УДК 514.84

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ КВАНТОВЫХ И КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.,
Scopus Author ID: 6603801161
Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

В работе рассмотрена теория гравитации в многомерных пространствах. Сформулирована модель метрики, удовлетворяющая основным требованиям квантовой теории. Показано, что в такой метрике гравитационные волны описываются уравнением Лиувилля и уравнением Шредингера. Получены решения уравнений Эйнштейна, описывающие стационарные состояния произвольных квантовых и классических систем, обладающих центральной симметрией. Таким образом, доказано, что атомы и атомные ядра могут быть представлены как стоячие гравитационные волны.

Ключевые слова: ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ, ТЕОРИЯ СТРУН, ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА, ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ, ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ.

UDC 514.84

GRAVITATIONAL WAVES AND STATIONARY STATES OF QUANTUM AND CLASSICAL SYSTEMS

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
Scopus Author ID: 6603801161
Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

In this paper, we consider gravitation theory in multidimensional space. The model of the metric satisfying the basic requirements of quantum theory is proposed. It is shown that gravitational waves are described by the Liouville equation and the Schrodinger equation as well. The solutions of the Einstein equations describing the stationary states of arbitrary quantum and classical systems with central symmetry have been obtained. Thus, it is proved that atoms and atomic nuclei can be represented as standing gravitational waves.

Keywords: GENERAL RELATIVITY, GRAVITATIONAL WAVES, BLACK ENERGY, BLACK MATTER, QUANTUM THEORY, STRING-THEORY.

Введение

В последнее время, в связи с открытием темной энергии и темной материи, возникла проблема интерпретации барионной материи, содержание которой во Вселенной составляет не более 5% /1-2/.

Во-первых, необходимо указать механизм возникновения барионной материи из темной материи или энергии. Во-вторых, следует объяснить, почему в лабораториях наблюдаются только частицы, находящиеся в связи с барионной материей, но нет никаких следов темной энергии или темной материи.

Этот вопрос, на наш взгляд, напрямую связан с гравитационными волнами, которые недавно были обнаружены путем анализа поляризации фонового микроволнового излучения, в полном соответствии с теорией инфляции /3/.

В работе /4/ было рассмотрена гипотеза о связи гравитационных волн с волнами де Бройля, на что ранее указал Шредингер в переписке с Эйнштейном /5/. Было показано, что каждой функции действия механической системы можно сопоставить сумму гравитационных волн. В настоящей работе получены решения уравнений Эйнштейна /6/, описывающие стационарные состояния произвольных механических систем, обладающих центральной симметрией. Таким образом, доказано, что атомы и атомные ядра могут быть представлены как стоячие гравитационные волны.

Центрально-симметрическое поле и движение материи

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна имеют вид /6/:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu}\Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (1)$$

$R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

В общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &R_{ik} = R^j_{ijk}, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\ &R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\mu_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\mu\delta}, \\ &\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s}\right) \end{aligned} \qquad (2)$$

$R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ - тензор Римана, Γ^i_{kl} – символы Кристоффеля второго рода.

Тензор энергии-импульса материи в уравнении (1), вообще говоря, зависит от гравитационного поля. В этой связи Эйнштейн и Инфельд сформулировали программу /7/:

«Все попытки представить материю тензором энергии-импульса неудовлетворительны, и мы хотим освободить нашу теорию от специального выбора такого тензора. Поэтому мы будем иметь дело здесь только с гравитационными уравнениями в пустом пространстве, а материя будет представлена сингулярностями гравитационного поля».

Этот подход к решению проблемы происхождения материи не является единственным. Чтобы сохранить основную идею определения метрики в теории гравитации Эйнштейна, мы предположим, что уравнение Эйнштейна (1) распадается на два независимых уравнения /4/:

$$\begin{gathered} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \\ \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(k - \Lambda) \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь k – некоторая функция, зависящая от размерности пространства. Отметим, что первым уравнением определяется метрика пространства-времени, а вторым уравнением задается распределение материи, которое соответствует этой метрике. Эта гипотеза соответствует идее о происхождении материи из гравитационного поля /7/, но без специального предположения о наличии сингулярности метрики.

В работе /4/ представленная модель квантовой гравитации в многомерных пространствах размерностью D с метрикой

$$\begin{gathered} ds^2 = \psi(t,r)dt^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1{}^2 - \sin^2\phi_1 d\phi_2{}^2 - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 d\phi_3{}^2 - \\ \ldots - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 \ldots \sin^2\phi_{N-1} d\phi_N{}^2 \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N$ - углы на единичной сфере, погруженной в $D-1$ мерное пространство. Метрика (4) описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике элементарных частиц и в теории супергравитации. Такой подход позволяет охватить все многообразие материи, которую производит фабрика природы, путем выбора уравнения состояния $p = p(\psi)$. Так, например, в работе /4/ метрика (4) и модель (3) использованы для обоснования гипотезы Шредингера /5/ о связи гравитационных волн с волновой функцией квантовой механики.

Рассмотрим гравитацию в пространствах с метрикой (4). Уравнение Эйнштейна в форме (3) является универсальным, поэтому обобщается на пространство любого числа измерений. Движение материи будем описывать уравнением Гамильтона-Якоби, которое также обобщается на любое число измерений. Вместе эти два уравнения составляют универсальную модель, описывающую движение материи в D-мерном пространстве:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \tag{5}$$

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = 0 \tag{6}$$

Уравнения поля в метрике (4) сводятся к одному уравнению второго порядка /4/

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -Kp\psi - \frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi}\psi_t^{\,2} + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \tag{7}$$

В общем случае параметры модели и скалярная кривизна зависят только от размерности пространства, имеем

$$\begin{aligned} &k = D(D-5)/2 + 3, \\ &K = 2(D-3), \\ &R = -D^2 + 3D \end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что уравнение (7) изменяет свой тип в зависимости от знака производной p':

в области $p' < 0$ уравнение (7) имеет эллиптический тип;

в области $p' > 0$ уравнение (7) имеет гиперболический тип;

в области $p' = 0$ уравнение (7) имеет параболический тип.

Сигнатура метрики (4) не меняется, если потребовать дополнительно $p(\psi) > 0, \psi > 0$.

Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (4) имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \phi_1}\right)^2 - \sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_2}\right)^2 - \\ \sin^{-2}\phi_1 \sin^{-2}\phi_2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_3}\right)^2 - \ldots - \sin^{-2}\phi_1 \sin^{-2}\phi_2 \ldots \sin^{-2}\phi_{N-1}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_N}\right)^2 = 0\end{gathered} \tag{9}$$

Уравнение (9) можно проинтегрировать при некоторых предположениях, используя метод, который предложил Шредингер /5/. Суть метода состоит в том, чтобы представить решение уравнения (11) в виде

$$S = S_{cl} + \hbar \ln \Psi_S \tag{10}$$

Здесь в теорию в явном виде вводится классическое действие - S_{cl}, постоянная Планка и волновая функция Ψ_S. Используя классическое действие, мы определяем те параметры задачи, которые могут считаться внешними для квантовой системы. В случае метрики (4) удобно будет выбрать в качестве переменных квантовой механики углы на единичной сфере, а в качестве координат классического действия – время и радиальную координату. Тогда уравнение (9) разделяется на два уравнения

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r}\right)^2 = M^2$$
$$\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_1}\right)^2 + \sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_2}\right)^2 + ... + \sin^{-2}\phi_1 \sin^{-2}\phi_2 ... \sin^{-2}\phi_{N-1}\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_N}\right)^2 = \frac{M^2}{\hbar^2}\Psi_S^2 \quad (11)$$

Здесь M – произвольная постоянная.

Гравитационные волны

Рассмотрим гравитационные волны, которые возникают в метрике (4) в случае линейного уравнения состояния. Положим в уравнении (7)

$p = \psi / c^2, \psi = e^w$.

Тогда уравнение (7) приводится к виду уравнения Лиувилля:

$$w_{tt} = c^2 w_{rr} + Ke^w \quad (12)$$

Для уравнения (12) можно указать алгоритм построения общего решения и различных частных решений типа уединенных волн /8-14/. Общее решение дается формулой Лиувилля /9-10/:

$$w(r,t) = \ln\left[\frac{8c^2 f'(\eta) g'(\varsigma)}{K\left(f(\eta) + g(\varsigma)\right)^2}\right], \quad \eta = ct - r, \varsigma = r + ct \quad (13)$$

Здесь $f(\eta), g(\varsigma)$ – произвольные функции. Отметим, что уравнение (12) широко используется в теории струн и квантовой гравитации /11-14/, поскольку соответствующая модель является полностью интегрируемой. Обычно это уравнение выводится из принципа стационарности действия, однако использованный нами метод имеет то преимущество, что можно определить метрику, соответствующую гравитационным волнам и движение пробных частиц в этой метрике.

Действительно используя формулу Лиувилля (13), можно указать общее решение уравнений Эйнштейна в форме (3), описывающее гравитационные волны в метрике (4):

$$\psi(r,t) = \frac{8c^2 f_\eta(\eta) g_\varsigma(\varsigma)}{K\left(f(\eta)+g(\varsigma)\right)^2}, \quad p(\psi) = \psi / c^2,$$
$$K = 2(D-3), \quad \eta = ct - r, \varsigma = r + ct \tag{14}$$

Гравитационные волны типа (14) распространяются в комбинации, включающей опережающие и запаздывающие волны. Следовательно, скалярные гравитационные волны могут служить источником квантового движения частиц, например, в форме волн де Бройля /15/.

Действительно, запишем первое уравнение (11) в метрике (14), имеем

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r}\right)^2 = \frac{8M^2}{K}\frac{f_\eta(\eta) g_\varsigma(\varsigma)}{\left(f(\eta)+g(\varsigma)\right)^2} \tag{15}$$

Предполагая, что действие зависит от координат η, ς, преобразуем обе части уравнения (15) к эквивалентному виду

$$4\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial \varsigma}\right) = \frac{8M^2}{K}\frac{\partial \ln\left(f(\eta)+g(\varsigma)\right)}{\partial \eta}\frac{\partial \ln\left(f(\eta)+g(\varsigma)\right)}{\partial \varsigma} \tag{16}$$

Отсюда следует, что действие можно выразить через произвольные функции $f(\eta), g(\varsigma)$ в виде

$$S_{cl} = M\sqrt{\frac{2}{K}}\ln[f(\eta)+g(\varsigma)] \tag{17}$$

Уравнение (17) можно рассматривать и в обратную сторону, предполагая, что неизвестные функции $f(\eta), g(\varsigma)$ связаны с действием пробных частиц

$$f(\eta)+g(\varsigma) = \exp(S_{cl}/h), \; h = M\sqrt{\frac{2}{K}} \tag{18}$$

Все функции, входящие в уравнение (18) являются вещественными.

Если предположить, что

$$p = -\psi / c^2, \quad \psi = e^w \tag{19}$$

Тогда, подставляя в уравнение (7) выражения (20), приходим к уравнению Лиувилля эллиптического типа

$$w_{tt} + c^2 w_{rr} = Ke^w \qquad (20)$$

В этом случае также можно получить решения уравнения (20) общего вида, которые выражаются через аналитические функции /9/. Применение эллиптической модели (20) в квантовой теории гравитации можно найти в работе /12/.

Уравнение (18) позволяет определить метрику, если известно движение произвольных пробных частиц, тогда как уравнение (17) позволяет определить действие, если известна метрика. Такая взаимосвязь действия и волновой функции возникает в квантовой теории Шредингера /5/. Можно, поэтому предположить, что гравитационные волны связаны с волнами материи /4/.

В этой связи приведем фрагмент из письма Шредингера к Эйнштейну: «…я уже давно думаю, что следует отождествлять Ψ-волны с волнами нарушения гравитационного потенциала - конечно, не с теми, которые ты исследовал впервые, но с теми, которые обладают действительной массой, т.е. не исчезающим T_{ik}. Это значит, я думаю, что нужно в абстрактной общей теории относительности, содержащей T_{ik} еще как «asylum ignorantial» (по твоему собственному выражению), ввести материю не в качестве массивных точек или чего-нибудь подобного, а как квантованные гравитационные волны» /5/.

Метрика Шварцшильда и уравнение состояние материи

Все статические метрики вида (4) описываются уравнением (7), полагая в этом уравнении $\psi_t = \psi_{tt} = 0$, находим

$$\psi_{rr} = -Kp\psi + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \tag{21}$$

Интегрируя уравнение (21), получим

$$p\psi(C - 2K\psi) = \psi_r^2 \tag{22}$$

C – произвольная постоянная. Для физических приложений представляют интерес статические решения, которые имеют в качестве асимптотики метрику Шварцшильда, описывающую гравитационное поле точечной массы

$$\psi = 1 - \frac{2m}{R} \tag{23}$$

Метрика (23) широко используется в теории в связи с явлением коллапса, ведущим к образованию черных дыр. Заметим, что метрика Шварцшильда определена в сферических координатах, тогда как метрика (4) является центрально-симметрической. Для согласования метрик положим $R = 1/r$, тогда метрика Шварцшильда преобразуется к виду

$$\psi = 1 - 2mr \tag{24}$$

Среди статических метрик, имеющих в качестве асимптотики метрику Шварцшильда (23), можно выделить экспоненциальную зависимость

$$\psi = \exp(-2mr) = 1 - 2mr + ... \tag{25}$$

Подставляя выражение (25) в уравнение (22), находим уравнение состояния, которое согласовано с метрикой Шварцшильда

$$\begin{gathered} p = \frac{4m^2\psi}{C - 2K\psi} = \frac{2m^2}{K}\frac{-1}{1 \pm \exp(2mr - \mu)}, \\ \frac{dp}{d\psi} = \frac{C}{(C - 2K\psi)^2}, \quad C = \pm 2Ke^{-\mu} \end{gathered} \tag{26}$$

Заметим, что в метрике Шварцшильда (23) параметр m соответствует массе или энергии покоя системы. Мы предполагаем, что источник гравитации типа точечной массы обусловлен в метрике (4) наличием двух типов уравнения состояния, соответствующих бозонам и фермионам.

Сопоставим первое уравнение (26) с квантовыми статистиками:

- в случае бозонов $p = \frac{2m^2}{K}\frac{1}{\exp(2mr-\mu)-1}, \quad C>0, p(\psi)>0, p'(\psi)>0$;

- в случае фермионов $p = -\frac{2m^2}{K}\frac{1}{\exp(2mr-\mu)+1}, \quad C<0, p(\psi)<0, p'(\psi)<0$.

Указанное деление материи на бозоны и фермионы по виду уравнения состояния (26) является условным. Как известно, деление частиц на фермионы и бозоны первоначально возникло в статистической физике, и лишь благодаря теореме Паули была установлена связь спина со статистикой.

Гравитационные волны и волны де Бройля

Рассмотрим модель волн де Бройля /15/, существование которых было доказано экспериментально /16/, и происхождение которых традиционно связывают с квантовыми свойствами материи, а не с гравитационными волнами. Необходимо указать такое уравнение состояния для уравнения (7), которое описывает периодические решения вида $\psi = \psi(r+ut)$. Положим в уравнении (7)

$p = \psi(r+ut)/c^2 + b, \psi = e^w$.

Тогда уравнение (7) принимает вид

$$w'' + \frac{bc^2 w'^2}{2(bc^2+e^w)} + \frac{K(bc^2+e^w)}{c^2-u^2} = 0 . \qquad (27)$$

Положим $w(0)=w_0$, $w'(0)=0$. Волновые решения уравнения (27) существуют при условии $b<0$ - рис. 1-2. Такого типа гравитационные волны похожи на волны де Бройля в той области параметров, где гравитационные волны являются линейными. Для нахождения этих решений представим уравнение (27) в виде

$$\tilde{w}_{\zeta\zeta} - \frac{\frac{1}{2}\tilde{w}_{\zeta}^{2}}{\exp(\tilde{w}) - 1} + \exp(\tilde{w}) - 1 = 0, \quad \tilde{w} = w - \ln\left|bc^{2}\right|. \tag{28}$$

Здесь обозначено

$$\tilde{w} = \tilde{w}(\zeta, \beta),\ \zeta = \sqrt{K\left|bc^{2}\right|/(c^{2} - u^{2})}(r + ut),\ \beta = w_{0} - \ln\left|bc^{2}\right|$$

Разложим экспоненту в уравнении (28) с точностью до линейного слагаемого, в результате получим

$$\tilde{w}_{\zeta\zeta} - \frac{\tilde{w}_{\zeta}^{2}}{2\tilde{w}} + \tilde{w} = 0 \tag{29}$$

Общее решение уравнения (29) имеет вид

$$\tilde{w} = C_{1}\cos^{2}\left(\frac{\zeta - \zeta_{0}}{\sqrt{2}}\right) \tag{30}$$

C_{1}, ζ_{0} – произвольные постоянные, которые найдем из начальных условий

$$\tilde{w}(0) = w_{0} - \ln\left|bc^{2}\right|,\ \tilde{w}_{\zeta}(0) = 0 \rightarrow C_{1} = w_{0} - \ln\left|bc^{2}\right|.$$

Для выполнения уравнения (29) с необходимой точностью достаточно будет потребовать, чтобы выполнялось условие $\left|C_{1}\right| << 1$. Следовательно, метрику, описывающую волны де Бройля, можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\psi = \exp\left(w_{0}\cos^{2}\zeta' + \ln\left|bc^{2}\right|\sin^{2}\zeta'\right), \\ &\zeta' = \sqrt{K\left|bc^{2}\right|/\,2(c^{2} - u^{2})}(r + ut) \end{aligned} \tag{31}$$

Таким образом, доказано, что волны материи связаны с метрикой и гравитационными волнами в полном соответствии с гипотезой Шредингера /5/.

Стационарные состояния квантовых и классических систем

Покажем, что для любой квантовой или классической системы, обладающей центральной симметрией и заданной энергией, существует такая метрика, что действие системы будет связано с некоторым решением уравнения (7). В случае линейного уравнения состояния доказательство было получено в явно виде – уравнение (17). В случае стационарных состояний действие системы можно представить в виде $S_{cl} = -Et + S_1(r)$. Используя первое уравнение (11) и уравнение (22), находим

$$\begin{aligned} & p\psi(C-2K\psi) = \psi_r^2 \\ & \frac{E^2}{\psi} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 = M^2 \end{aligned} \tag{32}$$

Выразим $p = p(\psi)$ из первого уравнения и подставим во второе, тогда получим

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C-2K\psi)}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 \tag{33}$$

Очевидно, что решения уравнения (33) при всех вещественных значениях параметров и метрики определены в комплексной плоскости. Действительно, уравнение (33) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C-2K\psi)} \tag{34}$$

Отсюда следует, что функция действия в общем случае либо является комплексной, либо движение ограничено условием

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{E^2 - M^2\psi}{\psi^2(C-2K\psi)} \ge 0 \tag{35}$$

Поскольку же метрика допускает любые движения, то отсюда следует, что функция действия является комплексной. Разрешая уравнение (34), находим в явном виде зависимость действия стационарных систем от метрики окружающего пространства

$$S_1(\psi) = S_0 \pm \frac{E}{\sqrt{C}} \ln\psi$$
$$\mp \frac{E}{\sqrt{C}} \ln\left(2CE^2 - 2KE^2\psi - CM^2\psi + 2E\sqrt{C(C-2K\psi)(E^2 - M^2\psi)}\right) \qquad (36)$$
$$\mp \frac{M}{\sqrt{2K}} \ln\left(-2E^2K - CM^2 + 4KM^2\psi + 2M\sqrt{2K(C-2K\psi)(E^2 - M^2\psi)}\right)$$

Здесь логарифмическая функция определена в комплексной плоскости, S_0 – произвольная постоянная.

В случае $C = 0$ решение уравнения (34) имеет вид

$$S_1 = S_0 \mp \sqrt{\frac{2(M^2\psi - E^2)}{K\psi}} \pm \sqrt{\frac{2}{K}} M \ln\left[M\left(\sqrt{\psi}M + \sqrt{M^2\psi - E^2}\right)\right] \qquad (37)$$

Полученные зависимости (36)-(37) решают поставленную задачу. Таким образом, мы доказали, что действие любой механической системы – классической или квантовой, находящейся в стационарном состоянии, зависит от параметров, характеризующих движение и от метрики окружающего пространства. Следовательно, для каждого типа движения существует такое уравнение состояния $p = p(\psi)$, что движение полностью определяется метрикой и параметрами движения – энергией и угловым моментом, что и требовалось доказать.

На рис. 1-2 представлена зависимость $\mathrm{Re}\,S, \mathrm{Im}\,S, |S|, \mathrm{Arg}(S)$ от параметров C, ψ при заданных значениях $E = \pm 1; M = 1, K = 2$. Основной вывод, который следует из анализа выражения (33) и данных на рис. 1-2, это разделение действия бозонов и фермионов «стеной», имеющей особенность $S \sim 1/\sqrt{C}$.

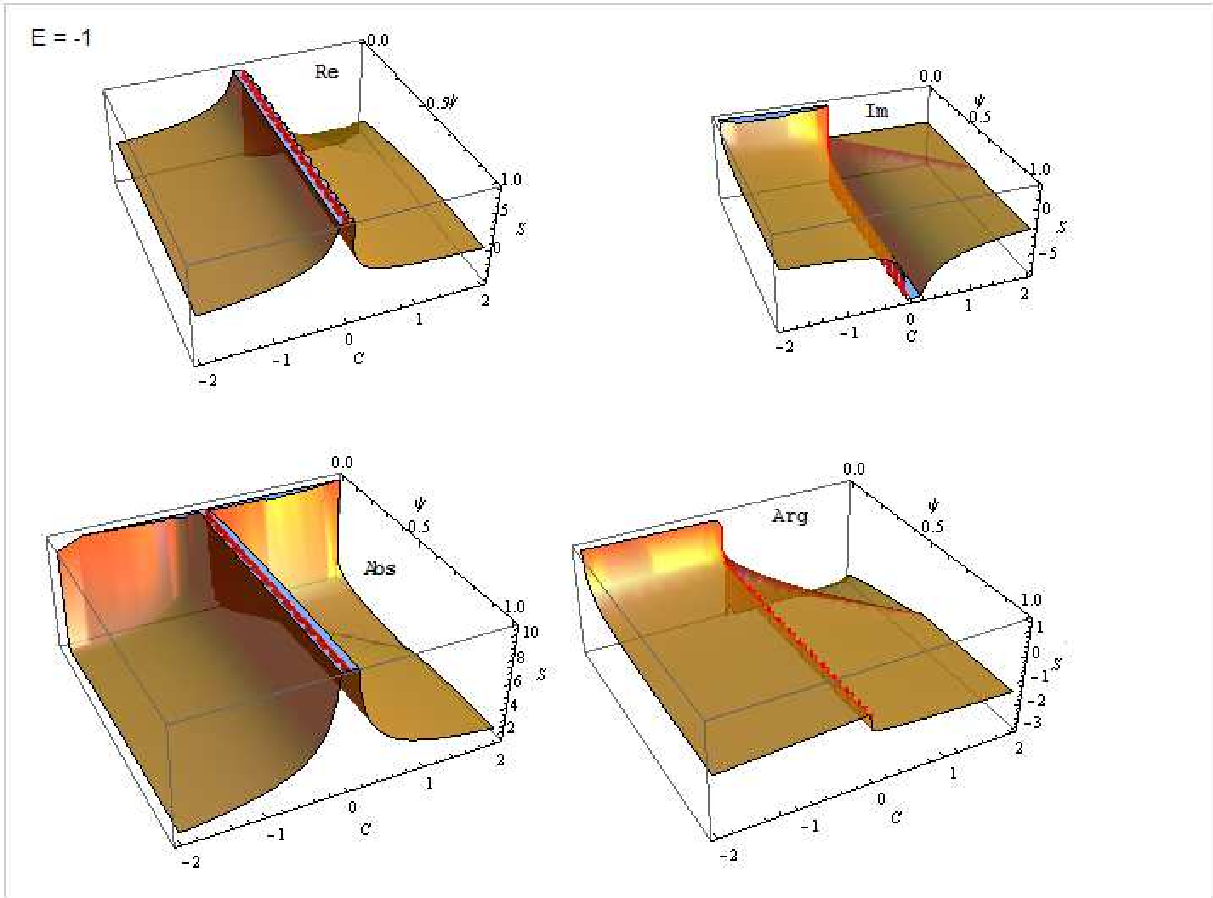

Рис. 1. Зависимость действия от параметров C,ψ при заданном значении $E=-1; K=2; M=1$.

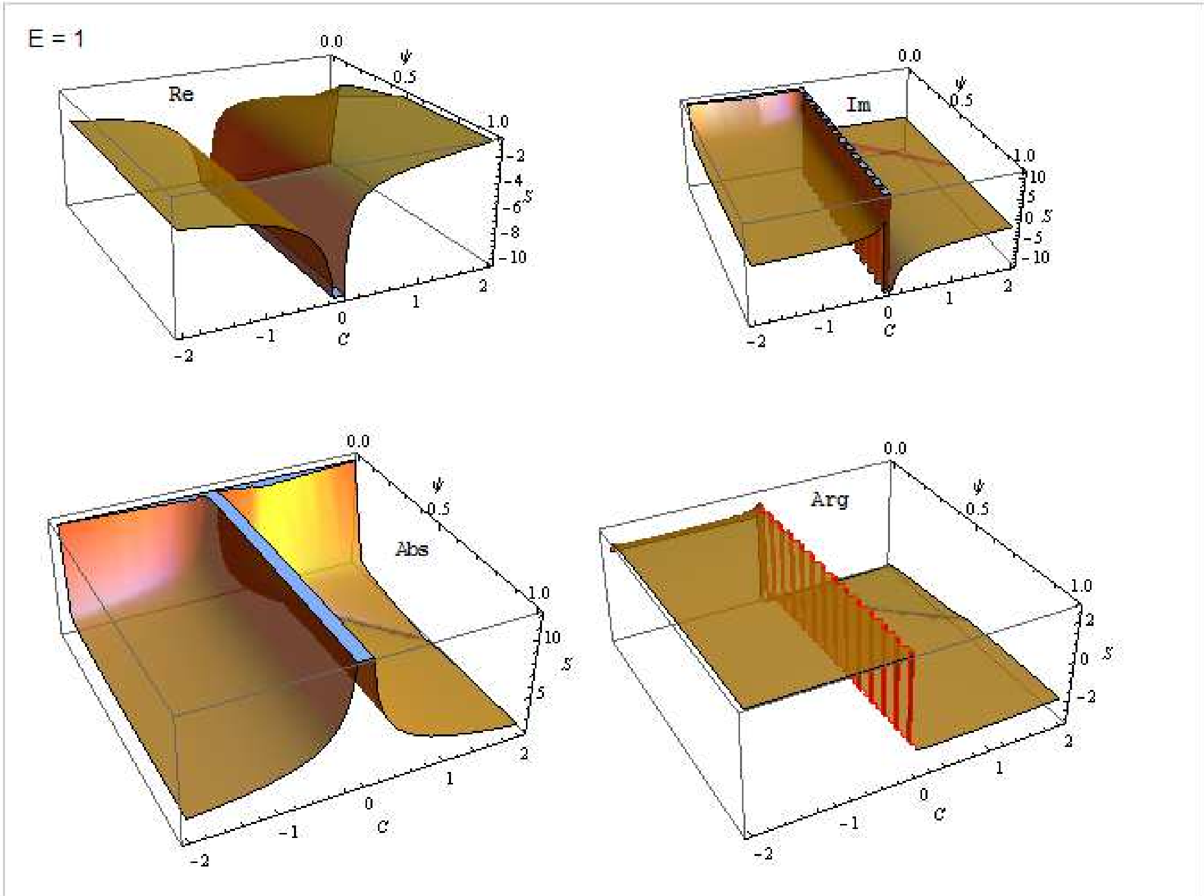

Рис. 2. Зависимость $\mathrm{Re}\,S, \mathrm{Im}\,S, |S|, \mathrm{Arg}(S)$ от параметров C, ψ при заданном значении $E = 1; K = 2; M = 1$.

Аналогичное изменение действия наблюдается в плоскости параметров C, E в силу уравнения (34) – рис. 3. Отметим, что изменение действия вблизи некоторых особых линий происходит скачком, но оно не связано с изменением метрики, а обусловлено только изменением энергии системы.

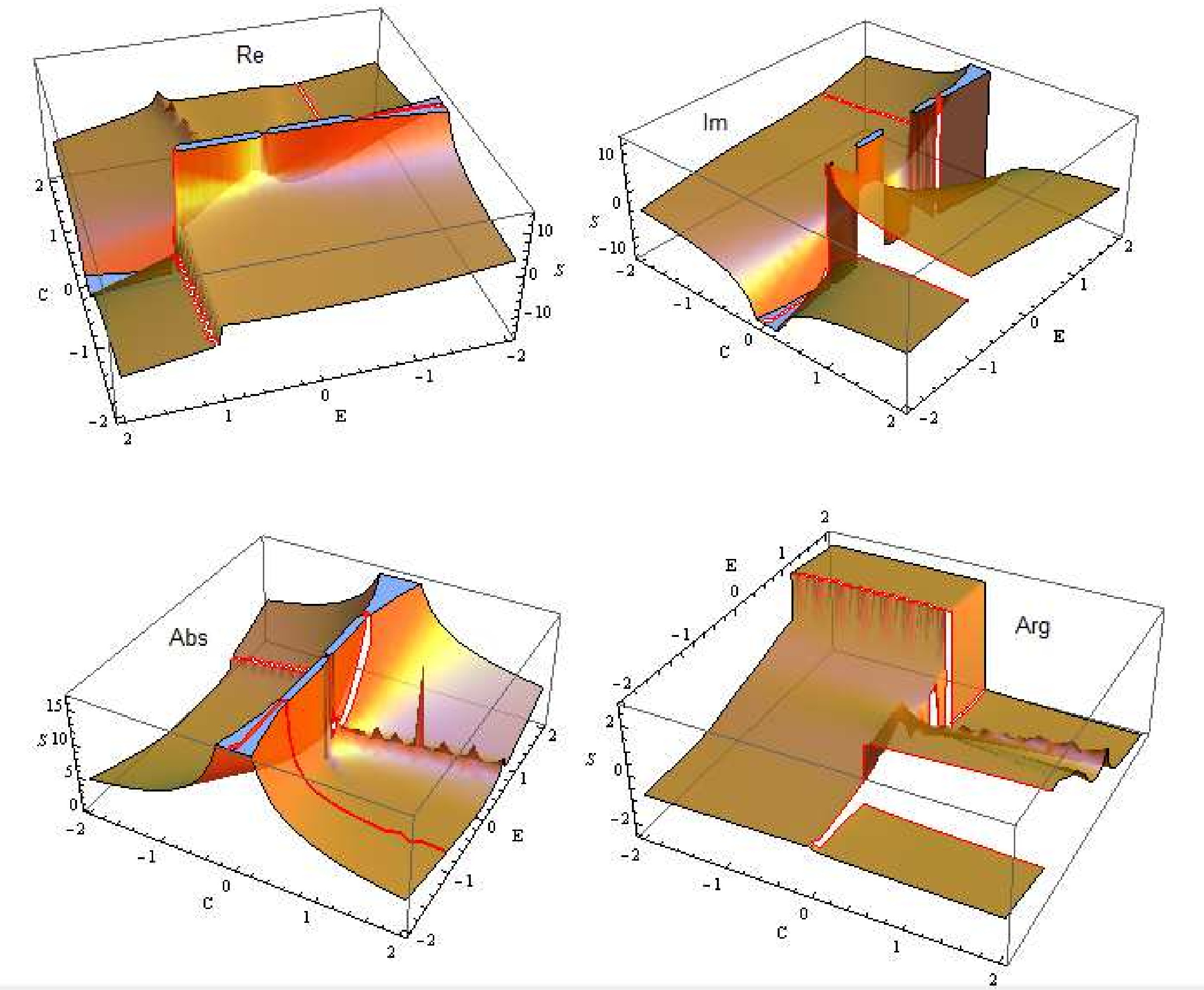

Рис. 3. Зависимость $\operatorname{Re} S, \operatorname{Im} S, |S|, \operatorname{Arg}(S)$ от параметров C, E при заданном значении $\psi = 1; K = 2; M = 1$.

Эти скачки отчетливо наблюдаются на правом нижнем рис. 3, где отображена поверхность фазы действия. Следовательно, в природе существует такое движение фермионов и бозонов, при котором действие изменяется скачком. Такого типа процессы, как известно, называются квантовыми, а само их наличие приводит к квантовой механике.

Уравнение Шредингера

Покажем, что квантовая механика Шредингера соответствует такой области уравнения состояния, в которой $p'=0$, а уравнение (7) имеет параболический тип. Действительно, уравнение поля (7) сводится в этом случае к параболическому уравнению

$$\psi_{rr}-\frac{1}{2\psi}\psi_r^2+Kp\psi=p''\psi_t^{\,2} \qquad (38)$$

Из уравнения состояния (26) находим, что

$$\frac{dp}{d\psi}=\frac{C}{(C-2K\psi)^2}=0\to C=0,\quad p=\frac{4m^2\psi}{C-2K\psi}=-\frac{2m^2}{K} \qquad (39)$$

В пространстве четырех измерений находим из (8), что $K=2$. Далее предположим, что $p''>0$. Это предположение носит принципиальный характер, так как оно не связано напрямую с уравнением состояния (39). Полагая $\psi = e^{w}$, получим

$$w_{rr}+\frac{1}{2}w_r^2-2m^2=p''\psi\, w_t^{\,2} \qquad (40)$$

Уравнение Шредингера непосредственно следует из уравнения (40), если предположить, что энергия системы слабо изменяется по сравнению с энергией покоя, а уравнение состояния удовлетворяет соотношению

$$p''\psi=\sigma\neq 0 \qquad (41)$$

Здесь σ некоторая константа. Тогда, интегрируя уравнение (41) находим, что в этом случае

$$p'=\sigma\ln\psi\xrightarrow[\psi\to 1]{}0 \qquad (42)$$

Следовательно, уравнение (40) принимает вид

$$w_{rr}+\frac{1}{2}w_r^2-2m^2=\sigma\, w_t^{\,2} \qquad (43)$$

Легко видеть, что при $w_{rr} = w_r^2 = 0$ уравнение (43) имеет только комплексные решения. Поэтому рассмотрим в общем случае комплексные решения уравнения (43). Извлекая корень квадратный из обеих частей уравнения, получим

$$\pm i\sqrt{2}m\sqrt{1-\frac{1}{2m^2}\left(w_{rr}+\frac{1}{2}w_r^2\right)} = \sqrt{\sigma}\, w_t \tag{44}$$

Предположение о малости изменения энергии по сравнению с энергией покоя означает, что можно разложить подкоренное выражение в левой части (44), в результате находим

$$\pm i\sqrt{2}m \mp \frac{i}{2\sqrt{2}m}\left(w_{rr}+\frac{1}{2}w_r^2\right)+\ldots = \sqrt{\sigma}\, w_t \tag{45}$$

Представим решение уравнения (45) в виде

$$w = \pm i\sqrt{2/\sigma}mt + \Psi(r,t) \tag{46}$$

Подставляя выражение (46) в уравнение (45), получим в первом приближении

$$\mp \frac{i}{2\sqrt{2}m}\left(\Psi_{rr}+\frac{1}{2}\Psi_r^2\right) = \sqrt{\sigma}\Psi_t \tag{47}$$

Уравнение (47) можно сравнить с уравнение Шредингера

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U\Psi = i\hbar\Psi_t \tag{48}$$

Для согласования уравнений (47) и (48) достаточно будет положить

$$\sqrt{2\sigma} = 1/\hbar, \quad \frac{1}{4m\sqrt{2\sigma}}\Psi_r^2 = -U\Psi \tag{49}$$

Последнее условие можно рассматривать как калибровку, накладываемую на потенциал.

Используя уравнения (47) и уравнение Шредингера (48) с нулевым потенциалом, можно промоделировать процесс расплывания пакета волн в форме распределения Гаусса – рис. 4.

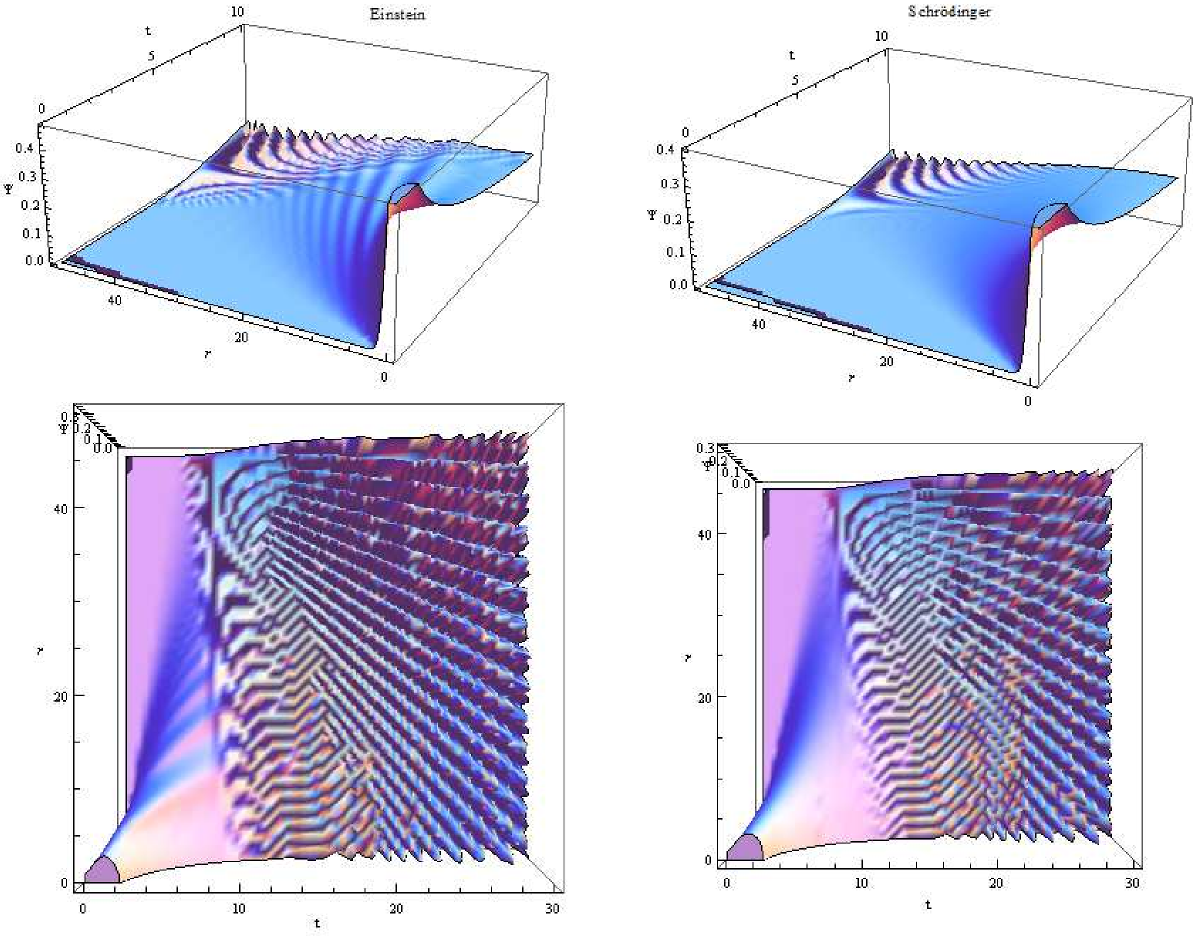

Рис. 4. Моделирование гравитационных волн на основе уравнений Эйнштейна (слева) и Шредингера (справа): первоначально гладкий пакет $\Psi(r,0)=\exp(-r^2)$ разбивается в систему стоячих волн, заполняющих всю область движения.

И на малом (верхние рисунки), и на большом (нижние рисунки) промежутке времени уравнения (47) и (48) – левые и правые рисунки соответственно, приводят приблизительно к похожим результатам: первоначально гладкий пакет $\Psi(r,0) = \exp(-r^2)$ разбивается в систему стоячих волн, заполняющих всю область движения. Таким образом, мы доказали гипотезу Шредингера [2] о связи волновой функции с гравитационными волнами.

Следовательно, движение материи в квантовой системе можно рассматривать как результат фундаментального механизма преобразования темной энергии в системе, содержащей гравитационные волны разного масштаба /19/. Действительно, уравнение Гамильтона-Якоби (9) описывает распространение лучей света или пучков частиц с нулевой массой в приближении геометрической оптики. Тогда как уравнение Эйнштейна описывает гравитацию в исследуемом масштабе длин волн, включая прибор для измерения движения. Но свет и частицы можно рассматривать как пакеты гравитационных волн малого масштаба, которые генерируются в результате передачи энергии по спектру, аналогично механизму передачи энергии в турбулентном потоке /20/.

В этом смысле связь уравнения Эйнштейна с другими уравнениями просто отражает тот факт, что общая теория относительности является универсальной моделью, поэтому все другие модели, включая электродинамику и квантовую механику, могут быть выведены из уравнения Эйнштейна при определенных предположениях /17-19, 21-24/.

Наконец заметим, что с учетом полученных выше результатов уравнение Эйнштейна может найти более широкую область применения не только в космологии, но и в квантовой механике. Ранее было установлено, что уравнение Эйнштейна связано с уравнениями Максвелла, Навье-Стокса и Янга-Миллса /21-24/. Указанные связи не являются случайными, так как уравнения Эйнштейна (1) отражают наиболее фундаментальные свойства движения и материи. В частности, принцип эквивалентности, положенный в основу общей теории относительности, гласит, что «инерция и тяжесть тождественны; отсюда и из результатов специальной теории относительности неизбежно следует, что симметричный «фундаментальный тензор» (g_{ik}) определяет метрические свойства пространства, движение тел по инерции в нем, а также и действие гравитации» /6/.

Однако принцип эквивалентности, видимо, имеет и более широкое применение /17-19/. Фактически этот принцип означает, что любое ускорение, обусловленное внешними силами, эквивалентно некоторому изменению метрики. Полученные выше результаты (17), (36), (37) и (47) являются доказательством этого утверждения в частном случае центрально-симметрического поля.

Библиографический список

1. Planck Collaboration: Cosmological parameters. – Plank 2013 results, Astronomy & Astrophysics manuscript, March 21, 2013; Planck 2013 results. XXVI. Background geometry and topology of the Universe. Submitted to A&A (2013).
2. J. Rosner. Planning the Future of U.S. Particles Physics// arxiv: 1401.6075v1 [hep-ex] 23 Jan 2014
3. BICEP2 COLLABORATION. BICEP2 I: DETECTION OF B-mode POLARIZATION AT DEGREE ANGULAR SCALES// arXiv:1403.3985v1 [astro-ph.CO] 17 Mar 2014; BICEP2 II: EXPERIMENT AND THREE-YEAR DATA SET// arXiv:submit/0934363 [astro-ph.CO] 17 Mar 2014.
4. Трунев А.П. Гравитационные волны и квантовая теория Шредингера// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf
5. Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 361-376; Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 489-527; Letter Schrodinger to Einstein, Jul 19, 1939.

6. Einstein A. Zur allgemeinen Relativitatstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 778—786; Erklarung der Perihelbeivegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839; Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstneorie. Ann. Phys., 1916, 49, 769—822; Nahemngsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696; Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Uber Gravitationwellen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.
7. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464; On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.
8. N.H. Ibragimov. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. – Reidel, Boston, 1984.
9. Darren G. Growdy. General Solution to the 2D Liouville Equation//Int. J. Engng Sci., Vol. 35, No. 2, pp. 141-149, 1997.
10. Nir Cohen, Julia V. Toledo Benavides. Exact solutions of Bratu and Liouville equations// CNMAC 2010, pp. 750-756.
11. Polyakov A.M. Quantum geometry of bosonic strings//Phys. Letter, 103B, 3, 1981.
12. Zamolodchikov A, Zamolodchikov Al. Liouville Field Theory on a Pseudosphere// arxiv: hep-th/0101152v1. 23 Jan, 2001.
13. J. Teschner. Liouville theory revisited// arxiv: hep-th/0104158v3, 9 Nov 2001.
14. Yu Nakayama. Liouville Field Theory// arxiv: hep-th/0402009v7, 10Dec, 2004.
15. L. de Broglie. Recherches sur la theorie des quanta. - Thesis (Paris), 1924.
16. Clinton J. Davisson, Lester H. Germer. Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel// Phys. Rev. 30, 705, 1927; Clinton J. Davisson. The discovery of electron waves. Nobel Lecture, Dec 13, 1937.
17. Alon E. Faraggi and Marco Matone. The Equivalence Postulate of Quantum Mechanics// arXiv:hep-th/9809127v2, 6 Aug 1999.
18. Alon E. Faraggi. The Quantum Closet//arXiv:1305.0044v1, 30 Apr 2013.
19. Alon E. Faraggi. The Equivalence Postulate of Quantum Mechanics, Dark Energy and The Intrinsic Curvature of Elementary Particles//Advances in High Energy Physics, vol. 2013, Article ID 957394.
20. Vladimir Dzhunushaliev, V. Folomeev, Burkhard Kleihaus, Jutta Kunz. Modified gravity from the quantum part of the metric// arXiv:1312.0225v2 [gr-qc], 9 Jan 2014.
21. J. A. Shifflett. A modification of Einstein- Schrödinger theory that contains both general relativity and electrodynamics// Gen.Rel.Grav.40:1745-1769, 2008.
22. J. A. Shifflett. A modification of Einstein-Schrodinger theory that contains Einstein-Maxwell-Yang-Mills theory// Gen.Rel.Grav.41:1865-1886, 2009.
23. Fabio Grangeiro Rodrigues, Roldao da Rocha, Waldyr A. Rodrigues Jr. The Maxwell and Navier-Stokes that Follow from Einstein Equation in a Spacetime Containing a Killing Vector Field// AIP Conference Proceedings, v. 1483, 277-295, 2012.
24. L.N.Krivonosov, V.A.Luk'aynov. The relationship between the Yang-Mills and Einstein and Maxwell Equations// J. SibFU, Math. and Phys, 2(2009), no. 4, 432–448 (in Russian).

Bibliograficheskij spisok

1. Planck Collaboration: Cosmological parameters. – Plank 2013 results, Astronomy & Astrophysics manuscript, March 21, 2013; Planck 2013 results. XXVI. Background geometry and topology of the Universe. Submitted to A&A (2013).
2. J. Rosner. Planning the Future of U.S. Particles Physics// arxiv: 1401.6075v1 [hep-ex] 23 Jan 2014
3. BICEP2 COLLABORATION. BICEP2 I: DETECTION OF B-mode POLARIZATION AT DEGREE ANGULAR SCALES// arXiv:1403.3985v1 [astro-ph.CO] 17 Mar 2014; BICEP2 II: EXPERIMENT AND THREE-YEAR DATA SET// arXiv:submit/0934363 [astro-ph.CO] 17 Mar 2014.
4. Trunev A.P. Gravitacionnye volny i kvantovaja teorija Shredingera// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №02(096). S. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf
5. Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 361-376; Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 489-527; Letter Schrodinger to Einstein, Jul 19, 1939.
6. Einstein A. Zur allgemeinen Relativitatstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 778—786; Erklarung der Perihelbeivegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839; Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstneorie. Ann. Phys., 1916, 49, 769—822; Nahemngsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696; Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Uber Gravitationwellen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.
7. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464; On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.
8. N.H. Ibragimov. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. – Reidel, Boston, 1984.
9. Darren G. Growdy. General Solution to the 2D Liouville Equation//Int. J. Engng Sci., Vol. 35, No. 2, pp. 141-149, 1997.
10. Nir Cohen, Julia V. Toledo Benavides. Exact solutions of Bratu and Liouville equations// CNMAC 2010, pp. 750-756.
11. Polyakov A.M. Quantum geometry of bosonic strings//Phys. Letter, 103B, 3, 1981.
12. Zamolodchikov A, Zamolodchikov Al. Liouville Field Theory on a Pseudosphere// arxiv: hep-th/0101152v1. 23 Jan, 2001.
13. J. Teschner. Liouville theory revisited// arxiv: hep-th/0104158v3, 9 Nov 2001.
14. Yu Nakayama. Liouville Field Theory// arxiv: hep-th/0402009v7, 10Dec, 2004.
15. L. de Broglie. Recherches sur la theorie des quanta. - Thesis (Paris), 1924.
16. Clinton J. Davisson, Lester H. Germer. Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel// Phys. Rev. 30, 705, 1927; Clinton J. Davisson. The discovery of electron waves. Nobel Lecture, Dec 13, 1937.

17. Alon E. Faraggi and Marco Matone. The Equivalence Postulate of Quantum Mechanics// arXiv:hep-th/9809127v2, 6 Aug 1999.
18. Alon E. Faraggi. The Quantum Closet//arXiv:1305.0044v1, 30 Apr 2013.
19. Alon E. Faraggi. The Equivalence Postulate of Quantum Mechanics, Dark Energy and The Intrinsic Curvature of Elementary Particles//Advances in High Energy Physics, vol. 2013, Article ID 957394.
20. Vladimir Dzhunushaliev, V. Folomeev, Burkhard Kleihaus, Jutta Kunz. Modified gravity from the quantum part of the metric// arXiv:1312.0225v2 [gr-qc], 9 Jan 2014.
21. J. A. Shifflett. A modification of Einstein- Schrödinger theory that contains both general relativity and electrodynamics// Gen.Rel.Grav.40:1745-1769, 2008.
22. J. A. Shifflett. A modification of Einstein-Schrodinger theory that contains Einstein-Maxwell-Yang-Mills theory// Gen.Rel.Grav.41:1865-1886, 2009.
23. Fabio Grangeiro Rodrigues, Roldao da Rocha, Waldyr A. Rodrigues Jr. The Maxwell and Navier-Stokes that Follow from Einstein Equation in a Spacetime Containing a Killing Vector Field// AIP Conference Proceedings, v. 1483, 277-295, 2012.
24. L.N.Krivonosov, V.A.Luk'aynov. The relationship between the Yang-Mills and Einstein and Maxwell Equations// J. SibFU, Math. and Phys, 2(2009), no. 4, 432–448 (in Russian).