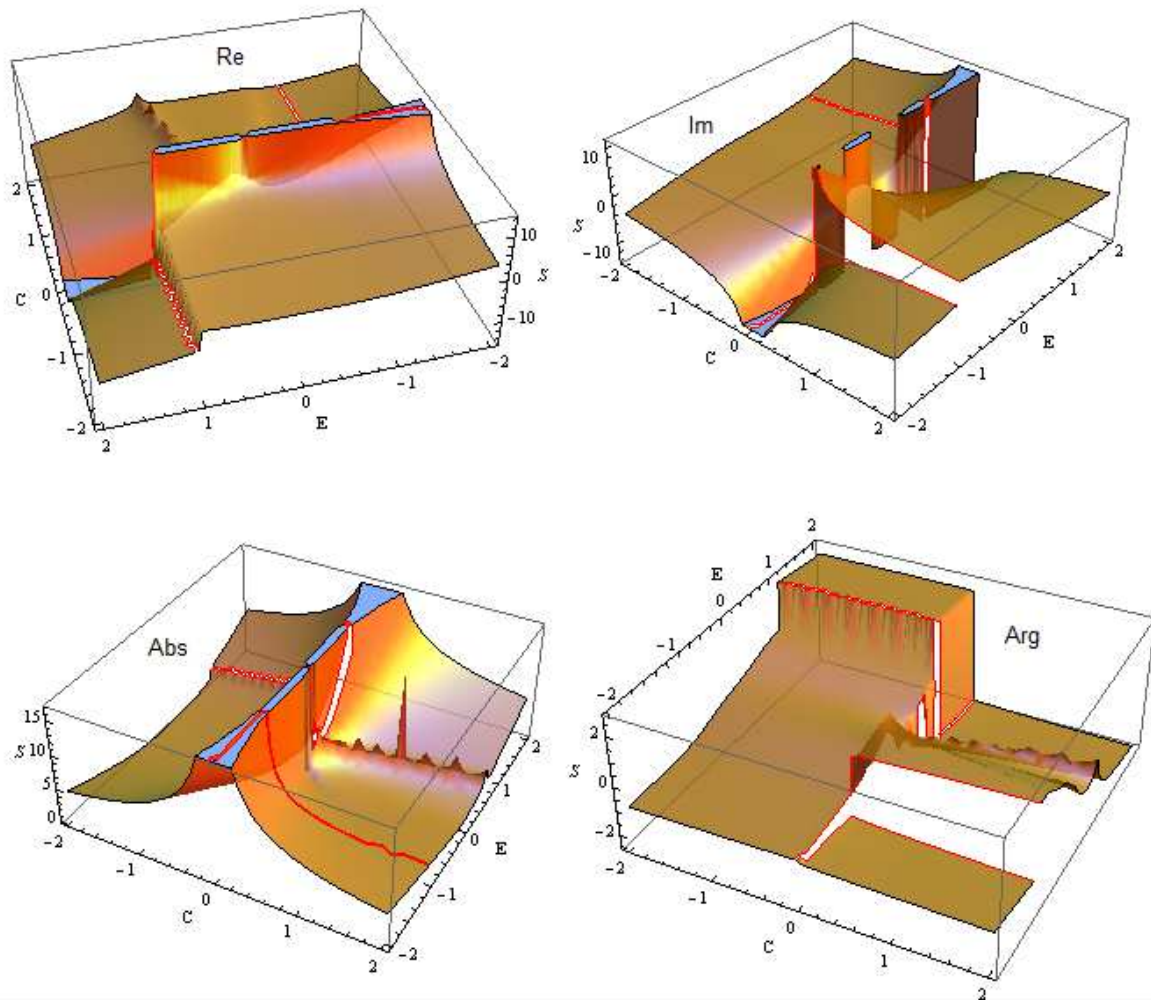


Рис. 1. Зависимость $\text{Re } S, \text{Im } S, |S|, \text{Arg}(S)$ от параметров C, E при заданном значении $\psi = 1; K = 2; M = 1$.

Отметим, что изменение действия вблизи некоторых особых линий происходит скачком, но оно не связано с изменением метрики, а обусловлено только изменением энергии системы. Эти скачки отчетливо наблюдаются на правом нижнем рис. 1, где отображена поверхность фазы действия. Следовательно, в природе существует такое движение фермионов и бозонов, при котором действие изменяется скачком. Такого типа процессы, как

известно, называются квантовыми, а само их наличие приводит к квантовой механике.

Уравнение Шредингера

Покажем, что квантовая механика Шредингера соответствует такой области уравнения состояния, в которой $p' = 0$, а уравнение (7) имеет параболический тип. Действительно, уравнение поля (7) сводится в этом случае к параболическому уравнению

$$\psi_{rr} - \frac{1}{2\psi} \psi_r^2 + Kp\psi = p'' \psi_t^2 \quad (33)$$

Из уравнения состояния (26) находим, что

$$\frac{dp}{d\psi} = \frac{C}{(C - 2K\psi)^2} = 0 \rightarrow C = 0, \quad p = \frac{4m^2\psi}{C - 2K\psi} = -\frac{2m^2}{K} \quad (34)$$

В пространстве четырех измерений находим из (8), что $K = 2$. Далее предположим, что $p'' > 0$. Это предположение носит принципиальный характер, так как оно не связано напрямую с уравнением состояния (34).

Полагая $\psi = e^w$, получим

$$w_{rr} + \frac{1}{2} w_r^2 - 2m^2 = p'' \psi w_t^2 \quad (35)$$

Уравнение Шредингера непосредственно следует из уравнения (35), если предположить, что энергия системы слабо изменяется по сравнению с энергией покоя, а уравнение состояния удовлетворяет соотношению

$$p'' \psi = \sigma \neq 0 \quad (36)$$

Здесь σ некоторая константа. Тогда, интегрируя уравнение (36) находим, что в этом случае

$$p' = \sigma \ln \psi \xrightarrow{\psi \rightarrow 1} 0 \quad (37)$$

Следовательно, уравнение (35) принимает вид

$$w_{rr} + \frac{1}{2} w_r^2 - 2m^2 = \sigma w_t^2 \quad (38)$$

Легко видеть, что при $w_{rr} = w_r^2 = 0$ уравнение (38) имеет только комплексные решения. Поэтому рассмотрим в общем случае комплексные решения уравнения (38). Извлекая корень квадратный из обеих частей уравнения, получим

$$\pm i\sqrt{2m} \sqrt{1 - \frac{1}{2m^2} \left(w_{rr} + \frac{1}{2} w_r^2 \right)} = \sqrt{\sigma} w_t \quad (39)$$

Предположение о малости изменения энергии по сравнению с энергией покоя означает, что можно разложить подкоренное выражение в левой части (39), в результате находим

$$\pm i\sqrt{2m} \mp \frac{i}{2\sqrt{2m}} \left(w_{rr} + \frac{1}{2} w_r^2 \right) + \dots = \sqrt{\sigma} w_t \quad (40)$$

Представим решение уравнения (40) в виде

$$w = \pm i\sqrt{2/\sigma} mt + \Psi(r, t) \quad (41)$$

Подставляя выражение (41) в уравнение (40), получим в первом приближении

$$\mp \frac{i}{2\sqrt{2m}} \left(\Psi_{rr} + \frac{1}{2} \Psi_r^2 \right) = \sqrt{\sigma} \Psi_t \quad (42)$$

Уравнение (42) можно сравнить с уравнение Шредингера

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi_s + U \Psi_s = i\hbar \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} \quad (43)$$

Для согласования уравнений (42) и (43) в случае сферической симметрии достаточно будет положить

$$\sqrt{2\sigma} = 1/\hbar, \quad \Psi = 2 \ln r + \tilde{\Psi}, \quad \frac{1}{4m\sqrt{2\sigma}} \langle \tilde{\Psi}_r^2 \rangle = -U\tilde{\Psi} \quad (44)$$

Последнее условие можно рассматривать как калибровку, накладываемую на потенциал.

Указанное согласование двух моделей является формальным шагом на пути создания новой квантовой механики, аналогично принципу соответствия Бора [2]. Очевидно, что нелинейная модель (7) и вытекающая из нее модель (33) могут быть согласованы с уравнением Шредингера (43) только в узкой

области параметров уравнения состояния. Однако замечательным является сам факт наличия соответствия теории Эйнштейна и теории Шредингера, что позволяет использовать соответствующие нелинейные модели, как основу для создания новой теории атома.

Атом Эйнштейна

Рассмотрим модель атома в теории относительности Эйнштейна. Мы предполагаем, что атом целиком состоит из гравитационных волн разного масштаба. Никакой другой материи, полей или взаимодействий, кроме тех, которые описывают уравнения (5)-(6), не предполагается. В случае центрально-симметрической метрики (4), описывающей атом, уравнения модели сводятся к уравнению (7). Все статические решения уравнения (7) описываются уравнением (22), зависящим от произвольной функции и константы. Функция действия выражается в замкнутом виде как функция метрики, энергии и углового момента согласно (31)-(32).

Статические решения уравнения (7) типа Шварцшильда существуют при условии, что уравнение состояния сводится к известным в физике уравнениям (26), описывающим бозоны и фермионы. На границе между фермионами и бозонами действие изменяется скачком, что приводит к квантовым явлениям. В этой области $p' = 0$, поэтому уравнение (7) сводится к уравнению параболического типа (33). Частным случаем нелинейного уравнения (33) является нелинейное уравнение Шредингера (42).

Далее заметим, что условие $p' = 0$ не может выполняться во всей области пространства-времени. Следовательно, атом Эйнштейна всегда отделен от остальной области пространства-времени резкой границей. На этой границе величина p' меняется скачком от $p' = 0$ до $p' = 1/c^2$.

Существует широко распространенное мнение, что нерелятивистская квантовая теория и, в частности, теория атома Шредингера [4], является предельным случаем релятивистских уравнений типа Дирака и Клейна-

Гордона, при условии, что $v/c \rightarrow 0$. Для конечной скорости света указанное условие соответствует $v \rightarrow 0$. Однако условие $p' = 0$ соответствует другому предельному случаю $c \rightarrow \infty$, который как раз является следствием общей теории относительности.

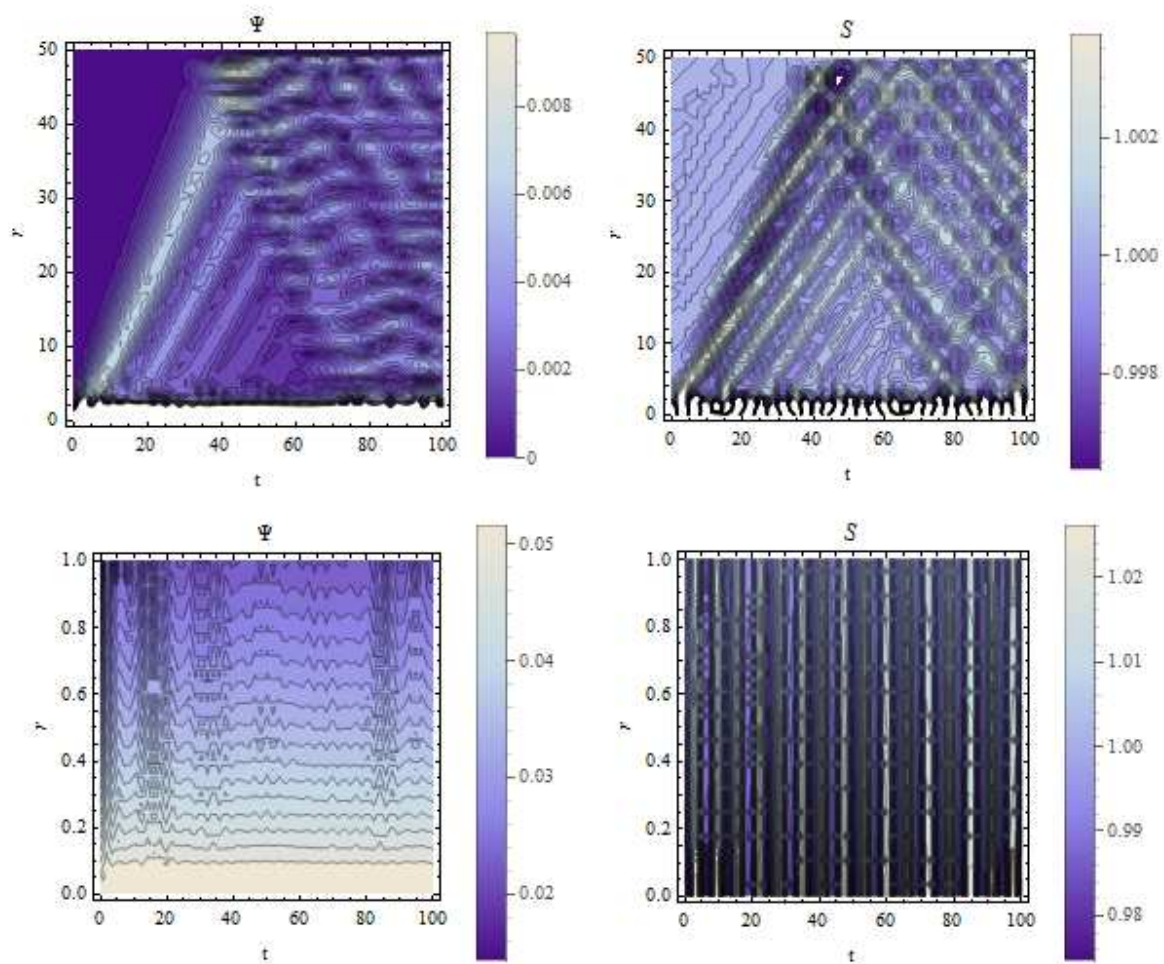
Отметим, что метрика пузыря, рассмотренная в наших работах [18-23] и других, описывает атом Эйнштейна. В указанных работах использовались решения уравнений Янга-Миллса в случае центрально-симметрической метрики [24].

Для уравнения (42) можно поставить следующую задачу:

$$\begin{aligned} i\Psi_t + \Psi_{rr} + \frac{1}{2}\Psi_r^2 &= 0 \\ \Psi(0, r) &= B(1 - r/L)\exp(-r^2), \\ \Psi(t, 0) &= B\exp(i\alpha t), \Psi(t, L) = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

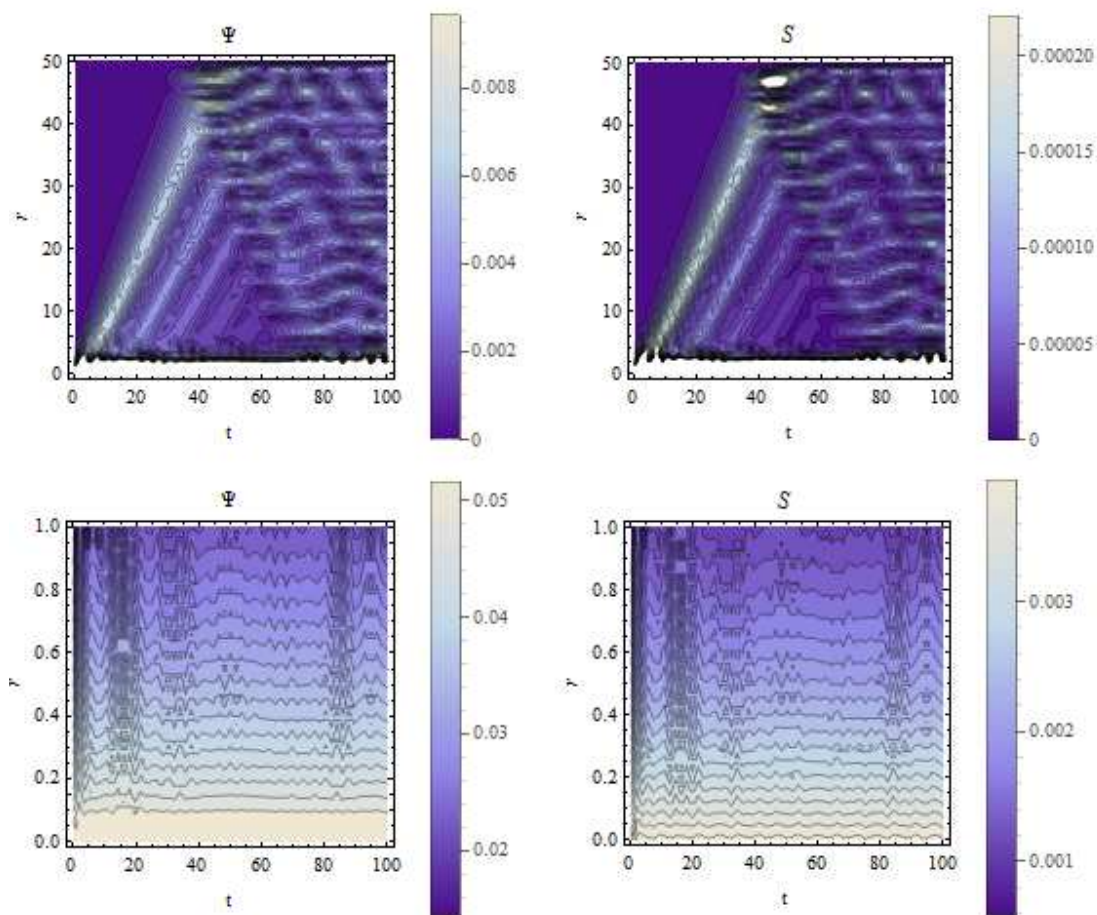
Здесь L – радиус пузыря. Мы использовали безразмерную форму уравнения (42), путем замены $t/2\sqrt{2m\sigma} \rightarrow t$. Первым условием (45) задается начальное распределение возмущений метрики. Второе условие описывает источник колебаний в центре системы, а третье условие соответствует гипотезе скачка функции p' .

На рис. 2-5 показана абсолютная величина волновой функции и действия для различных значений параметров модели. Из этих данных можно составить представление о том, как формируется атом Эйнштейна из начального распределения метрики. Такой атом всегда имеет ядро и оболочки. В центре ядра находится источник колебаний, излучающий волны, которые заполняют полость, создавая радиальное распределение плотности. Конечная конфигурация соответствует стоячим волнам, которые существуют при определенных условиях. При условии $E = M$ действие системы практически совпадает с волновой функцией - рис. 3, что непосредственно следует из выражения (32).



$M = 0, E = 1$

Рис. 2. Моделирование гравитационных волн на основе модели (45) и действия системы по уравнению (32) при малом значении параметра $B = 0.051$.



$$M = 1, E = 1$$

Рис. 3. Моделирование гравитационных волн на основе модели (45) и действия системы по уравнению (32) при малом значении параметра $B = 0.051$.

Модуль волновой функции имеет максимум в центре системы, что на 2-3 порядка превосходит значение модуля волновой функции на границе атома – рис. 4. Отметим, что в реальном атоме основная масса также сосредоточена

в ядре, а электронные оболочки имеют лишь незначительную массу, которая определяется отношением массы электрона к массе протона.

В этой связи заметим, что волновая функция в теории атома Шредингера вообще не описывает ядро системы. Это обусловлено формулировкой задачи двух тел в классической динамике, в которой фигурирует только приведенная масса системы.

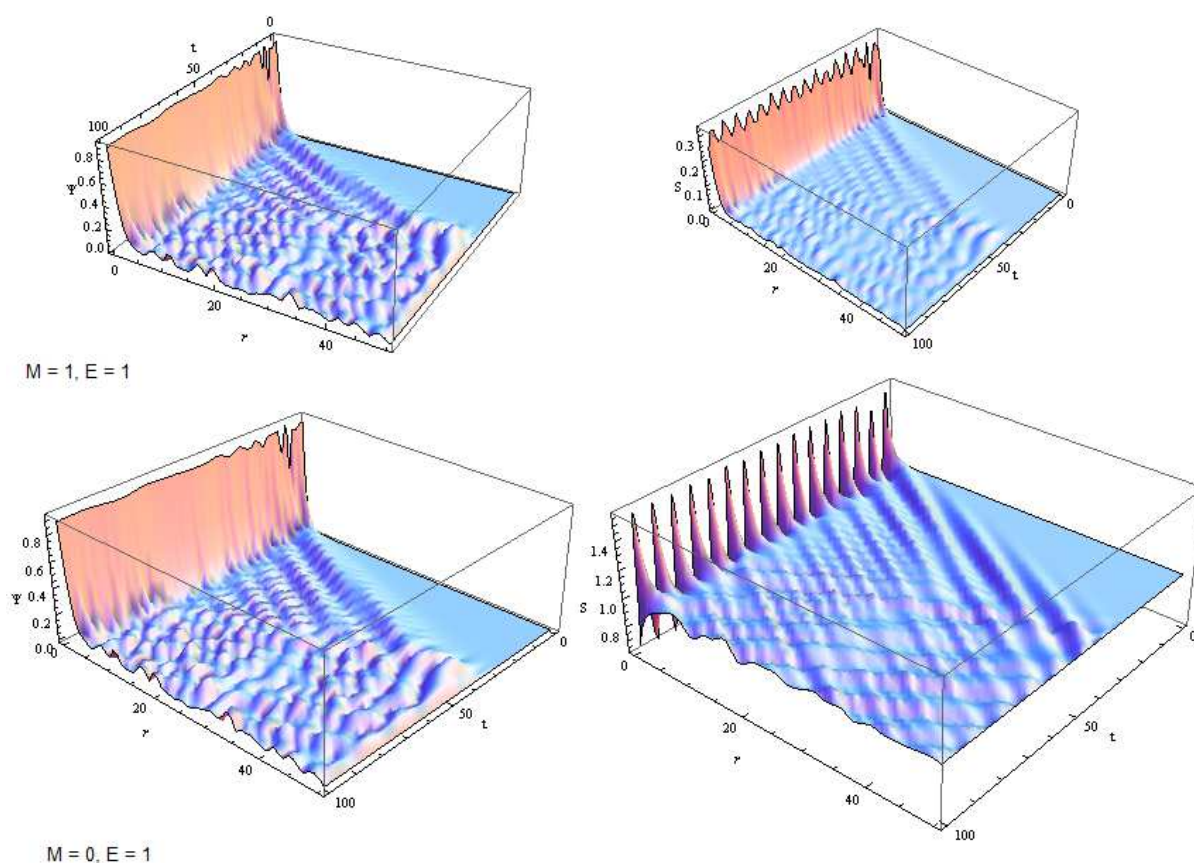


Рис. 4. Моделирование гравитационных волн на основе модели (45) и действия системы по уравнению (32) при большом значении параметра $B = 1$.

Решение нелинейной задачи (45) существенно зависит от начальной амплитуды сигнала – рис. 4-5. При большой величине параметра $B \approx 2$ решение становится неустойчивым, в результате чего в центральной части системы формируются большие пики модуля волновой функции - рис. 5. Возможно, что этим объясняется неустойчивость атомных ядер, ведущая к их распаду.

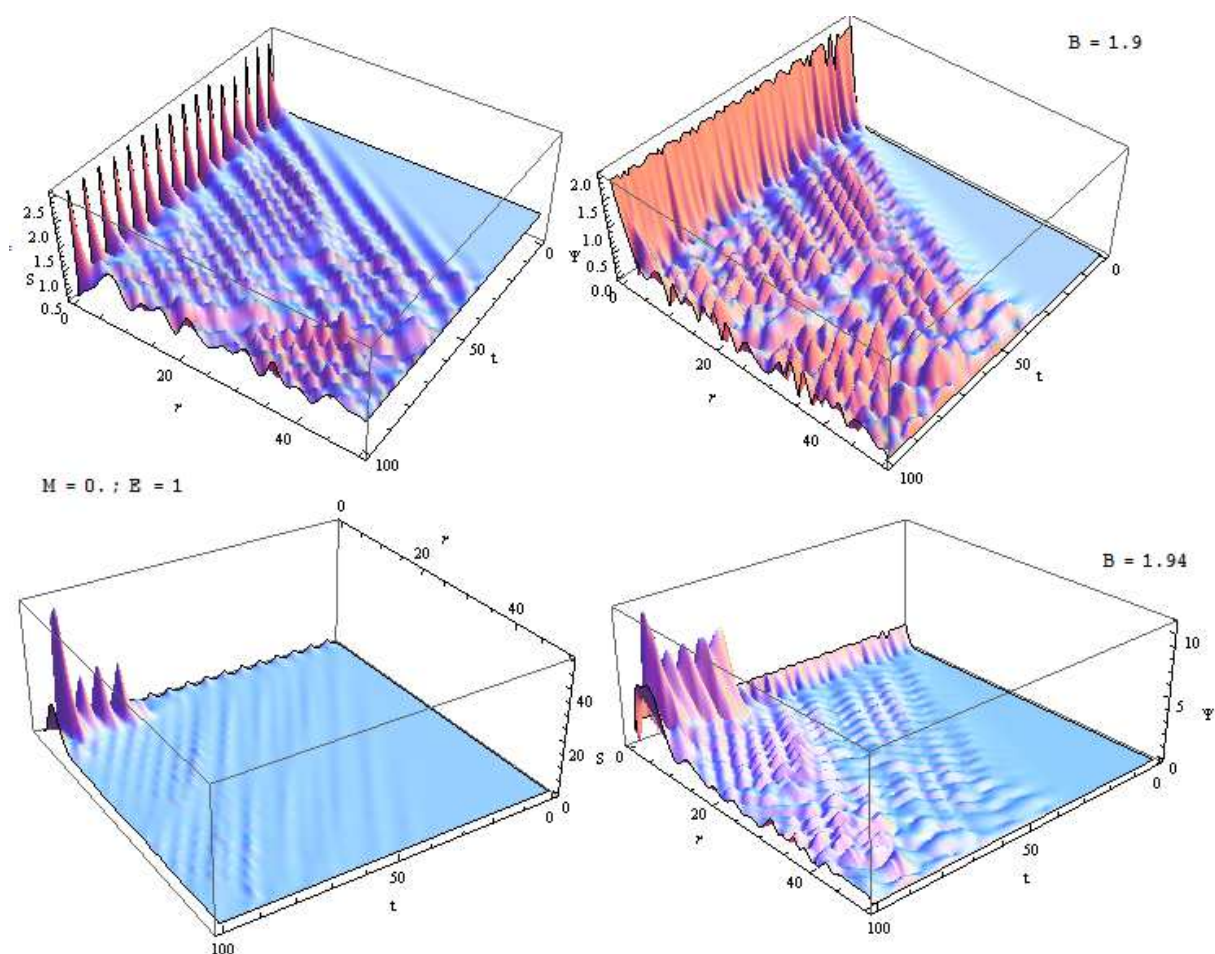


Рис. 5. Моделирование гравитационных волн на основе модели (45) и действия системы по уравнению (32) при большом значении параметра $B = 1.9; 1.94$ – верхние и нижние рисунки соответственно.

Условие квантования энергии в задаче (45) получается особенно простым, если учесть, что в теории [18-23] квантуется размер пузыря по формуле $L = nL_0, n = 1, 2, \dots$. Если периодическая функция типа синуса на границе пузыря обращается в ноль, то отсюда вытекает условие типа $kL = Z\pi, Z = 1, 2, \dots$.

Энергия связана с волновым числом соотношением

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2 Z^2}{2mn^2 L_0^2}$$

В теории Шредингера водородоподобные уровни энергии даются формулой

$$E = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

Сравнивая две формулы, находим, что основной размер пузыря равен

$$L_0 = \frac{\pi\hbar^2}{e^2 m} = \pi r_B$$

Следовательно, характерный размер атома Эйнштейна в π раз превосходит радиус Бора. Таким образом, мы доказали гипотезу Шредингера [4] о связи волновой функции с гравитационными волнами.

Наконец заметим, что с учетом полученных выше результатов теория относительности Эйнштейна [5] может найти более широкую область применения не только в космологии, но и в квантовой механике.

Библиографический список

1. E. Rutherford. The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom// Philosophical Magazine. Series 6, vol. 21. May 1911.

2. Niels Bohr. On the Constitution of Atoms and Molecules, Part I// Philosophical Magazine 26 (151): 1–24; On the Constitution of Atoms and Molecules, Part II Systems Containing Only a Single Nucleus// Philosophical Magazine 26 (153): 476–502, 1913.

3. Arnold Sommerfeld. Atombau und Spektrallinien. - Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1919; Зоммерфельд А. Структура атома и спектры. Том 1, 2. М.: ГИТТЛ, 1956.

4. Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 361-376; Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 489-527; Letter Schrodinger to Einstein, Jul 19, 1939.

5. Einstein A. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 778—786; Erklärung der Perihelbeivegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839; Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Phys., 1916, 49, 769—822; Nahemngsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696; Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Über Gravitationwellen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.

6. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464; On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.

7. Трунев А.П. Гравитационные волны и квантовая теория Шредингера// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>

8. Трунев А.П. Гравитационные волны и стационарные состояния квантовых и классических систем// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №03(097). – IDA [article ID]: 0971403090. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf>

9. N.H. Ibragimov. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. – Reidel, Boston, 1984.

10. Darren G. Growdy. General Solution to the 2D Liouville Equation//Int. J. Engng Sci., Vol. 35, No. 2, pp. 141-149, 1997.

11. Nir Cohen, Julia V. Toledo Benavides. Exact solutions of Bratu and Liouville equations// CNMAC 2010, pp. 750-756.

12. Polyakov A.M. Quantum geometry of bosonic strings//Phys. Letter, 103B, 3, 1981.

13. Zamolodchikov A, Zamolodchikov Al. Liouville Field Theory on a Pseudosphere// arxiv: hep-th/0101152v1. 23 Jan, 2001.

14. J. Teschner. Liouville theory revisited// arxiv: hep-th/0104158v3, 9 Nov 2001.

15. Yu Nakayama. Liouville Field Theory// arxiv: hep-th/0402009v7, 10Dec, 2004.

16. L. de Broglie. Recherches sur la theorie des quanta. - Thesis (Paris), 1924.

17. Clinton J. Davisson, Lester H. Germer. Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel// Phys. Rev. 30, 705, 1927; Clinton J. Davisson. The discovery of electron waves. Nobel Lecture, Dec 13, 1937.

18. Trunev AP. Hadrons metrics simulation on the Yang-Mills equations // Poly-thematic electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2012. - № 10 (84). P. 874 - 887. - Mode of access: <http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/68.pdf>

19. Alexander Trunev. Preons dynamics and structure of quarks and leptons// Poly-thematic electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2013. - № 04 (088). - Mode of access: <http://ej.kubagro.ru/2013/04/pdf/64.pdf>

20. Trunev AP. Dynamics of quarks in the hadrons metrics with application to the baryon structure // Poly-thematic electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2013. - № 01 (085). P. 525 - 542. - Mode of access: <http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/42.pdf>

21. Trunev AP. The dynamics of quarks in the baryons metric and structure of the nucleus // Poly-thematic power electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2013. - № 01 (85). P. 623 - 636. - Mode of access: <http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/49.pdf>

22. Trunev AP. Quark dynamics in atomic nuclei and quark shells // Poly-thematic electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2013. - № 02 (86). P. 674 - 697. - Mode of access: <http://ej.kubagro.ru/2013/02/pdf/48.pdf>

23. Trunev AP. Preons shell and atomic structure // Poly-thematic electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2013. - № 03 (87). P. 795 - 813. - Mode of access: <http://ej.kubagro.ru/2013/03/pdf/61.pdf>

24. Krivonosov LN, Luk'yanov VA. The Full Decision of Young-Mills Equations for the Central-Symmetric Metrics // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics, 2011, 4 (3), 350-362 (in Russian).

Bibliograficheskiy spisok

1. E. Rutherford. The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom// Philosophical Magazine. Series 6, vol. 21. May 1911.

2. Niels Bohr. On the Constitution of Atoms and Molecules, Part I// Philosophical Magazine 26 (151): 1–24; On the Constitution of Atoms and Molecules, Part II Systems Containing Only a Single Nucleus// Philosophical Magazine 26 (153): 476–502, 1913.

3. Arnold Sommerfeld. Atombau und Spektrallinien. - Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1919; Zommerfel'd A. Stroenie atoma i spektry. Tom 1, 2. M.: GITTL, 1956.

4. Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 361-376; Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 489-527; Letter Schrodinger to Einstein, Jul 19, 1939.

5. Einstein A. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 778—786; Erklärung der Perihelabweichung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839; Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Phys., 1916, 49, 769—822; Nahemungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696; Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Über Gravitationswellen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.

6. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464; On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.

7. Trunев A.P. Gravitacionnye volny i kvantovaja teorija Shredingera// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf>

8. Trunев A.P. Gravitacionnye volny i stacionarnye sostojanija kvantovyh i klassicheskikh sistem// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №03(097). – IDA [article ID]: 0971403090. – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf>

9. N.H. Ibragimov. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. – Reidel, Boston, 1984.

10. Darren G. Growdy. General Solution to the 2D Liouville Equation//Int. J. Engng Sci., Vol. 35, No. 2, pp. 141-149, 1997.

11. Nir Cohen, Julia V. Toledo Benavides. Exact solutions of Bratu and Liouville equations// CNMAC 2010, pp. 750-756.

12. Polyakov A.M. Quantum geometry of bosonic strings//Phys. Letter, 103B, 3, 1981.

13. Zamolodchikov A, Zamolodchikov Al. Liouville Field Theory on a Pseudosphere// arxiv: hep-th/0101152v1. 23 Jan, 2001.

14. J. Teschner. Liouville theory revisited// arxiv: hep-th/0104158v3, 9 Nov 2001.

15. Yu Nakayama. Liouville Field Theory// arxiv: hep-th/0402009v7, 10Dec, 2004.

16. L. de Broglie. Recherches sur la theorie des quanta. - Thesis (Paris), 1924.

17. Clinton J. Davisson, Lester H. Germer. Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel// Phys. Rev. 30, 705, 1927; Clinton J. Davisson. The discovery of electron waves. Nobel Lecture, Dec 13, 1937.

18. Trunев AP. Hadrons metrics simulation on the Yang-Mills equations / / Poly-thematic electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2012. - № 10 (84). P. 874 - 887. - Mode of access: <http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/68.pdf>

19. Alexander Trunев. Preons dynamics and structure of quarks and leptons// Poly-thematic electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2013. - № 04 (088). - Mode of access: <http://ej.kubagro.ru/2013/04/pdf/64.pdf>

20. Trunев AP. Dynamics of quarks in the hadrons metrics with application to the baryon structure // Poly-thematic electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2013. - № 01 (085). P. 525 - 542. - Mode of access: <http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/42.pdf>

21. Trunев AP. The dynamics of quarks in the baryons metric and structure of the nucleus // Poly-thematic power electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2013. - № 01 (85). P. 623 - 636. - Mode of access: <http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/49.pdf>

22. Trunев AP. Quark dynamics in atomic nuclei and quark shells // Poly-thematic electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2013. - № 02 (86). P. 674 - 697. - Mode of access: <http://ej.kubagro.ru/2013/02/pdf/48.pdf>

23. Trunев AP. Preons shell and atomic structure // Poly-thematic electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2013. - № 03 (87). P. 795 - 813. - Mode of access: <http://ej.kubagro.ru/2013/03/pdf/61.pdf>

24. Krivonosov LN, Luk'yanov VA. The Full Decision of Young-Mills Equations for the Central-Symmetric Metrics // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics, 2011, 4 (3), 350-362 (in Russian).